消費者の選好を観測するための各種手法について

細矢　祐誉

目次

第 1 章　序論 5

第 2 章　準備：いくつかの用語法 9

2.1 選好関係 9

2.2 需要関数 11

2.3 逆需要関数 11

第 3 章　第一の手法：顕示選好理論 13

3.1 選択関数の理論：存在定理 13

3.2 復元可能性問題 17

3.3 弱公理からの選好の導出 22

第 4 章　第二の手法：積分可能性理論 29

4.1 おおまかな流れ 29

4.2 逆需要関数から選好を算出する方法 30

4.3 需要関数から逆需要関数を導くための手法 39

4.4 復元可能性 44

4.5 古典的な問題への適用 46

第 5 章　無限次元動学モデルの積分可能性 51

第 6 章　結論と補遺 61

6.1 滑らかさを落とす 61

6.2 $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ への拡張 62

6.3 RCK モデルの拡張 63

第 7 章　定理 4.1 の証明 65

7.1 補助定理：平面幾何からの結果 65

7.2 (I) の証明 74

7.3 (II) の証明 77
7.4 (III) の証明 81
7.5 (IV) の証明 88
7.6 (V) の証明 89
7.7 (VI) の証明 89
7.8 系 2 の証明 90

第 1 章

序論

需要から選好を逆算するための各種手法については、これまで経済学の中でも広く議論されてきた。主要な論点は、データからの推定が難しい選好関係について、より容易にデータから推定できる需要関数と同レベルまで推定の難易度を下げることができるか否かという点である。もし需要関数から選好関係が算出できるとすれば、それは可能だということになるだろう。この、より容易にデータから選好関係を推定するという目的に鑑みて言えば、選好関係を推定するためのデータの源泉は必ずしも需要関数に限定される必要性はない。むしろ、選好の容易で効率的な逆算のためのデータ源となるものならば、より広い選択肢の中から考えることが積極的に奨励される。本稿はこの種の議論について広汎な分析を加え、いくつかのやり方を提示し、その具体的な意義に言及する。

需要関数から選好関係を推定する方法は大きく分けて 3 つある。第一のものは、いわゆる顕示選好理論 (revealed preference theory) である。いま、p という価格の下で x が選ばれたとしよう。仮に $p \cdot y \le p \cdot x$ であるとすれば、p という価格の下では y を選ぶことができたにも関わらず x が選ばれたのだから、当該消費者は x を y より好むはずである。この考え方に沿って選好を構成する手法は原始的で、ほとんど仮定を置かずに実行することができる。しかし一方で、需要関数がひとつ与えられているとき、そこからこの考え方に沿って具体的に選好関係を逆算することはたいへん難しい[*1]。この点でこの手法は、実計算には向いていない。顕示選好理論の研究は Samuelson (1938) に始まる。本稿では主に Uzawa (1960) や Richter (1966)、Kim and Richter(1986) や Quah (2006) などを参考にした。

第二、第三の手法はともに微積分学に基礎を置いており、積分可能性理論 (integrability theory) の名前が与えられている。アイデアの根幹は、選好が与えられたときにそこから

[*1] たとえば、$f(p,q,m) = (\frac{m}{2p}, \frac{m}{2q})$ といった非常に単純な関数から、上の考え方に基づいて $(1,10)$ と $(3,3)$ のどちらが選好されるかを決定する問題をためしてみるとよい。答えは $(1,10)$ のほうが選好されるのであるが、そこにたどり着くまでにたいへんな手間がかかることが実感できるであろう。

効用関数を構築するための、具体的手法にある。まず、財バスケット v をひとつ固定し、財ベクトル x に対して x と uv が無差別になるような定数 u のことを $u_v(x)$ と書けば、関数 u_v はいくつかの条件の下で選好を表現する効用関数になる。このアイデアを積分可能性理論に適用するならば、要するに「x と y が無差別になる」という情報だけが復元できれば、効用関数まで戻れるということである。このアイデアに基づいて需要関数から効用関数を逆算する手法は、多くの場合逆需要関数を計算途中に使うため、間接法と呼ばれている。間接法の積分可能性理論は Antonelli (1886) に始まり、その後 Pareto (1909) などを経て、Samuelson (1950) や Debreu (1972) などが継承している。

次に、価格 p をひとつ固定したとき、支出関数 $E(p,x)$ の値は、x と無差別な財ベクトルの中で最小の支出で済むような点が、価格 p の下で需要されるときの所得の値である。そこで、x に対して $u_p(x)=E(p,x)$ と定義すれば、関数 u_p はいくつかの条件の下で選好を表現する効用関数になる。こちらのアイデアを積分可能性理論に適用すれば、支出関数が計算できれば効用関数を構築できるだろうという予測が得られる。一方で、支出関数は Shephard の補題と言われる偏微分方程式を満足する唯一の関数であることが知られている。そこで、その偏微分方程式を直接解いて支出関数を導出すれば効用関数が計算できる。この方法は逆需要関数を経由しないため、直接法と呼ばれている。このアイデアは比較的新しく、Hurwicz and Uzawa (1971) が最も古いものと思われる。その後、Richter (1979) によって完成を見た*2。

本稿はこの 3 つのやり方に言及するが、特に第一と第二の手法について新しい結果を導出する。第一の結果については、いわゆる強公理の下で、間接的顕示選好関係 (indirect revealed preference relation) が通常の（たとえば、よく知られた効用関数から導出される）選好に対応する条件について精査する。その後、弱公理の元で同様の条件を満たす選好の構成法を模索する。問題意識は要約すると次のようなものである：いま、需要関数 f からなんらかの選好関係 $\succsim_f$ を算出するやり方を作り、その選好から導かれる需要関数が f と等しくなることが、定理として示されたとしよう。一方で、f が経済学で頻出する類のなんらかの選好関係 $\succsim$ から導出されたとする。さて、$\succsim=\succsim_f$ であろうか？　もしそうでないとすれば、$\succsim_f$ は単に需要として f を持つだけのまったく無関係な選好かもしれない。これでは選好を逆算できたとは到底言えないであろう。そこで、より多くの場合に $\succsim=\succsim_f$ となるような $\succsim_f$ の決め方を求める必要が生ずるのである。

最初の強公理の下での議論については、特に Uzawa (1960) と Richter (1966) を取り上げて議論した。前者は通常の選好から導出された需要関数について、その間接的顕示選好関係が元の選好と一致することを示している。一方で後者は Uzawa (1960) より緩い条

*2 ただ、Richter (1979) は証明を大幅に省略しており、本当に正しい結果なのかについて疑いが残っている。

件の下で、間接的顕示選好関係を含むある順序が所与の需要関数を導出することを示しているのだが、その順序は需要関数が一価であれば必ず線形順序となる。経済学で用いる普通の順序は線形順序ではないから、通常の選好から需要関数を導出してそこから彼のやり方で選好を作ると、まるで違った順序が出てくることになる。この点では、前者のほうが仮定は強いものの、望ましい結果を出している。

次に我々は弱公理の下で同じ議論を行う。弱公理を満たす需要関数について研究した論文は Kim and Richter (1986) と Quah (2006) が有名であるが、両者とも Richter (1966) と同じ問題を抱えている。具体的には、$u(x,y)=xy^2$ という自然な効用関数で定められる順序について、需要関数 $f(p,q,m)=(\frac{m}{3p},\frac{2m}{3q})$ を導出してそこからどちらの論文の方法で選好に戻っても、元の選好と異なる選好が出てきてしまうことがわかる。この問題を解決するために、我々は自然な選好に対応するような新しい選好の作り方について議論する。これらの分析は 3 章で行う。特に弱公理の下での議論は 3.3 節で行うが、これは新しい結果である。

第二の結果については、いわゆる間接法の積分可能性理論について、新しいやり方をひとつ提示する。このやり方は、これまで知られたやり方と違って、解を求めるのに常微分方程式を解くだけの操作しか必要とせず、非常に簡単である。さらに、需要関数の値が一価であることも必要とせず、代わりに逆需要関数がある程度滑らかであることを要求するだけである。この点で、この手法はいままで知られているどんな手法よりも解の計算可能性が高い。加えて、この手法はあまり多くの仮定を必要としない。実のところ、需要関数が二階連続微分可能でいくつかの条件を満たすことに加えて、弱公理を仮定するだけで、選好関係は求まってしまう。この選好関係は弱公理の下で現れるため一般には推移的ではないが、需要関数が強公理を満たせば推移的である。さらに、この選好関係は需要関数に対応するものとして、かなり広い範囲から選んでも一意である——たとえば、同じ需要関数を生み出す選好関係で、推移的で連続なものがあればそれはこの選好関係と必ず一致する。

最も重要な結果は定理 4.1 である。この定理では滑らかな逆需要関数 g から選好 $\succsim^g$ を作るある具体的なやり方について、その選好が元の g ときちんと対応するための条件、選好が推移的になるための条件などを精査している。この構築法は Debreu (1972) と非常に近い議論をしているが、Debreu (1972) よりはるかに容易に選好を計算できる。この定理の最初の概形は細矢 (2009) にあるが、それよりははるかに大きく進展した結果が示されている。選好が推移的になるための条件を確かめる際には Hosoya (2011c) の議論が非常に重要となる。また、それらに付け加えて、定理 4.1 では需要関数が一価になるための十分条件、および選好がホモセティックであるための条件を求め、最後に効用関数が Debreu (1976) の定義した意味で最小凹になるための十分条件を与えている。最後の議論は Hosoya (2011a) で示された結果と本質的に同じである。一方で、Hosoya (2011b) の

議論とは似ているが本質的に異なる部分がある。

次に定理 4.2 では滑らかな逆需要関数が存在するための十分条件について調べている。具体的には、需要関数 f がいくつかの仮定に加えて弱公理を満たしていれば、滑らかな逆需要関数が存在する。これに加えて、その逆需要関数から定理 4.1 のやり方で選好 $\succsim^g$ を計算すると、$\succsim^g$ は f を需要関数として持つ。この二つの結果は共に重要であるが、特に前者は類似の研究がほとんど存在していない結果であり、貴重な情報を与えてくれる。$\succsim^g$ が推移的になるための f の条件を調べた命題 4.2 も重要であり、結果としては強公理がそれに当たることが示されている。

定理 4.3 では、いわゆる復元可能性問題について調べている。いま、f が普通の選好 $\succsim$ から導出されたものだとしよう。このとき $\succsim^g$ がもし $\succsim$ と違っていれば、先ほど 3 章の議論で考えたのと同様、$\succsim^g$ を消費者の自然な選好として考えてよい根拠は大部分崩れてしまう。幸いにも、ほとんどの場合 $\succsim^g=\succsim$ が成り立つことが示され、この問題は回避される。

最後に、これらの結果はある古典的な議論に完全な解答を与える。それは Samuelson (1950) が解決したと主張したある問題であって、Slutsky 行列の階数が $n-1$ で、それが半負値定符号かつ対称であれば、その需要関数は滑らかな効用関数に必ず対応するという予想である。この結果は定理 4.4 としてまとめられている。

これらが 4 章にまとめられている。ただし定理 4.1 の証明はあまりに長いので、7 章に回すことにした。この章の結果のかなりの部分は細矢 (2010) にも書かれているが、特に定理 4.4 はそこに含まれない新しい結果である。

第三の手法、直接法の積分可能性理論は、当論文では言及しない。5 章では、積分可能性理論の新しい展開の可能性を示すひとつの結果を与える。この結果は Ramsey-Cass-Koopmans モデルと言われる最適成長の一モデルについて、いわゆる政策関数と生産関数を所与として効用関数と割引率を計算する手法を与えるものである。通例、時間を通じての最適化モデルは空間の次元が無限になってしまうために技術的に積分可能性理論を適用できないという大きな壁があったが、今回は効用関数が時間について加法分離的であるという性質を利用して、その壁を乗り越えることに成功している。応用の可能性も十分にあり、今後の展開が期待される。この章で述べられた結果はすべて新しい結果である。

2 章は必要な道具の準備である。6 章は結論と、残された課題について簡単に述べる。

第 2 章

準備：いくつかの用語法

2 章から 4 章までを通じて大抵の場合、消費集合 Ω は $\mathbb{R}^n_{++}$ である[*1]と仮定する。$\mathbb{R}^n_{++}$ 以外を扱う場合はその都度注記する。顕示選好理論については $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ であってもだいたいの結果は同様に成り立つが、積分可能性理論ではそうはいかない。これは、$\Omega = \mathbb{R}^n_+$ が多様体でないことから来る根源的な問題である。細矢 (2010) の 5 章にかなり詳しくこの件が論じられているので、興味ある読者は参照されたい。

