Afriat-Varian の検定理論について

細矢祐誉

中央大学

December 13, 2022

出発点：Afriat (1967)

顕示選好理論は、少なくとも研究の当初は、需要関数が順序の最大化から導出できていることの特徴付け理論として出発した。Samuelson (1938) や Houthakker (1950), Uzawa (1960), Richter (1966) などはその種の論文だと考えることができる。しかし一方で、現代の顕示選好理論は、少なくとも消費者理論の内部では、どちらかというと有限個のデータが効用最大化仮説と無矛盾か否かをテストする方向に発展していっている。この端緒となる研究が Afriat (1967) である。

なお、本報告ではこの人物の名前を「アフリアット」と称するが、正しい読みかどうかについてはわかっていない。

アフリアットの研究の問題

アフリアットは、有限個の需要データを「効用関数 u で説明できる」という語を定式化し、それと同値な条件をいくつか導出してみせた。しかし、彼の論文のうち、最後に議論されている部分はよくわからないことが多すぎて、おそらく正しくないと思われる。また、他の部分でも証明に穴があって、0 かもしれない数で割り算してしまっている。1970 年代の論文を見ると Diewert (1973) はこれを避けるために非常に難解な線形計画法の問題を議論しているが、アフリアットの問題との関連が見えにくい。Mas-Colell (1978) はアフリアットの結果を正しいと見なした上で論理を構築しているが、彼が結果を確認したかどうかはよくわからない。結局、1970 年代にアフリアットの結果は「知られていた」けれども「きちんと確認されていなかった」と考えてよいと思われる。

ヴァリアンのアルゴリズム

この問題を解決したのは Varian (1983) である。彼は、アフリアットが割り算で議論していた部分をまったく別のアルゴリズムによって解決する手法を用意した。彼のアルゴリズムは正しく機能することが証明できるため、アフリアットの論文の大部分が正しかったことが、ここで示された。このため、発表者である細矢はこの理論を「アフリアット＝ヴァリアンの検定理論」と呼んでいる。今日の話は、この検定理論の解説である。特に、アフリアットが提示しヴァリアンが解決した基本定理の証明をきちんと説明する。

購買データ（1）

まず、購買データを扱うに当たってはひとつの注意が必要である。いま、有限個の購買データを

$$E = ((x^i, p^i, m^i))_{i=1}^k$$

と表したとする。このとき $p^i \cdot x^i \leq m^i$ は当然仮定される。実数値関数 u がこの E を**説明する**という言葉を、

$$x^i \in \arg\max\{u(x) | x \in \mathbb{R}^n_+,\ p^i \cdot x \leq m^i\}$$

がすべての i について成り立つこと、として定式化する。すると定数関数 u は任意のデータ E を説明する。我々は効用最大化仮説を特徴付けるデータの特徴を見たいのだが、どんなデータでも説明する効用関数が存在するというのでは議論が深まらない。これは、u に仮定を置かなすぎたことが原因である。そこで以降我々は暗黙のうちに、u に局所非飽和性を仮定して議論することにしたい。

購買データ（2）

u に局所非飽和性を仮定するのだから、我々は $p^i \cdot x^i = m^i$ を常に仮定してよいということになる。したがって m^i はモデルの記述から省いてよい。また、正規化をして $m^i = 1$ が常に成り立つと仮定しても不都合はない。よって、我々が**購買データ**と呼ぶものは、以下の有限列

$$E = ((x^i, p^i))_{i=1}^k$$

である。ただし、$x^i \in \mathbb{R}^n_+$ であり、$p^i \in \mathbb{R}^n_{++}$ で、$p^i \cdot x^i = 1$ が常に仮定される。関数 $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ がこの E を**説明する**とは、関係

$$x^i \in \arg\max\{u(x) | x \in \mathbb{R}^n_+,\ p^i \cdot x \le 1\}$$

がすべての $i \in \{1, ..., k\}$ に対して成り立つことを言う。

数 D_{ij} の定義

アファリアット＝ヴァリアンの理論で最も重要になるのは以下の量である。

$$D_{ij} = p^i \cdot x^j - 1.$$

この量は、顕示選好理論と関係がある。いま、$D_{ij} < 0$ であるとしよう。このとき、$p^i \cdot x^j < 1 = p^i \cdot x^i$ である。したがって、x^i が選ばれたときに、x^j は予算線の下側に位置しているので、おそらく x^i より x^j の方が悪かったのだろうと推察できる。一方で、本研究では需要関数に一価性を仮定していないため、$D_{ij} = 0$ であるというだけでは、x^i と x^j のどちらがよいかは判定できない。（これについて、Matzkin and Richter (1991) は一価な需要関数で説明できるための条件を扱っているが、今回はその話はしない）