本稿を通じて、ベクトルの大小について次の記法を定める：

- $x^i \geq y^i$ がどの座標 i でも成り立つとき、$x \geq y$ と書く。
- $x \geq y$ かつ $x \neq y$ であるとき、$x \gneq y$ と書く。
- $x^i > y^i$ がどの座標 i でも成り立つとき、$x \gg y$ と書く。

2.1 選好関係

Ω 上の二項関係 $\succsim \subset \Omega^2$ が選好関係であるとは、それが完備性：

$$\forall (x,y) \in \Omega^2,\ (x,y) \in \succsim \text{ or } (y,x) \in \succsim$$

を満たしていることを指す[*2]。選好関係 $\succsim$ については、以下の記法を多く用いる：

- $(x,y) \in \succsim$ のことを、$x \succsim y$ と表す。
- $(x,y) \in \succsim$ かつ $(y,x) \notin \succsim$ のことを、$x \succ y$ と表す。
- $(x,y) \in \succsim$ かつ $(y,x) \in \succsim$ のことを、$x \sim y$ と表す。

[*1] $\mathbb{R}^n_{++} = \{x \in \mathbb{R}^n | x^i > 0\}$ である。ここで x^i は x の第 i 座標を表す。経済学ではこれと $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x^i \geq 0\}$ は多用される記号である。

[*2] 本稿では選好関係に完備性を常に仮定しているが、これを落とした研究も存在する。Kim and Richter (1986) などを見よ。

また、選好関係 $\succsim$ について、以下の用語法を用いる：$\succsim$ が、

- 推移的であるとは、$x \succsim y$ かつ $y \succsim z$ のときには常に $x \succsim z$ が成り立つことを指す。
- p-推移的であるとは、$x \succsim y$ かつ $y \succsim z$ でありさらに x, y, z が同一平面上に位置するときには常に $x \succsim z$ が成り立つことを指す。
- 上半連続であるとは、集合 $U(x) = \{y \in \Omega | y \succsim x\}$ が常に Ω 上の位相について閉であることを指す。
- 下半連続であるとは、集合 $L(x) = \{y \in \Omega | x \succsim y\}$ が常に Ω 上の位相について閉であることを指す。
- 連続であるとは、$\succsim$ それ自体が Ω^2 上の位相について閉であることを指す。
- 単調であるとは、$x \gg y$ ならば $x \succ y$ であることを指す。
- 強単調であるとは、$x \gneq y$ ならば $x \succ y$ であることを指す。
- 弱凸であるとは、$y \succsim x, z \succsim x$ かつ $t \in [0,1]$ であれば必ず $(1-t)y + tz \succsim x$ であることを指す。
- 強凸であるとは、$y \succsim x, z \succsim x, y \neq z$ かつ $t \in]0,1[$ であれば必ず $(1-t)y + tz \succ x$ であることを指す。
- ホモセティックであるとは、任意の $a > 0$ に対して $x \succsim y \Leftrightarrow ax \succsim ay$ が成り立つことを指す。

さらに一般に、二項関係 $\succ \subset \Omega^2$ について上の言葉や、以下の言葉を使うこともある：$\succ$ が、

- 非反射的であるとは、$(x, x) \notin \succ$ が常に成り立つことを指す。
- 非対称的であるとは、$(x, y) \in \succ$ ならば常に $(y, x) \notin \succ$ であることを指す。
- 否定推移的であるとは、$(x, y) \notin \succ$ かつ $(y, z) \notin \succ$ ならば常に $(x, z) \notin \succ$ であることを指す。

また、選好関係 $\succsim$ に対して、関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ が

$$u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succsim y$$

という条件を満たしているとき、u は $\succsim$ を表現する効用関数である、と呼ぶ。特に $\succsim$ を表現する連続で凹な効用関数が一つでも存在するとき、すべての連続で凹な効用関数 v に対して、ある凹関数 ϕ が存在して $v = \phi \circ u$ となるような連続で凹な効用関数 u が存在することが知られている[*3]。このような u を最小凹な効用関数と呼ぶ。

---

*3 Debreu (1976) を見よ。

2.2 需要関数

（空値を許す）多価写像 $f : \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \twoheadrightarrow \Omega$ が次の二つの性質を満たすとき、f は需要関数であると呼ぶ。

- 正の零次同次性：任意の $a > 0$ に対して、$f(p, m) = f(ap, am)$ である。
- ワルラス法則：任意の $x \in f(p, m)$ に対して、$p \cdot x = m$ が成り立つ。

需要関数 f については、次の用語法を用いる：f が

- 弱公理を満たすとは、任意の $x \in f(p, m), y \in f(q, w)$ について、$p \cdot y \le m$ かつ $q \cdot x \le w$ であれば必ず $x \in f(q, w)$ であることを指す。
- 強公理を満たすとは、任意の有限列 $x_1, ..., x_k$ について、$x_i \in f(p_i, m_i)$ が常に成り立ち、また $p_i \cdot x_{i+1} \le m_i$ がすべての $i = 1, ..., k-1$ について成り立ち、かつ $p_k \cdot x_1 \le m_k$ が成り立つならば必ず $x_1 \in f(p_k, m_k)$ であることを指す。

また、需要関数 f が一価で C^1 級であるとき、その Slutsky 行列 S_f を次のように定める。

$$S_f(p, m) = D_p f(p, m) + D_m f(p, m) f^T(p, m)$$

ここで $D_p f$ は $p = (p^1, ..., p^n)$ についての f の Jacobi 行列、$D_m f$ は m についての f の微分、また f^T は f の転置を指す[*4]。

選好関係 $\succsim$ が一つ与えられたとき、

$$f^{\succsim}(p, m) = \{x \in \Omega | p \cdot x \le m \text{ and } x \succsim y \text{ for all } y \in \Omega \text{ s.t. } p \cdot y \le m\},$$

と定義する。関数 $f^{\succsim}$ は明らかに正の零次同次性を満たす。また $\succsim$ が単調であるとき、$f^{\succsim}$ はワルラス法則を満たし、需要関数としての要件を満たす。こうして与えられた $f^{\succsim}$ を、$\succsim$ の需要関数と呼ぶ。$\succsim$ が u によって表現される場合、f^u と書くこともある。

2.3 逆需要関数

滑らかな一価関数 $g : \Omega \to \mathbb{R}^n_{++}$ は、しばしば逆需要関数と呼ばれることがある。特に、需要関数 f に対して、

$$x \in f(g(x), g(x) \cdot x)$$

が常に成り立っている場合、g は f の逆需要関数である、と言う。さらに $f = f^{\succsim}$ となる $\succsim$ がある場合、g は $\succsim$ の逆需要関数である、とも言う。

[*4] 本稿を通じて、通常の関数 f は列ベクトルであることを常に仮定しておく。

逆需要関数 g については、以下の用語法を定義しておく：g が、

- 条件 (A) を満たすとは、$w \cdot g(x) = 0$ となる任意の $w \in \mathbb{R}^n$ に対して $w^T Dg(x) w \leq 0$ となることを指す。
- 条件 (A') を満たすとは、$w \cdot g(x) = 0$ かつ $w \neq 0$ となる任意の $w \in \mathbb{R}^n$ に対して $w^T Dg(x) w < 0$ となることを指す。
- 条件 (B) を満たすとは、以下の方程式

$$g^i(\partial_j g^k - \partial_k g^j) + g^j(\partial_k g^i - \partial_i g^k) + g^k(\partial_i g^j - \partial_j g^i) = 0,$$

を常に満たすことを指す。ただしここで、$\partial_p g^q$ は g の第 q 座標の第 p 変数による偏導関数を表す。

第 3 章

第一の手法：顕示選好理論

3.1 選択関数の理論：存在定理

顕示選好理論を語る上でまず注意しなければならないのは、この理論はより一般的な、集合から要素を選択する関数についての理論と関連があるということである。いま集合 A は非空とし、$\mathcal{P}(A)$ はそのべき集合、つまり、A の部分集合をすべて集めてできた集合とする。次に $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ として、$c : \mathcal{B} \twoheadrightarrow A$ は非空値で、条件 $c(B) \subset B$ を常に満たすことにしよう。特に A 上の完備かつ推移的な二項関係 $\succsim$ に対して、

$$c^{\succsim}(B) = \{a \in B | a \succsim b \text{ for any } b \in B\}$$

と定義することにしたとき、特定の c に対応する $\succsim$ が存在するための条件、および存在するとしたときにその $\succsim$ を見つける手法を探るという問題が、最も一般的な顕示選好理論の形である。

この形で議論するとき、実は驚くべき結果が存在する。いま、$\mathcal{B}$ が A の二点以下からなる任意の部分集合を含んでいたとしよう。このとき、$c = c^{\succsim}$ となる $\succsim$ は、次のひとつ以外には存在し得ないことが容易にわかる。

$$\succsim = \{(x, y) \in A^2 | x \in c(\{x, y\})\}$$

さらに、次が成り立つ[*1]。

命題 3.1 $\mathcal{B}$ が A の三点以下からなる任意の部分集合を含むとする。すると上の形で定義された $\succsim$ は完備であり、またそれが推移的で、かつ任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して $c(B) = c^{\succsim}(B)$ となるための必要十分条件は、$B \subset B'$ となる任意の $B, B' \in \mathcal{B}$ に対して、仮に $B \cap c(B')$ が空集合でないならば、その集合が $c(B)$ と一致することである。

[*1] Rubinstein (1998) は、これを c が一価で $\mathcal{B} = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ という仮定の下で証明している。また古くは Arrow (1959) が、やはり $\mathcal{B}$ がすべての有限集合を含むという仮定の下で、類似の結果を示している。

証明： 完備性は明らかであろう。$\succsim$ が推移的で任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して $c(B) = c^{\succsim}(B)$ であれば条件を満たすことも容易に示せる。

逆に c が条件を満たすとしよう。まず $\succsim$ が推移的であることを示すために、$x \succsim y$ と $y \succsim z$ が成り立つにもかかわらず、$x \not\succsim z$ であると仮定してみよう。すると $c(\{x,z\}) = \{z\}$ である。よって $x \notin c(\{x,y,z\})$ がわかる。もし $c(\{x,y,z\}) = \{z\}$ であれば、$\{z\} = c(\{y,z\})$ となって $y \succsim z$ に矛盾する。よって $y \in c(\{x,y,z\})$ である。しかしそうすると $\{y\} = c(\{x,y\})$ となって $x \succsim y$ に矛盾する。故にこれはあり得ず、$x \succsim z$ が言える。

次に、$B \in \mathcal{B}$ として $c(B) = c^{\succsim}(B)$ を示そう。仮に $x \in c(B)$ とする。すると任意の $y \in B$ に対して、$c(\{x,y\}) = \{x,y\} \cap c(B)$ なので $x \in c(\{x,y\})$ であり、よって $x \succsim y$ である。故に $x \in c^{\succsim}(B)$ が言えた。逆に $x \in c^{\succsim}(B)$ であるとしよう。$y \in c(B)$ をひとつ取ってくると、$x \in c(\{x,y\}) = \{x,y\} \cap c(B)$ であるから、$x \in c(B)$ が言える。よって $c(B) = c^{\succsim}(B)$ である。以上で証明が完成した。 ■

この命題で示された条件は無関連対象からの独立性 (independent of irrelavant alternatives, i.i.a) と呼ばれ、弱公理より若干弱い条件になっている。このような条件の下では、選好関係 $\succsim$ から $c^{\succsim}$ を作ることも、選択関数 c から選好関係 $\succsim$ に戻ることも容易であるため、どちらで議論しても変わらない。

しかし、この結果は消費者理論へ応用することはできない。なぜなら、通常の需要関数を選択関数の形に表そうとすれば、その定義域である $\mathcal{B}$ は、

$$\{B \subset \Omega | \exists (p,m) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \text{ s.t. } \forall x \in \Omega,\ x \in B \Leftrightarrow p \cdot x \le m\}$$

である。明らかに、この集合はどんな二点集合も含まない。

よって、消費者理論においては、選好関係と選択関数の間には重大な乖離があると考える必要がある。選好関係は需要関数よりも持っている情報量が格段に多く、したがって選好関係から需要関数を得ることは比較的容易にできても、需要関数から選好関係を導出するのには困難が伴う。

さて、それでは需要関数に対応する選好関係としてどのようなものがあるかを見るのだが、まず最初に、どのような条件があればその需要関数を導出する選好関係があるかを見なければならない。すぐにわかるのは、需要関数 f がある推移的な選好関係 $\succsim$ に対して $f = f^{\succsim}$ を満たすならば、f は強公理を満たさなければならない、という事実である。実はこの逆が示されている。

命題 3.2 (Richter (1966)) 選択関数 $c : \mathcal{B} \twoheadrightarrow A$ が非空値であり、次の条件[*2]：

[*2] これも強公理と呼ばれる。f と対照してみれば、これが需要関数のときの強公理に対応する条件であることがわかる。

「$a_1, ..., a_k$ がそれぞれ $a_i \in c(B_i)$ と $a_{i+1} \in B_i$ を満たし、かつ $a_1 \in B_k$ を満たすならば、$a_1 \in c(B_k)$ である。」を満たすとき、またそのときに限り、$\mathcal{B}$ 上で $c = c^{\succsim}$ となるような完備、推移的な A 上の二項関係 $\succsim$ が存在する。

証明： $c = c^{\succsim}$ となる完備、推移的な $\succsim$ が存在すれば、$a_1, ..., a_k$ が所定の条件を満たすときに $a_1 \succsim a_2 \succsim ... \succsim a_k$ となるから、推移性から $a_1 \succsim a_k$ となり、このとき任意の $a \in B_k$ に対して $a_1 \succsim a_k \succsim a$、よって推移性から $a_1 \succsim a$ を得る。故に $a_1 \in c^{\succsim}(B_k) = c(B_k)$ となり、条件が確かに成り立っていることがわかった。

逆に c が条件を満たすとしよう。まず、

$$\sim_* = \{(a, b) \in A^2 | \exists B \text{ s.t. } a, b \in c(B)\},$$

$$\sim_+ = \{(a, b) \in A^2 | \exists a_1, ..., a_k \in A \text{ s.t. } a_1 = a,\ a_k = b \text{ and } a_i \sim_* a_{i+1}\},$$

としよう。この同値関係による商集合 $A/\sim_+$ を作る。つまり、

$$A/\sim_+ = \{B \subset A | \exists a \in B \text{ and } \forall b \in A, b \in B \Leftrightarrow b \sim_+ a\},$$

と定義するのである。次に、

$$\succ_* = \{(C, D) \in (A/\sim_+)^2 | \exists c \in C, d \in D, B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } c \in c(B) \text{ and } d \in B \setminus c(B)\},$$

とし、

$$\succ_+ = \{(C, D) \in (A/\sim_+)^2 | \exists C_1, ..., C_k \in A/\sim_+ \text{ s.t. } C_1 = C,\ C_k = D \text{ and } C_i \succ_* C_{i+1}\},$$

とする。すると $\succ_+$ は推移的かつ非反射的な $A/\sim_+$ 上の二項関係である。そこでこれを含む、すべての推移的かつ非反射的な $A/\sim_+$ 上の二項関係の集合を考え、集合としての包含関係で順序付けを行う。この半順序集合に Zorn の補題を用いて、極大元 $\succ^m$ を取ってくる。そして、

$$\succsim^m = \{(a, b) \in A^2 | [a] \succ^m [b] \text{ or } [a] = [b]\},$$

と定義する。なお、$[a] = \{b \in A | a \sim_+ b\}$ である。

この $\succsim^m$ について、これが完備で推移的であることをまず示そう。推移性は容易にわかるので省略する。完備でないと仮定し、$a \not\succsim^m b$ かつ $b \not\succsim^m a$ であるとしよう。仮定から $[a] \neq [b]$ である。そこで、

$$\succ = \succ^m \cup \{(C, D) \in (A/\sim_+)^2 | C \succ^m [a] \text{ or } C = [a], \text{ and } [b] \succ^m D \text{ or } D = [b]\},$$

と定義しよう。$\succ$ が推移的かつ非反射的な $A/\sim_+$ 上の二項関係であることはすぐにわかるが、これに加えて $\succ^m \subsetneq \succ$ である。これは $\succ^m$ の極大性に反し、矛盾。これで示せた。

次に、$c(B) = c^{\succsim^m}(B)$ であることを示そう。まず、$a \in c(B)$ であるとする。$b \in B \backslash c(B)$ であるとすれば、$[a] \succ^m [b]$ なので、$a \succsim^m b$ である。一方、$b \in c(B)$ であるとすれば、$[a] = [b]$ なので、やはり $a \succsim^m b$ である。これで $a \in c^{\succsim^m}(B)$ が言えた。逆に $a \in c^{\succsim^m}(B)$ であるとしよう。もし $a \notin c(B)$ であるとすれば、$b \in c(B)$ に対して $[b] \succ^m [a]$ であり、よって $b \succ^m a$ であるがこれは矛盾である。よってこのようなことはあり得ず、$a \in c(B)$ が成り立つ。以上で証明が完成した。 ■

この定理は存在という点については非常に申し分なく、完全な必要十分条件を与えてくれる。この系として、次がわかる[*3]。

系 1 非空値[*4]な需要関数 f に対して、推移的な選好関係 $\succsim$ で $f = f^{\succsim}$ となるものが存在するための必要十分条件は、f が強公理を満たすことである。

しかし、存在はわかっても、上で構築された順序はあまり素性のよい選好関係であるとは言えない。そもそも Zorn の補題を使っている以上、$\succsim^m$ の具体的な形状についてわかることはほとんどない[*5]のだが、断片的にわかる情報だけでも大きな問題を含んでいる。たとえば、f が一価関数であるとき、上で構築した $\succsim^m$ は、$x \sim^m y \Leftrightarrow x = y$ という条件を満たすことになる。つまり、$\succsim^m$ はいわゆる線形順序であることになる。言うまでもなく、たとえば $u(x, y) = xy$ などの普通の効用関数で表現される選好関係は線形順序にはならない。いまの例で言えば、$(1, 2) \sim (2, 1)$ になるが $(1, 2) \neq (2, 1)$ である。つまり、普通の選好関係から出発して需要関数を作り、そこからこのやり方で選好関係に戻ったときに、元の選好関係に戻っていない。これは、単に偶然 $f = f^{\succsim^m}$ であるだけで、$\succsim^m$ は f を需要関数として持つ消費者の選好としては考えるべきではないということを示唆している。

---

*3 Mas-Colell, Whinston, and Green (1995) の命題 3.J.1 は一価な需要関数についてこの系を示している。この証明には Zorn の補題が使われている。

*4 上の命題を適用するに当たって、非空値性を仮定することは不可欠である。たとえば、なんでもいいから有限集合に対して空集合を返す選択関数 c を持ってくれば、これは先の条件を満たしているか否かに関わらず絶対に推移的な $\succsim$ には対応しない。

*5 Richter (1966) のオリジナルの証明では Zorn の補題ではなく Bool 代数の極大イデアルの存在定理が用いられている。一般に、Zermelo-Fraenkel のよく知られた公理的集合論の体系からは Zorn の補題も極大イデアルの存在定理も出てこず、Zorn の補題は選択公理と同値であり、また極大イデアルの存在定理は選択公理より弱い公理となることが知られている。したがって Richter の証明はここで書いた証明より弱い集合論の公理系から証明されたものであると言える。しかし、Zorn の補題も極大イデアルの存在定理も共に論理式で書けないなんらかの集合の存在命題であり、結果として出てきたものがなんであるかわからない、という点で弱点を持つ。この観点ではふたつの証明法は大差ない。

3.2 復元可能性問題

そこで、問題となるのは上のような現象が起こらないような選好関係の構築法である。それを考える上で、以下では需要関数の値域が Ω 全体になるという、いわゆる全射性の仮定を置く。これを置かなければいけない理由は、次のように考えれば明らかであろう。いま、財ベクトル x がどのような価格 (p,m) の元でも需要されなかったとする。さて、財ベクトル x は、なんらかの理由（たとえば宗教上禁止されている、など）によって極度に忌避されていたから需要されなかったのか、それとも、x のまわりにあるものがたまたま、x よりほんの少しだけ常によかったから需要されなかっただけなのだろうか？　これを確かめる術はどこにもない。より切実には、消費集合 $\Omega=\mathbb{R}^2_+$ のときに現れる次の需要関数、

$$f(p,m)=(\frac{m}{p^1},0)$$

を考えるとわかる。たとえば、

$$u(x,y)=x,$$

$$v(x,y)=\begin{cases}x & (y=0)\\ -1 & (\text{otherwise})\end{cases},$$

$$\succsim_\ell=\{((x,y),(z,w))\in(\mathbb{R}^2_+)^2|x>z\text{ or, }x=z\text{ and }y\ge w\},$$

と定義すれば $f=f^u=f^v=f^{\succsim_\ell}$ となるが、明らかに u で定義される選好関係も v で定義される選好関係も $\succsim_\ell$ もまったく違う選好関係である。この 3 つを識別することは、需要関数からではできない。このような例が生まれてしまうのは、f の値域が $\{(x,0)|x>0\}$ 上にしかないことに起因する。実際、この半直線上に制限すれば u や v で表される選好関係や $\succsim_\ell$ はすべて同じ選好関係になる。

そこで全射性を仮定し、また一価性も当面仮定しておこう。次の定理は Uzawa (1960) による。

定理 3.1 (Uzawa (1960)) f は全射な一価関数で強公理を満たし、さらに次の条件：「任意の $p\in\mathbb{R}^n_{++}$ に対してある定数 $\varepsilon>0$ と $L>0$ が存在して、$\|q-p\|<\varepsilon$ であるような q と任意の $m_1,m_2>0$ に対して、いつでも $\|f(q,m_1)-f(q,m_2)\|<L|m_1-m_2|$ となる。」が成り立っているとする[*6]。このとき、

$$x\succ_* y\Leftrightarrow x\neq y,\ x=f(p,m)\text{ and }p\cdot y\le m,$$

[*6] Uzawa (1960) ではこれを、正の所得に関する Lipschitz 条件と呼んでいる。なお、同論文のこの条件は正確には m_1,m_2 が基準点 m からあまり離れていない点で成り立っていればよいとあるのだが、証明の (26) 式を見る限り正しくないと思えたので書き改めた。

$$x \succ_+ y \Leftrightarrow \exists x_1,...,x_k \text{ s.t. } x_1 = x, x_k = y \text{ and } x_i \succ_* x_{i+1},$$

と定義し、$\succsim = \{(x,y) \in \Omega^2 | (y,x) \notin \succ_+\}$ とすれば、$\succsim$ は推移的、強単調、強凸、上半連続な選好関係であり、$f = f^{\succsim}$ が成り立つ。さらに $\succsim$ は同種の選好関係の中でこの需要関数に対応する唯一のものである。

証明： $\succ_+$ が推移的であることは定義から自明である[*7]。また、強公理を適用すれば $\succ_+$ が非対称的であることもわかる。よって $\succsim$ は完備である。また $x \succ_+ y$ と $x \succ y$ は同値であることもここから示せる。$x \gneq y$ とし、$x = f(p,m)$ となる (p,m) を取ってくれば、$p \cdot y < m$ であるから $x \succ_* y$ である。よって $x \succ y$ を得る。故に $\succsim$ は強単調である。

次に上半連続性を示そう。このためには、集合 $\tilde{L}(x) = \{y \in \Omega | x \succ y\}$ が常に開であればよい。そこで実際に $x \succ y$ としよう。すると $x \succ_+ y$ であるから、ある点列 $x_1,...,x_k$ をうまく取ると、$x_1 = x$、$x_k = y$ で、$x_i \neq x_{i+1}$ が常に成り立ち、$x_i = f(p_i, m_i)$ かつ $p_i \cdot x_{i+1} \le m_i$ であるようなものが存在することになる。ここで、$i = 1,...,k-1$ に対しては $y_i = x_i$ とし、$y_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$ としよう。$y_k = f(q,w)$ となる q と w を取ってくれば、弱公理から $q \cdot x_{k-1} > w$ となるため、$q \cdot a x_k < w$ となる定数 $a > 1$ が存在する。すると $\tilde{L}(x)$ は y の開近傍である $\{z \in \Omega | ay \gg z\}$ を含む。よって $\tilde{L}(x)$ は開であり、上半連続性が示せた。