整合性（1）

アフリアットは購買データに「整合性」と名前がついた６つの条件を与え、それが同値であることを主張している。彼の結果のうち、「選好整合性」の名前がつけられたものはいまでは他と同値でないと考えられているが、残り５つの整合性はすべて同値であることがわかっている。ここではまず、これらの「整合性」の正式な定義を書こう。

効用整合性

購買データ E が**効用整合性** (utility consistency) を満たすとは、それが局所非飽和な関数 u で説明できることを言う。

整合性（2）

循環整合性

購買データ E が**循環整合性** (cyclical consistency) を満たすとは、任意の有限添字列 $i_1, ..., i_M$ に対して、

$$D_{i_1 i_2} \leq 0, ..., D_{i_M i_1} \leq 0$$

が成り立つならば、$D_{i_1 i_2} = ... = D_{i_M i_1} = 0$ が成り立つことを言う。

この結果は Generalized axiom of revealed preference (GARP) という別の仮定と同値である。購買データが GARP を満たすとは、$D_{i_1 i_2} \leq 0, ..., D_{i_{M-1} i_M} \leq 0$ ならば必ず $D_{i_M i_1} \geq 0$ であることを言う。同値性の証明は簡単に示せる。ヴァリアンはどちらかというと GARP が好みだったようである。

整合性（3）

乗数整合性

購買データ E が**乗数整合性** (multiplier consistency) を満たすとは、ある正の数の有限列 $\lambda_1, ..., \lambda_k$ が存在して、任意の有限添字列 $\{i_1, ..., i_M\}$ に対して

$$\lambda_{i_1} D_{i_1 i_2} + ... + \lambda_{i_M} D_{i_M i_1} \geq 0$$

が成り立つことを言う。

この乗数整合性は文脈上最近ではあまり議論されないことが多くなっている。

整合性（4）

水準整合性

購買データ E が**水準整合性** (level consitency) を満たすとは、ある正の数の有限列 $\lambda_1, ..., \lambda_k$ と有限数列 $u_1, ..., u_k$ が存在して、任意の i, j に対して

$$\lambda_i D_{ij} \geq u_j - u_i$$

が成り立つことを言う。

この整合性は、それに近い問題を Diewert (1973) が扱って以降、**アフリアットの不等式**と言う名前で線形計画法において有名であり、よく扱われているようである。

整合性（5）

正規整合性

購買データ E が**正規整合性** (regular consistency) を満たすとは、それが強く増加的で凹で連続な関数 u で説明できることを言う。

ここで u が強く増加的であるとは、$x \geq y$ かつ $x \neq y$ ならば $u(x) > u(y)$ であることを意味する。

アフリアット＝ヴァリアンの定理

以下、アフリアット＝ヴァリアンの定理を述べよう。

定理 1

以下の５条件は同値である。

(1) E は効用整合性を満たす。

(2) E は循環整合性を満たす。

(3) E は乗数整合性を満たす。

(4) E は水準整合性を満たす。

(5) E は正規整合性を満たす。

定理の証明の方針

アフリアットは(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(5)⇒(1) という順番で証明を構築しようとした。しかし、(2)⇒(3) のステップで D_{ij} での割り算を用いてしまっているため、証明が破綻している。アフリアットの議論のうち、彼が示したと言えるのは以下の二つである。

(I) (4)⇒(5)⇒(1)⇒(2),

(II) (4)⇒(3)⇒(2).

一方、ヴァリアンはアルゴリズムの構築によって次を示した。

(III) (2)⇒(4).