残ったのは $\succsim$ の推移性と強凸性であるが、強凸性のほうを先に示す。最初に $p, q \in \mathbb{R}^n_{++}$ に対して、

$$\rho_1^{p,q}(m) = \sup\{w > 0 | f(p,m) \succ_+ f(q,w)\},$$

$$\rho_2^{p,q}(m) = \inf\{w > 0 | f(q,w) \succ_+ f(p,m)\},$$

と定義しておく。この関数が well-defined であることの証明は容易であるから省略する。このとき、所与の仮定の元で次が示せる。

$$\rho_1^{p,q}(m) = \rho_2^{p,q}(m).$$

これを示すために、まず定義から

$$\rho_2^{p,q}(m) \ge \rho_1^{p,q}(m),$$

であることに注意する。実際、仮にこれが成り立たないとすれば、m_1, m_2 を $\rho_2^{p,q}(m) < m_1 < m_2 < \rho_1^{p,q}(m)$ を満たすという条件の下でうまく取ると、

$$f(p,m) \succ_+ f(q,m_2) \succ_+ f(q,m_1) \succ_+ f(p,m),$$

となって、$f(p,m) \succ_+ f(p,m)$ となり $\succ_+$ の非対称性に矛盾してしまう。

[*7] $\succsim$ が、ではない。これは後で示す。

次にいくつか記号を定義する。まず、

$$p(t) = (1-t)p + tq,$$

と定義し、次に $i \leq k$ という条件を満たす列 x_{ik} と m_{ik} を、

$$m_{0k} = m,$$

$$x_{ik} = f(p(\frac{i}{k}), m_{ik}),$$

$$m_{i+1,k} = p(\frac{i+1}{k}) \cdot x_i$$

と定義する。次に、

$$w_{0k} = m$$

とし、w_{ik} が定まっているとき、$w_{i+1,k}$ を次の方程式、

$$w_{ik} = p(\frac{i}{k}) \cdot f(p(\frac{i+1}{k}), w)$$

の解のひとつとして取る。先に仮定した条件から f は所得について連続なので、この方程式の解が存在することは中間値の定理から容易に示せる。そして $y_{ik} = f(p(\frac{i}{k}), w_{ik})$ と定義する。

定義から、$x_{ik} \succ_+ f(p,m)$ であるか $x_{ik} = f(p,m)$ のどちらかが成り立つ。また、$f(p,m) \succ_+ y_{ik}$ であるか $y_{ik} = f(p,m)$ のどちらかが成り立つ。どちらの場合でも、

$$w_{kk} \leq \rho_1^{p,q}(m) \leq \rho_2^{p,q}(m) \leq m_{kk},$$

が成り立つことがわかる。そこで証明の目標は、

$$\lim_{k \to \infty} (m_{kk} - w_{kk}) = 0,$$

である。

これを示すために、

$$m_{i+1,k} - m_{ik} = \frac{1}{k}(q-p)x_{ik},$$

$$w_{i+1,k} - w_{ik} = \frac{1}{k}(q-p)y_{i+1,k},$$

であることに注意する。ここで

$$\Delta_{ik} = m_{ik} - w_{ik},$$

という記号を作ると、

$$\Delta_{i+1,k} - \Delta_{i,k} = \frac{1}{k}(q-p)(x_{ik} - y_{i+1,k}),$$

である。これを $i=0$ から $j-1$ まで足し合わせれば、

$$\Delta_{jk} = \frac{1}{k}(q-p)\cdot[(f(p,m)-y_{jk})+\sum_{i=1}^{j-1}(x_{ik}-y_{ik})]$$

がわかる。ところで、強公理から、

$$p(\frac{j}{k})\cdot f(p,m) \geq p(\frac{j}{k})\cdot y_{jk},$$

がわかっている。ここで $\bar{p} = (\max\{p^1,q^1\},...,\max\{p^n,q^n\})$ とし、また同様に $\hat{p} = (\min\{p^1,q^1\},...,\min\{p^n,q^n\})$ とすれば、$\bar{p}\cdot f(p,m) \geq p(\frac{j}{k})\cdot f(p,m)$ かつ $p(\frac{j}{k})\cdot y_{jk} \geq \hat{p}\cdot y_{jk}$ であるから、

$$y_{jk} \in \{y \in \mathbb{R}^n_+ | \hat{p}\cdot y \leq \bar{p}\cdot f(p,m)\} \equiv C,$$

が成り立つ。この右辺の集合 C がコンパクトであることに注意し、

$$A = \max_{y\in C} |(q-p)\cdot(f(p,m)-y)|$$

と定義しよう。

さて、仮定から任意の $p(t)$ に対して、ある定数 L が存在して、十分小さく $\varepsilon > 0$ を取れば $\|q-p(t)\| < \varepsilon$ である限り $\|f(q,m_1)-f(q,m_2)\| \leq L|m_1-m_2|$ とできる。このような L として N 以下の値が取れるような t の集合を X_N と書けば、(X_N) は $[0,1]$ の開被覆であり、よって有限部分被覆 $\{X_{N_1},...,X_{N_\ell}\}$ が存在する。そこで $N_1,...,N_\ell$ の中で最大のものを K と置けば、

$$\|x_{jk}-y_{jk}\| \leq K|m_{jk}-w_{jk}|,$$

である。よって $B = K\|q-p\|$ と置けば、

$$\Delta_{jk} \leq \frac{1}{k}(A + B\sum_{i=1}^{j-1}\Delta_{ik}),$$

がわかる。よって帰納的に、

$$\Delta_{jk} \leq \frac{A}{k}(1+\frac{B}{k})^{j-1},$$

が示せた。特に、

$$\Delta_{kk} \leq \frac{A}{k}(1+\frac{B}{k})^{k-1},$$

となるが、

$$\lim_{k\to\infty}(1+\frac{B}{k})^{k-1} = e^B,$$

であるため、

$$\lim_{k\to\infty}\Delta_{kk} = 0,$$

が示せた。これで $\rho_1^{p,q}(m)=\rho_2^{p,q}(m)$ の証明が終わったことになる。

これを利用して強凸性を示そう。まず、$y\succsim x$ および $x\neq y$ を仮定し、$t\in]0,1[$ として、$z=(1-t)x+ty$ としよう。$x=f(p,m),y=f(q,w),z=f(r,v)$ とする。z の定義から、$r\cdot x\le v$ か $r\cdot y<v$ のいずれかが成り立つ。$r\cdot x\le v$ ならば $z\succ_* x$ なので $z\succ x$ である。$r\cdot y<v$ の場合、f の所得に関する連続性から十分小さな任意の $\varepsilon>0$ に対して $z\succ_* f(q,w+\varepsilon)$ となる。一方で、$y\succsim x$ なので $w\ge\rho_1^{p,q}(m)=\rho_2^{p,q}(m)$ であり、よって $\varepsilon>0$ をうまく取れば $f(q,w+\varepsilon)\succ_+ x$ となる。$\succ_+$ の推移性から $z\succ_+ x$ となり、よって $z\succ x$ である。これで強凸性が示せた。

最後に推移性であるが、これは $\succ_+$ の否定推移性を示せばよい。このために、仮にそうでなかったとし、$x\not\succ_+ y$ かつ $y\not\succ_+ z$ であるにも関わらず $x\succ_+ z$ であったと仮定してみよう。このとき上半連続性から、$t>0$ を十分小さく取れば、$x\succ_+(1-t)z+ty$ となる。一方で強凸性から $(1-t)z+ty\succ_+ y$ であり、推移性から $x\succ_+ y$ を得るが当初の仮定に矛盾である。これで示せた。

次に、$f=f^{\succsim}$ を示そう。まず、$x=f(p,m)$ とする。このとき、$p\cdot y\le m$ ならば $x=y$ か $x\succ y$ のどちらかであるため、$x=f^{\succsim}(p,m)$ であることがわかる。逆も明らかであろう[*8]。

最後に、$\succsim'$ を推移的、強単調、強凸、上半連続な選好関係で $f=f^{\succsim'}$ を満たすとしよう。もし $x\succ y$ であれば、$x\succ_+ y$ であることから、ある $x_1,...,x_k$ について $x_1=x,x_k=y$ かつ $x_i\succ_* x_{i+1}$ が常に成り立つ。$x_i\succ_* x_{i+1}$ であることから $x_i=f(p_i,m_i)$ かつ $p_i\cdot x_{i+1}\le m_i$ となる (p_i,m_i) が存在し、また $x_i\neq x_{i+1}$ であるから、$x_i\succ' x_{i+1}$ である。よって $\succsim'$ の推移性から $x\succ' y$ が言える。逆に $x\not\succ y$ であるとしよう。このとき、$x=f(p,m),y=f(q,w)$ となる $(p,m),(q,w)$ を取ってこよう。すると $w\ge\rho_1^{p,q}(m)=\rho_2^{p,q}(m)$ なので、$\varepsilon_n\downarrow 0$ かつ $f(q,w+\varepsilon_n)\succ x$ となる ε_n が存在する。そこで $y_n=f(q,w+\varepsilon_n)$ とすれば $y_n\succ x$ なので $y_n\succ' x$ である。$y_n\to y$ なので、$\succsim'$ の上半連続性から $y\succsim' x$ がわかる。よって $x\not\succ' y$ である。以上で証明が完成した。 ■

この定理によれば、いわゆる普通の選好 $\succsim$ から導出された需要関数については、$\succ_+$ が強順序 $\succ$ と必ず一致する。よって、$\succ_+$ を求めることは需要関数に対応する選好関係を求める上でひとつの方法として有益でありそうである。

ただし、$\succ_+$ を具体的に求めるのはそう簡単ではないということに注意しておきたい。たとえば $f(p,m)=(\frac{m}{2p^1},\frac{m}{2p^2})$ が与えられているとして、$(1,10)$ と $(3,3)$ の間に $\succ_+$ でどのような順序が与えられているか計算してみるとよい。この需要関数が効用関数 $u(x,y)=xy$ に対応していることを知っていれば $(1,10)\succ_+(3,3)$ であることは上の定理

[*8] ここで本質的に f の非空値性を用いている。$f(p,m)$ が空集合であるとこのロジックをそのまま使うことはできない。

からわかる。しかし、我々が興味を持っているのは、そのような情報がないときの $\succ_+$ の復元法なのである。

3.3 弱公理からの選好の導出

ところで、上の定理は強公理を前提としている。一方で、弱公理のみを満たし、強公理を満たすかどうかわからない需要関数について、それを（推移的とは限らない）選好関係と結びつける研究が、少なからず存在する。たとえば Kim and Richter (1986) や、Quah (2006) がそれである。

まず Kim and Richter (1986) のほうから見てみよう。まず、$x \in f(p,m)$ かつ $p \cdot y \le m$ となるときに $x \succsim_V y$ と書き、さらに $x \neq y$ も成り立つ場合にはそれを $x \succsim_S y$ と書く。そして、

$$W(x,y) = \{w \in [x,y] | w \succsim_S x \text{ and } w \succsim_S y\}$$

と定義し、

$$x \succsim y \Leftrightarrow x \succsim_V y \text{ or } [x \not\succsim_V y, y \not\succsim_V x \text{ and } d(x, W(x,y)) \le d(y, W(x,y))],$$

とする。ここで d は通常の集合との距離である。こうして生まれた $\succsim$ が需要関数に対応するというのがこの論文の主張である。

しかしこの $\succsim$ は問題を持っている。いま、$u(x,y) = xy^2$ という選好を持ってきてみよう。すると $(1,2)$ と $(4,1)$ は無差別である。このとき $W((1,2),(4,1)) = \{(\frac{7}{3}, \frac{14}{9})\}$ であるのだが、そうすると $(1,2) \succ (4,1)$ となってしまう。よって $\succsim$ は、u と異なる順序を与えていることになる。

次に Quah (2006) のほうについて見てみよう。いま、$x \in \Omega$ に対して

$$Q(x) = \{p \in \mathbb{R}^n_{++} | p \cdot x = 1 \text{ and } x = f(p,1)\},$$

と定義しよう。そして、

$$S(x,y) = \min_{p \in Q(x)} p \cdot y - \max_{q \in Q(y)} q \cdot x,$$

と定義する。そして、

$$x \succsim y \Leftrightarrow x \in \mathrm{co}\{z \in \Omega | \exists w \text{ s.t. } z \ge w \text{ and } S(y,w) \le 0\},$$

と定義する。この選好が元の需要関数と対応するというのだが、しかしやはり、この選好には問題がある。いま、$u(x,y) = xy^2$ という簡単な効用関数から出発して、需要関数 $f(p,m) = (\frac{m}{3p^1}, \frac{2m}{3p^2})$ を導出したとしよう。ここから容易に、$Q(x,y) = \{(\frac{1}{3x}, \frac{2}{3y})\}$ を得る。すると、

$$S((1,2),(2a,a)) = a - \frac{3}{2a} = \frac{2a^2 - 3}{2a},$$

となる。よって $a=\sqrt{1.5}$ のときに $(1,2)\sim(2a,a)$ となるが、もちろん $u(1,2)\neq u(2a,a)$ である。つまり、最初の選好とこの選好は異なっている。

これらの結果は、どちらの $\succsim$ についても f に対応する選好と考えてよいか否かについて重大な疑義を抱かせる。たしかに $f=f^{\succsim}$ であるかもしれないが、それは偶然に過ぎず、消費者の選好としてこの $\succsim$ を仮定することには問題があるように見えるのである。そこで、もう少し自然な選好関係の導出はできないかという疑問が生ずる。

答えは、次の形で解決できるというものである。まず、

$$\succ^*=\{(x,y)\in\Omega^2|\exists(p,m)\in\mathbb{R}^n_{++}\times\mathbb{R}_{++}\text{ s.t. }x\in f(p,m),\ y\notin f(p,m)\text{ and }p\cdot y\le m\},$$

$$\succsim^*=\{(x,y)\in\Omega^2|\exists(p,m)\in\mathbb{R}^n_{++}\times\mathbb{R}_{++}\text{ s.t. }x\in f(p,m)\text{ and }p\cdot y\le m\},$$

$$\begin{aligned}\succ^+=\{(x,y)\in\Omega^2|\exists x_1,...,x_k\text{ s.t. }x_1=x,\ x_k=y,\forall i\in\{1,...,k-1\},x_i\succsim^* x_{i+1},\\ \exists i\in\{1,...,k-1\}\text{ s.t. }x_i\succ^* x_{i+1},\text{ and }\dim(\text{span}\{x_1,...,x_k\})\le 2\},\end{aligned}$$

$$\succsim^+=\{(x,y)\in\Omega^2|(y,x)\notin\succ^+\},$$

と定義する。$\succ^+$ と $\succ_+$ との違いは、f が一価である場合には単に $\dim(\text{span}\{x_1,...,x_k\})\le 2$ という条件が加わっただけである。条件が加わったので $\succ^+\subset\succ_+$ であるが、実は以下で見るように、強公理を満たすよりほんの少しだけ強い仮定の下で、$\succ^+=\succ_+$ となる。

さて、我々の定理の正確な主張を述べよう。この定理は完全に新しい結果である。

定理 3.2 f は全射な需要関数で弱公理を満たすものとする。このとき、

(I) $\succ^+$ は非対称的であり、よって $\succsim^+$ は選好関係である。また、$f(p,m)\subset f^{\succsim^+}(p,m)$ が常に成り立ち、$f(p,m)$ が非空であれば $f(p,m)=f^{\succsim^+}(p,m)$ が成り立つ。

(II) もしある C^1 級の実数値関数 u について $Du\gg 0$ かつ $f=f^u$ であるとすれば、$\succsim^+$ は u によって表現される。

(III) f が C^2 級の一価関数で強公理を満たし、さらに f の Slutsky 行列の階数が常に $n-1$ であったとすれば、$\succsim^+$ は推移的、連続、強単調であり、さらに上半連続かつ p-推移的な選好 $\succsim$ で $f=f^{\succsim}$ となるものは $\succsim^+$ のみである。

証明： (I) の証明から行おう。まず、$\dim(\text{span}\{x_1,...,x_k\})\le 2$ であり、$x_i\in f(p_i,m_i)$ かつ $p_i\cdot x_{i+1}\le m_i$ となる (p_i,m_i) があるとする。このとき $p_k\cdot x_1\le m_k$ であるならば、$x_1\in f(p_k,m_k)$ であることを示す[*9]。

[*9] $n=2$ のときに Rose (1958) は弱公理から強公理が出ることを示した。この証明はその一般化である。

証明は k についての帰納法による。$k=2$ のときは、主張は弱公理そのものであるから、成り立つ。したがって $k-1$ までですべて成り立つと仮定し、k のときも成り立つことを示せばよい。

まず、$x_1,...,x_k$ がすべて同一直線上にいるときには、議論は非常に簡単である。その場合、ワルラス法則から

$$p_i \cdot x_{i+1} \le m_i = p_i \cdot x_i$$

であるから、$x_i \ge x_{i+1}$ が常に成り立つことがわかる。よって $x_1 \ge x_k$ なので主張は当然成り立つ。

そこで、今度は $\dim(\mathrm{span}\{x_1,...,x_k\}) = 2$ である場合を考える。この平面 $\mathrm{span}\{x_1,...,x_k\}$ のことを V と書き、P_V を $\mathbb{R}^n$ から V への正射影としよう。正射影の定義から、$P_V p_i \cdot x_j = p_i \cdot x_j$ が常に成り立つことに注意する。そこで次に、$q_i = \frac{1}{p_i \cdot x_1} P_V p_i$ と定義する。$q_1,...,q_k$ はすべて $\{p \in V | p \cdot x_1 = 1\}$ という直線上に位置しているため、任意の i,j,ℓ に対して $q_i \in [q_j, q_\ell]$ か $q_j \in [q_i, q_\ell]$ か $q_\ell \in [q_i, q_j]$ のいずれかが成り立つ。

以下、場合分けをしよう。

場合１：$q_1 \in [q_{k-1}, q_k]$ の場合。

この場合、$t \in [0,1]$ に対して $q_1 = (1-t)q_{k-1} + tq_k$ として、

$$\begin{aligned} q_1(x_1 - x_k) &= q_1(x_1 - x_2) + q_1(x_2 - x_k) \\ &= q_1(x_1 - x_2) + (1-t)q_{k-1}(x_2 - x_k) + tq_k(x_2 - x_k) \\ &= q_1(x_1 - x_2) + (1-t)q_{k-1}(x_2 - x_{k-1}) \\ &\quad + (1-t)q_{k-1}(x_{k-1} - x_k) + tq_k(x_2 - x_k) \end{aligned}$$

となる。しかし帰納法の仮定から、最後の式はすべて非負でなければいけない。故に

$$m_1 = p_1 \cdot x_1 \ge p_1 \cdot x_k$$

となり、弱公理から $x_1 \in f(p_k, m_k)$ でなければならない。

場合２：$q_{k-1} \in [q_1, q_k]$ の場合。

この場合、$t \in [0,1]$ に対して $q_{k-1} = (1-t)q_1 + tq_k$ として、

$$\begin{aligned} (1-t)q_1(x_1 - x_k) + tq_k(x_1 - x_k) &= q_{k-1}(x_1 - x_k) \\ &= q_{k-1}(x_1 - x_{k-1}) + q_{k-1}(x_{k-1} - x_k) \ge 0 \end{aligned}$$

であることがわかる。最初の式の第二項は 0 以下であるから、第一項は 0 以上でなければならない。$t < 1$ であればここから $m_1 = p_1 \cdot x_1 \ge p_1 \cdot x_k$ であるから、弱公理より $x_1 \in f(p_k, m_k)$ でなければならない。$t = 1$ のときは $q_k(x_1 - x_k) = 0$ なので、

$q_{k-1}(x_1 - x_{k-1}) = 0$ でなければならず、よって帰納法の仮定から $x_1 \in f(p_{k-1}, m_{k-1})$ である。故に弱公理からやはり $x_1 \in f(p_k, m_k)$ を得る。

場合 3：それ以外。この場合、q_k は $q_1, ..., q_k$ の端にはないため、$q_k \in [q_i, q_{i+1}]$ となるような $i \le k-2$ がなければならない。すると、$t \in [0,1]$ に対して $q_k = (1-t)q_i + tq_{i+1}$ として、

$$\begin{aligned}
0 \ge q_k(x_1 - x_k) &= q_k(x_1 - x_{i+1}) + q_k(x_{i+1} - x_k) \\
&= (1-t)q_i(x_1 - x_{i+1}) + tq_{i+1}(x_1 - x_{i+1}) + q_k(x_{i+1} - x_k) \\
&= (1-t)q_i(x_1 - x_i) + (1-t)q_i(x_i - x_{i+1}) \\
&\quad + tq_{i+1}(x_1 - x_{i+1}) + q_k(x_{i+1} - x_k) \ge 0
\end{aligned}$$

とならねばならない。したがって左辺も、そして右辺の各項もすべて 0 でなければならない。

もし $t > 0$ ならば $p_{i+1} \cdot x_1 = p_{i+1} \cdot x_{i+1} = m_{i+1}$ であり、帰納法の仮定によって $x_1 \in f(p_{i+1}, m_{i+1})$ であることがわかる。そこで同じく帰納法の仮定を $x_1, x_{i+2}, ..., x_k$ という列に適用すれば $x_1 \in f(p_k, m_k)$ が知れる。一方、$t = 0$ ならば $q_k = q_i$ だが、$i = 1$ ならば $q_1 \cdot x_1 = q_k \cdot x_1 = q_k \cdot x_k = q_1 \cdot x_k$ なので、$p_1 \cdot x_k = m_k$ となって、ここから弱公理によって $x_1 \in f(p_k, m_k)$ がわかる。$i > 1$ ならば $q_i \cdot x_1 = q_i \cdot x_i$ から $x_1 \in f(p_i, m_i)$ がわかり、したがって $x_1, x_{i+1}, ..., x_k$ に帰納法の仮定を適用して $x_1 \in f(p_k, m_k)$ を得る。これで示せた。ここから容易に $\succ^+$ の非対称性を示すことができる。

したがって $\succsim^+$ は完備である。いま、$x \in f(p,m)$ であるとすれば、$p \cdot y \le m$ となる任意の y に対して $y \in f(p,m)$ か $x \succ^+ y$ のどちらかが成り立つ。$\succ^+$ の非反射性から、前者は $x \sim^+ y$ を意味することがわかる。よってどちらにしても $x \succsim^+ y$ であり、故に $x \in f^{\succsim^+}(p,m)$ が言える。よって $f(p,m) \subset f^{\succsim^+}(p,m)$ である。次に $f(p,m) \neq \emptyset$ を仮定し、$x \in f(p,m)$ をひとつ取る。すると $y \in f^{\succsim^+}(p,m)$ であれば $y \succsim^+ x$ であり、よって $x \not\succ^+ y$ であるから、$y \in f(p,m)$ でなければならない。故に $f^{\succsim^+}(p,m) \subset f(p,m)$ である。合わせて $f(p,m) = f^{\succsim^+}(p,m)$ を得る。

(II) の証明のためには、まず $g(x) = Du(x)$ として連続な逆需要関数 g を取ってくる。与えられた x と v に対して、もし x と v が同一直線上にあるなら $u(x) \ge u(v) \Leftrightarrow x \ge v \Leftrightarrow x \succsim^+ v$ である。そうでない場合を考えよう。$x \succ^+ v$ ならば $u(x) > u(v)$ なのは明白である。逆に $u(x) > u(v)$ を仮定しよう。ここで、

$$\begin{array}{lcl}
\dot{y} & = & (g(y) \cdot x)v - (g(y) \cdot v)x \\
y(0) & = & x
\end{array} \tag{3.1}$$

という微分方程式の延長不能な解 $y(t; x, v)$ を考えると、$u(y(t; x, v))$ を t で微分すると常に 0 になることがわかる。したがって $y(t; x, v)$ の軌道は関数 u の無差別超曲面と

span$\{x,v\}$ の共通部分に含まれるのだが、簡単な推論によってこのふたつの集合は一致することが確認できる[*10]。したがって、$y(t^*)=cv$ となる定数 c,t^* が存在する[*11]。$u(cv)=u(x)>u(v)$ なのだから $c>1$ である。

次に、$h>0$ をひとつ固定し、

$$y_0=x,\ y_t=y_{t-1}+h[(g(y_{t-1})\cdot x)v-(g(y_{t-1})\cdot v)x]$$

として点列 (y_t) を定義する。これは微分方程式 (1) の Euler 近似と言われる点列で、十分 h が小さければ y_t は $y(ht)$ に漸近する。一方で、$g(y_t)\cdot y_t=g(y_t)\cdot y_{t+1}$ なので、$y_t\succsim^* y_{t+1}$ が常に成り立っていることに注意しよう。そこで特に $h=\frac{t^*}{N}$ を N を十分大きく取って、y_N の値が十分に $y(t^*)$ に近いようにすれば、$y_N\gg v$ となる。よって $y_N\succ^* v$ であり、故に $x\succ^+ v$ である。よって $\succ^+$ は u の与える強い順序 $\succ$ と一致することがわかった。したがって当然、$\succsim^+$ は u の与える弱い順序と一致する。これで (II) が示せた。

(III) については[*12]、まず f が定理 4.2 の適用条件を満たしていることに注意する。したがって C^2 級の逆需要関数 g が存在して $f=f^{\succsim^g}$ となる。さらに $v\in\Omega$ をひとつ取れば、定理 4.1 と命題 4.2 から $\succsim^g$ は u_v^g という C^2 級の効用関数で表現される。$Du_v^g\gg 0$ なので、(II) から $\succsim^g=\succsim^+$ を得る。残りの主張は定理 4.1 と定理 4.3 からすべてわかる。
■

ひとつ注意しなければならないのが、(II) である。ここでは C^1 級の u に対して必ず $\succsim^+$ がその選好を復元するということが示されている。では、C^1 級という条件を連続まで弱めることは可能であろうか？　という疑問が自然に生じる。答えは、否である。それどころか、$\succsim^+$ にどんな構築法を使ってもそのような弱い条件の下でこの主張を示すことは不可能である。