したがって、これらをつなげて定理 1 の証明は得られる。本報告でも、この 3 つに分けて証明をしていこうと考えている。

(I) の証明（１）

(4) を仮定し、λ_i, u_i を取ってくる。$u_i(x) = u_i + \lambda_i(p^i \cdot x - 1)$ と定義し、$u(x) = \min_i u_i(x)$ とする。各 $u_i(x)$ は線形であり、したがって凹かつ連続であることに注意する。一般に凹かつ連続な関数の有限個の最小値で定義される関数は凹かつ連続である[1] から、$u(x)$ は凹な連続関数である。また $\lambda_i > 0$ と $p^i \gg 0$ から $u_i(x)$ は強く増加的な関数であり、よって $u(x)$ も強く増加的である。

[1]実際、連続性は明らかである。また、$x, y \in \mathbb{R}^n_+$ かつ $0 \leq t \leq 1$ ならば、

$$u_i((1-t)x + ty) \geq (1-t)u_i(x) + tu_i(y) \geq (1-t)u(x) + tu(y)$$

であるから、左辺を i について最小化すれば u が凹であることがわかる。

(I) の証明（２）

ここで、$u_i(x^i) = u_i$ である。また、
$u_j(x^i) = u_j + \lambda_j D_{ji} \geq u_j + u_i - u_j = u_i$ なので、$u(x^i) = u_i$ を得る。
一方でもし $p^i \cdot x \leq 1$ であるならば、$u_i(x) = u_i + \lambda_i(p^i \cdot x - 1) \leq u_i$ であり、故に $u(x) \leq u_i(x) \leq u_i = u(x^i)$ である。これは

$$x^i \in \arg\max\{u(x) | x \in \mathbb{R}^n_+,\ p^i \cdot x \leq 1\}$$

を意味するので、u は E を説明できる。こうして (5) がわかった。

(I) の証明（３）

(5)⇒(1) は自明であるため、(I) の部分を証明するために残った作業は (1)⇒(2) の証明だけである。
そこで (1) を仮定し、u が E を説明する局所非飽和な関数であるとし、

$$f(p) = \arg\max\{u(x)|x \in \mathbb{R}^n_+,\ p \cdot x \leq 1\}$$

としていつもの需要対応を定義する。局所非飽和性からただちに、次の**ワルラス法則**

$$x \in f(p) \Rightarrow p \cdot x = 1$$

が導かれる。

(I) の証明（４）

いま、$\{i_1, ..., i_M\} \subset \{1, ..., k\}$ を取り、任意の $j \in \{1, ..., M\}$ に対して $D_{i_j i_{j+1}} \leq 0$ であるとしよう。ただし $i_{M+1} = i_1$ とする。このとき、$D_{i_j i_{j+1}} \leq 0$ であるので、$p^{i_j} \cdot x^{i_{j+1}} \leq 1$ である。$x^{i_j} \in f(p^{i_j})$ であるから、$u(x^{i_j}) \geq u(x^{i_{j+1}})$ である。よって、

$$u(x^{i_1}) \geq u(x^{i_2}) \geq u(x^{i_3}) \geq ... \geq u(x^{i_M}) \geq u(x^{i_1})$$

となるが、ここからすべての $u(x^{i_j})$ は等しいことがわかる。したがって $x^{i_{j+1}} \in f(p^{i_j})$ であり、ワルラス法則から $D_{i_j i_{j+1}} = 0$ を得る。これで (2) が示せた。以上で (I) の証明が終わった。

(II) の証明（１）

次に (II) の証明に移る。まず、(4) を仮定し、対応する λ_i, u_i を取る。$\{i_1, ..., i_M\} \subset \{1, ..., k\}$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} &\lambda_{i_1} D_{i_1 i_2} + \lambda_{i_2} D_{i_2 i_3} + ... + \lambda_{i_M} D_{i_M i_1} \\ &\geq u_{i_2} - u_{i_1} + u_{i_3} - u_{i_2} + ... + u_{i_1} - u_{i_M} = 0 \end{aligned}$$

となるので、(3) が示される。

(II) の証明（２）

次に (3) を仮定し、対応する λ_i を取る。$\{i_1, ..., i_M\} \subset \{1, ..., k\}$ で、かつ任意の $j \in \{1, ..., M\}$ に対して $D_{i_j i_{j+1}} \leq 0$ であるとする。ただし $i_{M+1} = i_1$ とする。このとき (3) から

$$\lambda_{i_1} D_{i_1 i_2} + \lambda_{i_2} D_{i_2 i_3} + ... + \lambda_{i_M} D_{i_M i_1} \geq 0$$