なぜそんなことが言えるかというと、Mas-Colell (1977) が構築したある例が存在するからである。彼は、同じ需要関数を持つ、推移的、連続、強単調、凸な選好関係が複数あるような例を示した。このような選好関係は必ず連続な効用関数を持つことが知られているので、同じ需要関数を持つ連続な効用関数が複数存在する例があるということになる。

[*10] もし一致しないならば、y の軌道のうち $t\ge 0$ の部分か $t\le 0$ の部分のどちらかは Ω 内のコンパクト集合の内部に含まれることになる。たとえば $t\ge 0$ の部分がそうであるとしよう。y は延長不能だから、y の定義域は $]a,+\infty[$ の形でなければならない（ポントリャーギン (1968) を見よ。）。一方で $w=(v\cdot x)v-(v\cdot v)x$ と定義すると、補題 7.1 の f) から $w\cdot[(g(z)\cdot x)v-(g(z)\cdot v)x]$ は常に正の値を取る z の連続関数で、したがってコンパクト集合内で最小値を持つ。したがって $w\cdot y(t;x,v)$ は t が増大していくにつれていくらでも大きな値を取ることになるが、これは y の軌道のコンパクト性に矛盾してしまう。

[*11] 定数 $t^*>0$ であることは容易に示せる。実際、$w\cdot y(t;x,v)$ は t について増加的で、$t=0$ のとき負であり、また v 方向への直線を横切るときに 0 になるからである。

[*12] ４章の結果を大量に使うので、気になる読者は先に４章を読んでおくとよい。

この状況下でなんらかの構築法、たとえば $\succsim^+$ による復元を試みても、$\succsim^+$ は少なくとも片方の効用関数と異なる選好を持つことになり、うまく復元できない u が存在することになる。

Mas-Colell (1977) は局所 Lipschitz な効用関数をひとつでも持つ選好に対してはこのような問題が起こらないことを示しているので、もしかすると (II) の条件は局所 Lipschitz まで弱めることができるかもしれない。しかしそれは今後の課題である。

第 4 章

第二の手法：積分可能性理論

この章では、主として積分可能性理論についての定理を導出することを目的としている。主要な結果は細矢 (2010) で導出されているが、中には新しい結果も含まれている。特に、定理 4.4 は前掲書にはないまったく新しい結果である。

ひとつだけ注意がある。この章のはじめの定理である定理 4.1 はあまりに証明が長く、そのまま本文中に書くと非常に読みにくくなる。よってこの定理と、その直後にある系 2 の証明だけは 7 章に回すことにした。証明が気になる読者は適宜 7 章を参照されたい。

この章でも引き続き、$\Omega = \mathbb{R}^n_{++}$ を仮定して議論している。通常の消費者理論では $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ が採用されることが多いので、このような場合に限定して議論を展開するのは不自然に見えるかもしれない。また、重要な応用例のひとつである準線形効用の場合について、この章の議論ではきちんとカバーできない。それにも関わらずこの限定をあえて行う理由は、そうしないと不可能な場合が存在するからである。これについては細矢 (2010) の第 5 章を参照されたい。

4.1　おおまかな流れ

まず、この章で扱う定理や命題の関係について解説しておいたほうがよいだろう。この章ではいわゆる間接法の積分可能性問題についてひとつの解決策を与えることを目標としている。したがってメインの定理は、逆需要関数から選好関係を導くための定理になる。定理 4.1 はこれを扱っている。次に、需要関数から逆需要関数を導出する方法、および存在定理について言及しなければならない。この部分は過去の関連研究ではほとんど扱われていない箇所であり、重要である。主要な結果は定理 4.2 としてまとめられているが、そのほかにも強公理と関連する主張を与える命題 4.2 は重要である。これらをつなげることによって、需要関数から選好関係を導く方法は完成する。しかしまだひとつ、やらねばならない作業が残っている。いま、需要関数から選好関係を導き出す、別の手法があった

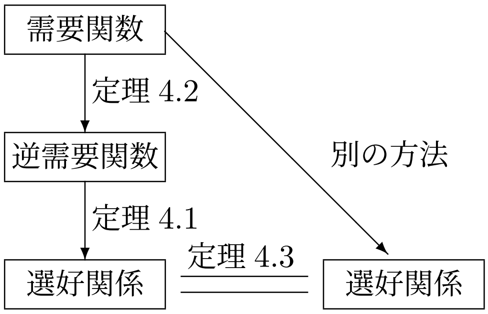

図 4.1　本章で行う議論の概要

としよう。もし、そこで現れる選好関係が我々が計算した選好関係と異なるのであれば、困ったことが起こる。つまり、どちらの手法で計算した結果を信用すればよいかわからなくなるのである。これを防ぐためには、ほとんどの計算手法では我々が計算した選好関係と同じ選好関係が計算されるということを示さなければならない。この事実は定理 4.3 によって解決される。

図 1 は、この章で紹介する主要な定理について、その関係を図示したものである。

4.2　逆需要関数から選好を算出する方法

この節では、逆需要関数から選好を導くための手法を扱う。

逆需要関数 $g:\Omega\to\mathbb{R}^n_{++}$ を考える。この g を用いて、次の関数 $u^g:\Omega^2\to\mathbb{R}$ と $\succsim^g$ を以下のやり方で定義しよう。まず、次の初期値問題を考える。

$$\begin{array}{rcl}\dot{y}(t) & = & (g(y(t))\cdot x)v-(g(y(t))\cdot v)x\\ y(0) & = & x\end{array}\qquad(4.1)$$

$y(\cdot;x,v)$ は上の問題の延長不能な解であるとする。もし $\dim(\mathrm{span}\{x,v\})=1$ であるならば、$t(x,v)=0$ と定義する。そうでないならば、$t(x,v)$ は $\dim(\mathrm{span}\{y(t;x,v),v\})=1$ となるようなただひとつの t として定義する。そうして、$y(t(x,v);x,v)=uv$ となる正の数 u を $u^g(x,v)$ と書くことにし、また

$$x\succsim^g v\Leftrightarrow u^g(x,v)\ge 1$$

と定義する。

この $\succsim^g$ の計算法を感覚的に理解するためには、以下のように考えればよい。まず、基準となる財バスケット $v\in\Omega$ をひとつ選ぶ。上の微分方程式を見れば、任意の $x\in\Omega$ に対して、$\dot{y}(t;x,v)$ は常に $y(t;x,v)$ における価格ベクトル $g(y(t;x,v))$ と直交していることがわかる。したがって $y(\cdot;x,v)$ の軌道は予算超平面と常に接している。故にそれは無

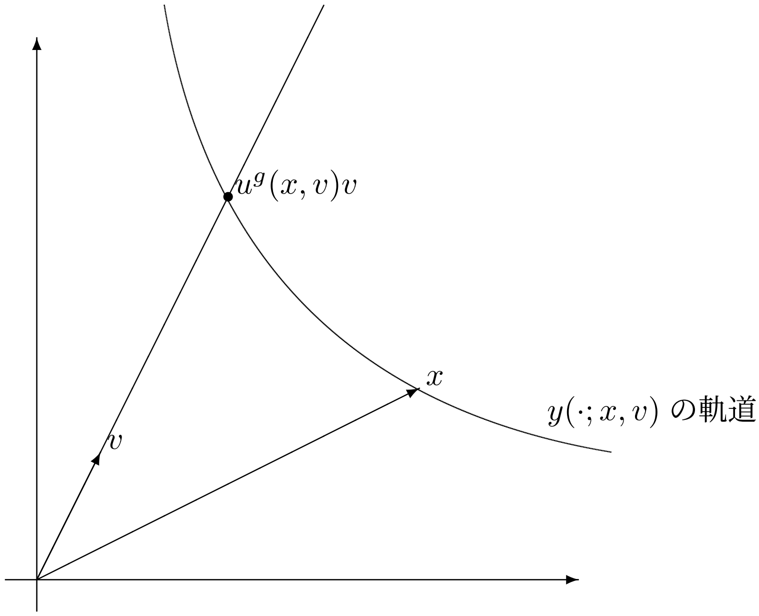

図 4.2　計算手法の図示

差別曲線であると解釈される。u^g の定義から x と $u^g(x,v)v$ は共に $y(\cdot;x,v)$ の軌道に含まれており、従って我々は x と $u^g(x,v)v$ が無差別であると推測することができる。よって、$u^g(x,v)$ は v という財バスケットをいくつ持てば x と同じくらいよくなるかということを表す指数であり、それが 1 より大きいということは $u^g(x,v)v$ が v よりも大きいということであるから、それと無差別な x も v よりよいと考えてよいであろう。図 2 はこの説明を絵で表したものである。

ただし、上の定義の中で、ひとつだけきちんと定義できているのかが不明な点がある。それは、$t(x,v)$ の存在と一意性である。x と v が一次独立であったとき、$\dim(\mathrm{span}\{y(t;x,v),v\})=1$ となるような t が果たして存在するのか、またそれはひとつしかないのかどうかは、未だ明らかではない。それらは現段階では予想に過ぎず、きちんと証明されなければならない。次の定理はこの問題を解決し、また $\succsim^g$ と g の間の様々な関係を明らかにする。特に (IV) から (VI) までは新しい結果である。

定理 4.1 $\ell\ge 1$ とし、また $g:\Omega\to\mathbb{R}^n_{++}$ は C^ℓ 級であるとする。すると、

(I) $u^g,\succsim^g$ は well-defined である[*1]。さらに、$\succsim^g$ は連続、強単調、p-推移的な選好であり、u^g は Ω^2 上で連続で、さらに集合 $\{(x,v)\in\Omega^2|\forall c>0,x\ne cv\}$ 上で C^ℓ 級である。

[*1] つまり、$t(x,v)$ についての上の予想は正しい、という意味。

(II) $\ell \geq 2$ のとき、以下の 3 条件はすべて同値である：

(1) g は条件 (A) を満たす。

(2) g は $\succsim^g$ の逆需要関数である。

(3) $x \sim^g v$ であれば任意の $t \in [0,1]$ に対して $(1-t)x+tv \succsim^g x$ が成り立つ*2。

(III) $v \in \Omega$ とし、$u_v^g(x) = u^g(x,v)$ と定義する。このとき、以下の 4 条件はすべて同値である：

(1) g は条件 (B) を満たす。

(2) $\succsim^g$ は推移的である。

(3) u_v^g は C^ℓ 級で、$Du_v^g(x) = \lambda g(x)$ を満たす関数 $\lambda : \Omega \to \mathbb{R}_{++}$ が存在する。

(4) u_v^g は $\succsim^g$ を表現する効用関数である。

(IV) g が条件 (A') を満たしていれば、$f^{\succsim^g}$ は一価で弱公理を満たす。

(V) 以下の 2 条件は同値である：

(1) 任意の $a > 0$ に対して、$g(x) = c_a(x)g(ax)$ となる数 $c_a(x)$ が存在する。

(2) $\succsim^g$ はホモセティックである。

(VI) (III) と (V) の両方の条件が成り立っているならば、u_v^g は一次同次であり、従って $\succsim^g$ の最小凹な効用関数である。

この定理はいくつもの大きな主張を含む。以下に詳しく説明しよう。

(I) は、前に予告した通り $t(x,v)$ がきちんと定義されたものであることを主張しているが、それに加えて $\succsim^g$ が持ついくつかの性質を明示している。読み落としてはならないのは、$\succsim^g$ が選好であるというそれ自体が持つ主張である。つまり、$\succsim^g$ は完備であり、$u^g(x,v) < 1$ ならば必ず $u^g(v,x) \geq 1$ でなければならない。また、$\succsim^g$ は p-推移的でもある。これらは共に、同一平面上の無差別曲線が互いに交わらないという性質から導かれる。また、$\succsim^g$ の連続性は u^g の連続性から導くことができる。強い単調性はこれらとはまた別の幾何学的な議論によって示される。

(II) は、我々の計算した $\succsim^g$ が g ときちんと対応したものになっているための必要十分条件が条件 (A) であるということを主張している。この主張は我々の計算が成功していることを保証するものであり、この定理で最も重要な項目である。さらにこれらはいわゆる無差別曲線の原点に対する凸性と同値である。

(III) は、我々の計算した $\succsim^g$ が推移的であるための必要十分条件を条件 (B) として求めている他、滑らかな効用関数の計算の仕方まで提示している。滑らかな効用関数の存在は比較静学分析に欠かせないので、後者の事実はとても重要である。

(IV) は後に紹介する定理 4.2 の部分的な逆である。定理 4.2 は f が弱公理を満たして

*2 この主張は、無差別曲線の軌道は常に原点に対して凸である、という意味として解釈できる。

いるときに g が条件 (A) を満たすと主張しているが、逆に条件 (A) だけでは弱公理が成り立つかどうかは判然としない。弱公理を示すためには条件 (A') が必要である。このギャップがなぜ発生しているかについては謎が残っており、今後の課題である。