であるため、$\lambda_j > 0$ と合わせると

$$D_{i_1 i_2} = D_{i_2 i_3} = ... = D_{i_M i_1} = 0$$

でなければならず、(2) が示される。以上で (II) の証明が終わった。

(III) の証明の準備（１）

残ったのは (III) の証明であるが、ヴァリアンの証明はアルゴリズムの構築によって D_{ij} から具体的に λ_i, u_i を作る作業になる。これを具体的に（たとえばコンピュータなどで）遂行可能であることをチェックする必要があるため、以降の証明には少し難しい議論が含まれる。
まず最初に、技術的な準備をしなければならない。X は一般の非空集合とする。X^2 の部分集合 R を X 上の**二項関係** (binary relation) と呼ぶ。$(x, y) \in R$ を xRy と略記する。R が**推移性** (transitivity) を満たすとは、xRy, yRz のときには必ず xRz が成り立つことを言う。
X は非空集合、R はその上の二項関係とする。X^2 はそれ自体を二項関係と考えることができるが、これは R を含む推移的な二項関係である。そこで R を含む推移的な二項関係すべての共通部分を R^* と書くと、これは推移的な二項関係であることが簡単に示せる。R^* を R の**推移的閉包** (transitive closure) と呼ぶ。

(III) の証明の準備（2）

以下、X は添字の集合 $\{1, ..., k\}$ として固定する。次の補題が必要である。

補題 1

R は X 上の二項関係で、R^* はその推移的閉包であるとする。このとき、xR^*y であることと、$M \leq k$ となる有限列 $x_1, ..., x_M$ で、$x_1 = x,\ x_M = y$ かつ x_iRx_{i+1} がすべての $i \in \{1, ..., M-1\}$ について成り立つようなものが存在することは同値である。

$M \leq k$ という条件がなければ、この結果は X が一般の無限集合でも成り立つことが知られている。

(III) の証明の準備（３）

補題１の証明のために、補題にあるような有限列 $x_1, ..., x_M$ があるような (x, y) をすべて集めてできた二項関係を $\tilde{R}$ と書こう。このとき、$M \leq k$ という条件はあってもなくても $\tilde{R}$ の定義に変更がないことに注意する：なぜなら、$M > k$ で条件を満たす有限列 $x_1, ..., x_M$ からループしている部分を全部捨てれば、$M \leq k$ であるような有限列が得られるからである。
上の注意から、$\tilde{R}$ は明らかに推移的であることに注意する。したがって $R^* \subset \tilde{R}$ である。
次に、$x\tilde{R}y$ ならば $x_1 = x, x_M = y$ かつ x_iRx_{i+1} が $i \in \{1, ..., M-1\}$ について成り立つ有限列 $x_1, ..., x_M$ が存在する。$R \subset R^*$ なので $x_iR^*x_{i+1}$ であり、よって R^* の推移性から $x_1R^*x_M$ を得るが、これは $\tilde{R} \subset R^*$ を意味する。したがって $\tilde{R} = R^*$ である。これで補題１の証明が完了した。

サブアルゴリズム：順序の決定

以下の議論では xR^*y か否かを判定できないといけない場合が多いので、判定するためのアルゴリズムを作っておく。以下、R は反射性を満たす（つまり xRx は常に成り立つ）とする。アルゴリズムを ℓ 回走らせたときに xR^*z が確定した z の集合を I_ℓ とする。当然ながら $I_0 = \{x\}$ である。

アルゴリズム 1

$\ell \geq 0$ について I_ℓ が定まっているとき、

$$I_{\ell+1} = \{z \in X | \exists w \in I_\ell \text{ s.t. } wRz\}$$

と定義する。$I_\ell = I_{\ell+1}$ になったらアルゴリズムを停止する。

このアルゴリズムは高々k 回で停止する。そして補題 1 から、xR^*y であることと、停止したときの I_ℓ に y が含まれていることは同値であることがわかる。

(III) の証明の準備（４）

さて、以降 (2) が常に成り立っているとし、添字集合 $X = \{1, ..., k\}$ 上の二項順序 $\succsim$ を

$$i \succsim j \Leftrightarrow D_{ij} \leq 0$$

で定義する。さらに、これの推移的閉包を $\succsim^*$ とする。いつものように、

$$i \succ^* j \Leftrightarrow i \succsim^* j \text{ and } j \not\succsim^* i$$

と定義しよう。次の補題が必要になる。

補題 2

$j \succsim^* i$ ならば $D_{ij} \geq 0$ である。

(III) の証明の準備（５）

まず $j \succsim^* i$ であるときには、補題１から有限点列 $i_1, ..., i_M$ で $j = i_1,\ i = i_M$ かつ $i_m \succsim i_{m+1}$ が $m \in \{1, ..., M-1\}$ に対して成り立つようなものが存在する。このとき $D_{i_m i_{m+1}} \le 0$ である。もし $D_{ij} \le 0$ ならば $D_{i_m i_1} \le 0$ ということなので、循環整合性から $D_{i_m i_1} = 0$ を得る。$D_{ij} > 0$ の場合を合わせて補題の結論を得る。