(V) は $\succsim^g$ がホモセティックな選好関係となる必要十分条件を与えている。Hosoya (2011a) で、ホモセティックな選好関係の下では一次同次な効用関数が必ず存在し、それは最小凹であることが証明されている。(VI) の証明はこの結果の証明とほぼ同一である。一方で、Hosoya (2011b) では選好関係が準線形と言われる条件を満たすとき、$u(x)+y$ という形の関数が最小凹であることが示されているのだが、この定理は定理 4.1 と相性が悪い。これは v として $(0,...,0,1)$ のようなベクトルを取らなければ u^g_v がこの形にならないためである。すでに書いてあるように $v\in\Omega$ は通例仮定されなければならないので、定理 4.1 からこの種の最小凹関数を出すことは難しい。

ひとつ追加しておきたいのは、t^* のもうひとつの定義方法である。いま、$w=(v\cdot x)v-(v\cdot v)x$ と定義しよう。すると $w\cdot x<0$ であり、$w\cdot v=0$、さらに $w\cdot y(t;x,v)$ は t について増加的である。したがって、

$$t^*(x,v)=\min\{t\ge 0|w\cdot y(t;x,v)\ge 0\},$$

ということがわかる。これは $y(t^*;x,v)$ を近似する際にとても有用である。たとえば (y_t) が $y(t;x,v)$ のなんらかの差分近似列であったとし、t^* が $w\cdot y_t\ge 0$ となる最初の t であるとすれば、y_{t^*} は $y(t^*;x,v)$ を近似する。

具体的な近似列の構築法としては、Euler 法が非常に適している。これは、$y_t\succsim^g y_{t+1}$ が常に成り立つため、打ち切り誤差は常にネガティブになるという性質があり、誤差の傾向を推定するのに適している。さらに、y_{t+1} を計算するために $g(y_t)$ だけの情報でよいというのも魅力的である。後に定理 4.2 で述べるように、g は解析的に求まらない場合は近似計算で求める必要があり、手間がかかる。よって、$g(y)$ の計算回数が少ない近似計算メソッドのほうが、コーディングも楽だし、誤差も少なくて済む。

コンピュータで計算する際のコーディングの例として、python2.6.2 での例を挙げておこう。例では $g(x^1,x^2,x^3)=(\frac{1}{x^1},\frac{1}{x^2},\frac{1}{x^3})$ を用いた。$v=(1,1,1)$ と設定すれば、$u^g_v(x)=(x^1x^2x^3)^{\frac{1}{3}}$ が理論値である。ここでは $x=(2,1,4)$ に対して計算しているので、理論値は 2 である。また Euler 法による差分近似の時間刻みは 0.000001 を採用している。

なお、実計算の際には、微分方程式の形をもう少し扱いやすくする方法がある。

系 2 $g:\Omega\to\mathbb{R}^n_{++}$ は C^2 級であり、$\sigma:\Omega^3\to\mathbb{R}$ は変数 y に関して C^1 級で、$\dim(\mathrm{span}\{x,v\})=2$ のときは必ず $\sigma(y,x,v)\neq 0$ であるとする。ここで次の初期値問題：

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \sigma(y(t),x,v)[(g(y(t))\cdot x)v-(g(y(t))\cdot v)x],\\ y(0) &= x,\end{aligned}\tag{4.2}$$

```
x = [2.0, 1.0, 4.0]
v = [1.0, 1.0, 1.0]
dt = 0.000001

w = []
i=0
while i<3:
    w.append((x[0]*v[0]+x[1]*v[1]+x[2]*v[2])*v[i]-(v[0]*v[0]+v[1]*v[1]+v[2]*v[2])*x[i])
    i=i+1

y = []
i=0
while i<3:
    y.append(x[i])
    i=i+1

while y[0]*w[0]+y[1]*w[1]+y[2]*w[2]<0:
    i=0
    while i<3:
        y[i] = y[i]+((x[0]/y[0]+x[1]/y[1]+x[2]/y[2])*v[i]-(v[0]/y[0]+v[1]/y[1]+v[2]/y[2])*x[i])*dt
        i=i+1

print y[0] / v[0]
```

図 4.3　コーディングの例

を考える。$y^*(\cdot;x,v)$ を上の問題の延長不能な解とすると、$\dim(\mathrm{span}\{x,v\})=2$ となるような任意の x,v に対して、$\dim(\mathrm{span}\{y(t;x,v),v\})=1$ となる t がただひとつだけ存在する。それを $t^*(x,v)$ と書くことにし、また $\dim(\mathrm{span}\{x,v\})=1$ のときには $t^*(x,v)=0$ と定義すると、任意の $x,v\in\Omega$ に対して

$$y^*(t^*(x,v);x,v)=u^g(x,v)v,$$

が成り立つ。

上の系はふたつの意味で有用である。まず一つ目には、(4.1) の微分方程式を (4.2) の微分方程式に書き換えても $u^g(x,v)$ の値が計算できるということである。これを用いると、方程式系がより計算しやすくなるようにうまく σ を選択して、ずっと簡単に計算が実行できるようになる。この系の威力は実計算例を見ると明らかになるであろう。

もう一つの有用性は理論的な内容にある。いま、σ としてたまたま x にも v にも依存しない関数を取ったとし、それを $\sigma(y)$ と書こう。すると上の微分方程式の右辺は

$$(\sigma(y)g(y)\cdot x)v-(\sigma(y)g(y)\cdot v)x,$$

となるが、これは逆需要関数 g の正規化の仕方を σg に変えるという操作に対応する。すると系 1 は、逆需要関数の正規化の仕方を変えても、計算される選好の値に差は出ない、という事実を含意していることになる。

一般に、需要関数はゼロ次同次である。したがって逆需要関数の正規化の仕方を変えても、それは同じ需要関数に対応する逆需要関数である。故に、正規化の変換によって計算

できる選好が変わらないという事実は計算手法には当然求められる性質であり、重要である。

では、使い方をいくつか例示しよう。

例 1 (Cobb=Douglas 型) 効用関数 $u(x) = (x^1)^\alpha (x^2)^{1-\alpha}$（ただし $\alpha \in]0,1[$）からは需要関数

$$x^1 = \alpha \frac{m}{p^1},\ x^2 = (1-\alpha)\frac{m}{p^2}$$

が導かれる。ここでは我々は、逆にこの需要関数から出発して上の効用関数を逆算してみよう。

まず、逆需要関数を計算する。このためには上の式に $m = p^1x^1 + p^2x^2$ を代入し、さらに $p^2 = 1$ と置くことで

$$p^1 = \frac{\alpha x^2}{(1-\alpha)x^1}$$

を得る。そこで、後は

$$\begin{aligned} g^1(x) &= \frac{\alpha x^2}{(1-\alpha)x^1} \\ g^2(x) &= 1 \end{aligned}$$

と置けば、これが逆需要関数のひとつになっている。

次に $v = (1,1)$ とし、u_v^g を計算してみよう。$x = (c,c)$ ならば明らかに $u_v^g(x) = c = c^\alpha c^{1-\alpha}$ であるから、$x^1 \neq x^2$ というケースだけを考える。そこで次に無差別曲線 y を計算しよう。このために我々は系 2 を用いる。まず、

$$\begin{aligned} \dot{y}^1(t) &= \sigma(y(t),x)g^2(y(t))(x^2 - x^1) \\ \dot{y}^2(t) &= \sigma(y(t),x)g^1(y(t))(x^1 - x^2) \\ y^1(0) &= x^1,\ y^2(0) = x^2 \end{aligned}$$

を考える。系 2 によれば、上の方程式を解きやすいように σ を定めて解いてやれば、それが無差別曲線になる。そこで今回は $\sigma(y,x) = (1-\alpha)y^1(x^2 - x^1)^{-1}$ と置いてみよう。すると上の方程式は極めて単純に、

$$\begin{aligned} \dot{y}^1(t) &= (1-\alpha)y^1(t) \\ \dot{y}^2(t) &= -\alpha y^2(t) \\ y^1(0) &= x^1,\ y^2(0) = x^2 \end{aligned}$$

と変形できる。

この方程式を解くためには、たとえば最初の式であれば両辺を $y^1(t)$ で割れば、

$$\frac{\dot{y}^1(t)}{y^1(t)} = (1-\alpha)$$

となる。そこで両辺を 0 から t まで積分すれば、

$$\log y^1(t) - \log y^1(0) = \int_0^t \frac{\dot{y}^1(\tau)}{y^1(\tau)} d\tau = \int_0^t (1-\alpha) d\tau = (1-\alpha)t$$

を得る。したがってこれを解けば、

$$y^1(t) = \exp(\log x^1 + (1-\alpha)t)$$

がわかる。同様にして

$$y^2(t) = \exp(\log x^2 - \alpha t)$$

も計算できる。

最後に、y の軌道と直線 $\{cv|c \in \mathbb{R}\}$ の交点を計算してみよう。$y^1(t) = y^2(t)$ を解けば、

$$t = (\log x^2 - \log x^1)$$

を得る。そこでこれを y^1 に代入すれば、

$$u_v^g(x) = y^1(t) = \exp(\alpha \log x^1 + (1-\alpha)\log x^2) = (x^1)^\alpha (x^2)^{1-\alpha}$$

となった。これで計算が終わる。

例 2 (CES 型) $u(x) = (\alpha(x^1)^\rho + (1-\alpha)(x^2)^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ という効用関数（ただし $\rho < 1, \rho \neq 0$ かつ $\alpha \in]0,1[$）からは需要関数、

$$x^1 = \frac{\alpha^{\frac{1}{1-\rho}}(p^1)^{\frac{-1}{1-\rho}} m}{\alpha^{\frac{1}{1-\rho}}(p^1)^{\frac{-\rho}{1-\rho}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\rho}}(p^2)^{\frac{-\rho}{1-\rho}}},\ x^2 = \frac{(1-\alpha)^{\frac{1}{1-\rho}}(p^2)^{\frac{-1}{1-\rho}} m}{\alpha^{\frac{1}{1-\rho}}(p^1)^{\frac{-\rho}{1-\rho}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\rho}}(p^2)^{\frac{-\rho}{1-\rho}}}$$

が導かれる。今度は、ここから効用関数を逆算する手法を紹介する。

まず逆需要関数を計算しよう。まず最初の式に p^1 を掛ければ、

$$p^1 x^1 = \frac{\alpha^{\frac{1}{1-\rho}}(p^1)^{\frac{-\rho}{1-\rho}} m}{\alpha^{\frac{1}{1-\rho}}(p^1)^{\frac{-\rho}{1-\rho}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\rho}}(p^2)^{\frac{-\rho}{1-\rho}}}$$

となる。両辺に $-p^1x^1 = p^2x^2 - m$ を加えると、

$$0 = \frac{\alpha^{\frac{1}{1-\rho}}(p^1)^{\frac{-\rho}{1-\rho}} p^2 x^2 - (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\rho}}(p^2)^{\frac{-\rho}{1-\rho}} p^1 x^1}{\alpha^{\frac{1}{1-\rho}}(p^1)^{\frac{-\rho}{1-\rho}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\rho}}(p^2)^{\frac{-\rho}{1-\rho}}}$$

となる。したがってこの右辺の分子は 0 になる。そこで $p^2 = 1$ を代入してやれば、

$$\alpha^{\frac{1}{1-\rho}}(p^1)^{\frac{-\rho}{1-\rho}} x^2 = (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\rho}} p^1 x^1$$

がわかる。この式を p^1 について整理してやれば、

$$(p^1)^{\frac{-1}{1-\rho}} = \frac{(1-\alpha)^{\frac{1}{1-\rho}}x^1}{\alpha^{\frac{1}{1-\rho}}x^2},$$

となるので、

$$p^1 = \frac{\alpha(x^2)^{1-\rho}}{(1-\alpha)(x^1)^{1-\rho}}$$

という結論が出る。そこで

$$\begin{aligned} g^1(x) &= \frac{\alpha(x^2)^{1-\rho}}{(1-\alpha)(x^1)^{1-\rho}} \\ g^2(x) &= 1 \end{aligned}$$

と置けば、これが逆需要関数のひとつになっている。

さて、$v = (1,1)$ とし、u_v^g を計算しよう。これも $x = (c,c)$ という形ならば明らかに $u_v^g(x) = c = (\alpha c^\rho + (1-\alpha)c^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ であるから、$x^1 \neq x^2$ のケースだけを考える。