サブアルゴリズム：バブルソート（1）

Y を X の任意の非空部分集合としたときに、$z \succ^* x$ となる $z \in Y$ が存在しない $x \in Y$ を Y の**極大元**と言う。我々にはこの極大元を見つけるアルゴリズムが必要である。

アルゴリズム 2

$Y = \{i_1, ..., i_M\}$ とする。最初に $i_1^* = i_1$ として、m について帰納的に以下のように定義していく。

$$i_{m+1}^* = \begin{cases} i_{m+1} & \text{if } i_{m+1} \succsim^* i_m^*, \\ i_m^* & \text{otherwise.} \end{cases}$$

i_M^* まで決定したら停止する。

この i_M^* が Y の極大元である。これはプログラミングでバブルソートと呼ばれる手法の一種である。

サブアルゴリズム：バブルソート（2）

アルゴリズム2が機能することの証明も背理法による。いま、$i_j \succ^* i_M^*$となるjが存在したとする。まず、アルゴリズムの構成法から、$\ell > m$なら$i_\ell^* \succsim^* i_m^*$であること、特にすべての$\ell$について$i_M^* \succsim^* i_\ell^*$であることに注意する。もし$j > \ell$となる$\ell$について$i_M^* = i_\ell$であれば、$m > \ell$となるすべての$m$について$i_m^* = i_\ell$であり、よって$i_j^* = i_{j-1}^* = i_M^*$であることになるが、これはアルゴリズムの構成法からあり得ない。したがって$i_M^* = i_\ell$となるℓは$\ell \geq j$を満たす。すると

$$i_j \succ^* i_M^* = i_\ell = i_\ell^* \succsim^* i_{j-1}^*$$

なので、$i_j^* = i_j$となるが、$i_M^* \succsim^* i_j^*$なので$i_M^* \succsim^* i_j$であり、矛盾が生ずる。以上で証明が完成した。

アルゴリズム（1）

以上の準備を元に、λ_i, u_i を構成するアルゴリズムの記述を行う。アルゴリズムの記述においては、ℓ 回目の試行の終了時に「まだ λ_i, u_i が求まっていない」i の集合を I_ℓ と書き、また「もう λ_i, u_i が求まった」i の集合を B_ℓ と書く。したがって $I_0 = X$ かつ $B_0 = \emptyset$ である。

アルゴリズム（2）

最初にカウンター $\ell = 0$ をセットしよう。アルゴリズムは以下のように記述される。

1. I_ℓ の極大元をひとつ取り、M_ℓ と置く。
2. $E_\ell = \{j \in I_\ell | j \succsim^* M_\ell\}$ と定義する。
3. $B_\ell = \emptyset$ ならば $u_{M_\ell} = \lambda_{M_\ell} = 1$ と置き、6. へ飛ぶ。そうでなければ 4. に進む。
4. $u_{M_\ell} = \min_{i \in E_\ell} \min_{j \in B_\ell} \{u_j + \lambda_j D_{ji}\}$ と置く。
5. $\lambda_{M_\ell} = \max_{i \in E_\ell} \max_{j \in B_\ell} \max \left\{ \frac{u_j - u_{M_\ell}}{D_{ij}}, 1 \right\}$ と置く。
6. $j \in E_\ell$ に対して $u_j = u_{M_\ell}, \lambda_j = \lambda_{M_\ell}$ と置く。
7. $I_{\ell+1} = I_\ell \setminus E_\ell$ とし、$B_{\ell+1} = B_\ell \cup E_\ell$ と置く。そして $B_{\ell+1} = X$ ならばそこで終了とし、そうでないならばカウンター番号 ℓ をひとつ増やして 1. に戻る。

アルゴリズム（3）

このアルゴリズムでは $I_{\ell+1}$ は I_ℓ よりも常に小さくなるため、もしすべてがうまく機能するのであれば、$\ell < k$ となる ℓ の中にアルゴリズムが停止するものが存在する。したがってアルゴリズムは高々 k 回で停止することに注意する。
問題は 5. で、D_{ij} による割り算が発生していることである。このため、我々はこのアルゴリズムが遂行可能であることを示すために、$i \in E_\ell$ かつ $j \in B_\ell$ ならば $D_{ij} > 0$ であることを証明しなければならない。補題として記述しておこう。

補題 3

ある $\ell \geq 0$ について $i \in E_\ell$ かつ $j \in B_\ell$ ならば $D_{ij} > 0$ である。

アルゴリズム（4）

補題 3 の証明は背理法による。仮に $i \in E_\ell$, $j \in B_\ell$ かつ $D_{ij} \le 0$ であったとする。このとき、$i \succsim^* j$ である。いま $j \in B_\ell$ なので、ℓ より小さな m について $j \in E_m$ だったはずであり、$j \succsim^* M_m$ であったことになる。しかしこのとき $\succsim^*$ の推移性から $i \succsim^* M_m$ であるため、$i \in E_m$ だったことになって、$i \in E_\ell$ に矛盾する。以上で証明が完成した。
よって、アルゴリズムは少なくとも機能して、我々は λ_i と u_i の定義に成功する。最後にチェックするべきは、これが水準整合性の要件を満たすことである。

アルゴリズム（5）

証明は３つの場合に分けよう。１）$i \in B_\ell, j \in E_\ell$ となる ℓ があるとき、２）$i \in E_\ell, j \in B_\ell$ となる ℓ があるとき、そして３）$i, j \in E_\ell$ となる ℓ があるとき、の３つである。
まず１）の場合、

$$u_j - u_i = u_{M_\ell} - u_i \leq u_i + \lambda_i D_{ij} - u_i = \lambda_i D_{ij}$$

となるので、主張は正しい。

アルゴリズム（6）

次に2）の場合、

$$\lambda_i = \lambda_{M_\ell} \geq \frac{u_j - u_i}{D_{ij}}$$

となるので、$D_{ij} > 0$ を両辺にかければ

$$\lambda_i D_{ij} \geq u_j - u_i$$

となって主張は正しい。
最後に3）の場合、補題2から $D_{ij} \geq 0$ であり、また
$u_i = u_j, \lambda_i = \lambda_j$ なので、

$$\lambda_i D_{ij} \geq 0 = u_j - u_i$$

となって主張は正しい。以上で証明が完成した。

残された課題（1）

現状、消費者理論ではこのアフリアット＝ヴァリアンの検定理論が非常に流行しているが、発展の方向性はまだいくつかあるようである。まず第一に、純粋に消費者理論的に、需要関数の性質を調べる方向である。Mas-Colell (1978) は、k 個の購買データから導かれた選好関係 $\succsim_k$ を元にして、データが真の需要関数から導出されていると仮定し、消費集合上で稠密になるようにデータを増やしていったとき、極限として $\succsim_k$ が元の選好関係に（閉収束位相の意味で）収束するかどうかを議論している。が、かなり追加の仮定をうまく入れないと証明が完成しないというので、どうもこのあたりはまだ議論の余地があるように見える。

残された課題（2）

また、アフリアット＝ヴァリアンの理論では構築された効用関数の無差別超曲面は直線部分を含む。この点については、Matzkin and Richter (1991) が、一価な需要関数に対応するように作れるための公理を作っている。さらに Chiappori and Rochet (1987) は微分可能な効用関数に対応できるための公理を作っている。が、関係性が微妙に入り組んでおり、このあたりを整理する仕事はあまりまだ行われていないように見える。
近年では話が進んで、たとえば効用関数が特定の形をしていると仮定した場合の検定の方法や、逆に GARP を満たさない場合に限定合理性その他の方法でモデルを再構築するやり方などが議論されているようである。また、GARP を満たさない場合にどの程度深刻に満たさないかを図る非合理度の定義についても研究が進んでいる。

残された課題（3）

最後に、実は旧来の顕示選好理論自体があまり整理されていないのではないかという懸念を持っている。現代的な顕示選好理論は Chambers and Echenique (2017) にまとめられているが、そこでは Richter (1966) までの古典的な議論は最初の 2 章に押し込まれ、ほとんどがこのアフリアット＝ヴァリアンの検定やその他の検定で占められている。だが、Samuelson (1938) が WARP を定式化した際にやりたかったことは本当に「検定」だったのだろうか？　この点について、一度振り返ってみる必要があるように感じている。

Thank you for your attention.