ふたたび系 2 を使うことを考えれば、今度考えなければならない式は以下の通りである。

$$\begin{aligned} \dot{y}^1(t) &= \sigma(y(t),x)g^2(y(t))(x^2 - x^1) \\ \dot{y}^2(t) &= \sigma(y(t),x)g^1(y(t))(x^1 - x^2) \\ y^1(0) &= x^1,\ y^2(0) = x^2 \end{aligned}$$

これが解きやすいように σ を決め、求めればよい。今回は $\sigma(y,x) = (x^2 - x^1)^{-1}(1-\alpha)(y^1)^{1-\rho}$ としよう。すると、

$$\begin{aligned} \dot{y}^1(t) &= (1-\alpha)(y^1(t))^{1-\rho} \\ \dot{y}^2(t) &= -\alpha(y^2(t))^{1-\rho} \\ y^1(0) &= x^1,\ y^2(0) = x^2 \end{aligned}$$

これを解くためには、たとえば y^1 のほうであれば両辺を $(y^1(t))^{1-\rho}$ で割って、

$$\dot{y}^1(t)(y^1(t))^{\rho-1} = 1-\alpha$$

とする。これを 0 から t まで積分すれば、

$$(1-\alpha)t = \int_0^t (1-\alpha)d\tau = \int_0^t (y^1(\tau))^{\rho-1}\dot{y}^1(\tau)d\tau = \frac{1}{\rho}((y^1(t))^\rho - (y^1(0))^\rho)$$

を得るので、ここから

$$y^1(t) = [(x^1)^\rho + \rho(1-\alpha)t]^{\frac{1}{\rho}}$$

を得る。同様にして、

$$y^2(t) = [(x^2)^\rho - \rho\alpha t]^{\frac{1}{\rho}}$$

がわかる。

後はこの y の軌道と直線 $\{cv|c\in\mathbb{R}\}$ の交点を求めればよい。まず $y^1(t)=y^2(t)$ となる t を求めれば、

$$t=\frac{(x^2)^\rho-(x^1)^\rho}{\rho},$$

がわかる。そこでこれを y^1 に代入すれば、

$$u_v^g(x)=y^1(t)=[\alpha(x^1)^\rho+(1-\alpha)(x^2)^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$$

となった。これで計算が終わる。

例 3（線形効用） $u(x)=\alpha x^1+(1-\alpha)x^2$ という効用関数（ただし $\alpha\in]0,1[$）からは需要関数、

$$f(p,m)=\begin{cases}\{x\in\Omega|p\cdot x=m\} & (\text{if } p=c(\alpha,1-\alpha) \text{ for some } c\in\mathbb{R}_{++})\\ \emptyset & (\text{otherwise})\end{cases}$$

が導かれる。今度はこの需要関数から効用関数を逆算してみたい。

逆需要関数 $g(x)\equiv(\alpha,1-\alpha)$ は容易に求まる。

次に $v=(1,1)$ とし、u_v^g を計算しよう。$x=(c,c)$ であれば $u_v^g(x)=c=\alpha c+(1-\alpha)c$ なので、$x^1\neq x^2$ の場合に議論の焦点を絞る。

また系 2 により、無差別曲線を求める。今回解かなければいけないのは、

$$\begin{aligned}\dot{y}^1(t)&=\sigma(y(t),x)g_2(y(t))(x^2-x^1)\\ \dot{y}^2(t)&=\sigma(y(t),x)g_1(y(t))(x^1-x^2)\\ y^1(0)&=x^1,\ y^2(0)=x^2\end{aligned}$$

である。今回は $\sigma(y,x)\equiv(x^2-x^1)^{-1}$ として解いてみよう。すると解くべきは、

$$\begin{aligned}\dot{y}^1(t)&=(1-\alpha)\\ \dot{y}^2(t)&=-\alpha\\ y^1(0)&=x^1,\ y^2(0)=x^2\end{aligned}$$

となる。この微分方程式の解は明らかに $y^1(t)=x^1+(1-\alpha)t,\ y^2(t)=x^2-\alpha t$ である。そこでこの y の軌道と直線 $\{cv|c\in\mathbb{R}\}$ の交点を求めよう。まず $y^1(t)=y^2(t)$ となる t を求めれば、それは x^2-x^1 であることがわかる。そこでこれを y^1 に代入すれば、

$$u_v^g(x)=y^1(t)=\alpha x^1+(1-\alpha)x^2,$$

となった。これで計算が終わる。

4.3 需要関数から逆需要関数を導くための手法

この節では需要関数と逆需要関数の関係を扱う。

定理 4.1 では、我々は Ω 全体で定義された滑らかな逆需要関数から出発した。需要関数から出発したとき、このような逆需要関数が存在するという条件は需要関数にどのような制約を課していることになるのか、それを考察することから始めよう。

まず、そのような関数 g がなんらかの関数 f の逆需要関数であれば、関数 f は全射でなければばならない。実際、任意の $x \in \Omega$ に対して、$x \in f(g(x), g(x) \cdot x)$ であるのだから、これは当然である。これに加えて、滑らかな逆需要関数の存在は Slutsky 行列の階数を $n-1$ に制限するということが知られている。このふたつは暗黙の仮定として置かれていたと思ってよい。

では、それ以上にどんな仮定を置けば滑らかな逆需要関数は存在すると言えるのだろうか。次の定理は、それが弱公理であるということを示している。

定理 4.2 $\ell \geq 1$ とし、A は $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ 内の開集合であり、$f : A \to \Omega$ は C^ℓ 級の全射な一価の需要関数であるとし、さらに任意の $(p, m) \in A$ に対して $S_f(p, m)$ の階数は $n-1$ であると仮定する。もし f が弱公理を満たしていれば、$g^n \equiv 1$ を満たすような逆需要関数 $g : \Omega \to \mathbb{R}^n_{++}$ が存在し、それは一意である。この g は C^ℓ 級で、条件 (A) を満たす。さらに $\ell \geq 2$ であれば、$f = f^{\succsim^g}$ が成り立つ。

証明： この証明は後の命題 4.1 と同時にやったほうがよいため、後に回す。 ■

定理 4.2 は少なくとも 4 つも大きな意義を有している。

まず最初に、これは上で挙げたふたつの性質に加えて弱公理さえあれば滑らかな逆需要関数が存在するという事実を示している。つまり、滑らかな g が存在するためのそれほど強くない十分条件を与えていることになる。

次に、この定理は与えられた f から滑らかな g を計算するための手法を与えてくれている。実際、任意の x に対して $g(x)$ は以下の方程式、

$$\begin{aligned} f(p, p \cdot x) &= x, \\ p^n &= 1, \end{aligned}$$

のただひとつの解である。従って我々は $g(x)$ の値を知りたいと思ったら、単になにも考えずに上の方程式を解けばよい。

第三の意義は、この命題が g が条件 (A) を満たすことを確かめるためのひとつの方法を与えていることである。条件 (A) はただでさえ非常に入り組んでいて確かめにくい。さ

らに、実際は我々は $g(x)$ の値を正確には求められないかもしれない。それは上の方程式が f の形状によっては解析的に解けない可能性を意味するのだが、このときは仕方ないので上の方程式に近似計算法を適用して $g(x)$ の近似値で代用するしかない。すると $g(x)$ の正確な値はわからないため、条件 (A) を確かめる手段は失われてしまう。しかし定理 4.2 はそのような場合に確認するための手段を与えてくれる。

最後に、この定理は $f = f^{\succsim^g}$ という非常に重要なことを保証してくれる。これがないと、我々の選好は元の需要関数に対応しないことになってしまい、計算手法は意義を大幅に失ってしまう。

さて、この定理の威力を示す例をひとつ紹介しよう。Gale (1960) は次のような需要関数の例を考えた。

$$f(p,m) = \frac{m}{p^T Ap}Ap,\ A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

これに対応する逆需要関数は次の通りである。

$$g(x) = Bx,\ B = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 16 \\ 16 & 9 & 12 \\ 12 & 16 & 9 \end{pmatrix}$$

Gale は f が弱公理を満たすことを確かめているので、定理 4.2 から g は条件 (A) を満たす[*3]。一方で、簡単な計算によって g が条件 (B) を満たさないことがわかる。したがって定理 4.1 によれば、$\succsim^g$ は p-推移的で、g は $f = f^{\succsim^g}$ の逆需要関数になるが、にもかかわらず $\succsim^g$ は推移的ではない。この例は、p-推移的ではあるが推移的ではない選好が存在することを示している。

ここまでは f が一価でしかも微分可能なケースについて取り扱った。もう少し一般の場合についても議論したいのだが、残念ながら f が一価でない場合には、逆需要関数 g の存在定理をきれいな形で見つけることはできなかった。しかし、定理 4.2 の残りの主張はこのような場合にも成り立つことが次の命題でわかる。

命題 4.1 $f : \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \twoheadrightarrow \Omega$ は全射な需要関数で、$g : \Omega \to \mathbb{R}^n_{++}$ は $g^n \equiv 1$ を満たすような f のただひとつの逆需要関数であるとする。もし g が C^1 級で f が弱公理を満たしているならば、g は条件 (A) を満たす。さらに g が C^2 級であれば $f = f^{\succsim^g}$ が成り立つ。

証明： まずは定理 4.2 の主張のうち、逆需要関数の存在と一意性命題について示しておこう。最初に補題をひとつ用意する。

---

*3 本稿では確かめていないが、条件 (A) が逆需要関数の正規化に依存しないという事実は容易に示せる。細矢 (2010) などを見よ。

補題 4.1 定理 4.2 の仮定が成り立っているとし、$x \in \Omega$ と、$x = f(p,m)$ となる (p,m) を選ぶ。このとき、x の開近傍 U_x と $\frac{1}{p^n}(p,m)$ を含む集合 V_x、関数 $g_x : U_x \to \mathbb{R}^n_{++}$ と $G_x : U_x \to V_x$ で以下の条件を満たすものが存在する：

1) 任意の $y \in U_x$ と $j \in \{1,...,n\}$ に対して、$G^j_x(y) = g^j_x(y)$ が成り立つ。また、$G^{n+1}_x(y) = y \cdot g_x(y)$ も成り立つ。
2) V_x は $\{(q,w) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} | q^n = 1\}$ における開集合合である。
3) G_x は C^ℓ 級の同相写像であり、その逆写像が f と一致する。つまり、$y \in U_x$ ならば $f(G_x(y)) = y$ が成り立つ。
4) $G_x(x) = \frac{1}{p^n}(p,m)$ である。

証明： $S_f(p,m)$ の階数は $n-1$ である。また、ゼロ次同次性とワルラス法則から $S_f(p,m)p = 0$ であることが導ける。これらの事実から、$S_f(p,m)$ の 1 列目から $n-1$ 列目までは一次独立であることがわかる。そこで $\hat{S}$ を $S_f(p,m)$ の n 列目だけを $\partial_m f(p,m)$ で取り替えた行列、F を $D_p f(p,m)$ の n 行目だけを $\partial_m f(p,m)$ で取り替えた行列としよう。$p^T S_f(p,m) = 0^T$ なので、$S_f(p,m)$ の各列は p と直交しており、一方で $p \cdot \partial_m f(p,m) = 1 \neq 0$ であるから、ここから $\hat{S}$ は正則であることがわかり、したがって F もまた正則である[*4]。

そこで、$\hat{f} : \mathbb{R}^{n-1}_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \Omega$ を、

$$\hat{f}(\hat{q}, w) = f(\hat{q}, 1, w)$$

と定義し、また $\hat{p} = (p_1, ..., p_{n-1})$ とする。すると $x = \hat{f}(\frac{1}{p^n}\hat{p}, \frac{1}{p^n}m)$ である。F は正則だから、$D\hat{f}(\frac{1}{p^n}\hat{p}, \frac{1}{p^n}m)$ も正則である。故に、これに逆関数定理を適用することで、x を含む開集合 U_x と、$\frac{1}{p^n}(\hat{p}, m)$ を含む開集合 $\hat{V}_x$ 及び C^ℓ 級の全単射 $\hat{G}_x : U_x \to \hat{V}_x$ で、$y \in U_x$ ならば常に $\hat{f}(\hat{G}_x(y)) = y$ が成り立つようなものが存在することがわかる。そこで、

$$g_x(y) = (\hat{G}^1_x(y), ..., \hat{G}^{n-1}_x(y), 1)$$

$$G_x(y) = (g_x(y), \hat{G}^n_x(y))$$

$$V_x = \{(q,w) | q^n = 1 \text{ and } (q^1, ..., q^{n-1}, w) \in \hat{V}_x\}$$

と定義すれば、これらが要件を満たす。 ■

さて、$g(x) = g_x(x)$ として新たな関数 $g : \Omega \to \mathbb{R}^n_{++}$ を定義しよう。すると g は $g^n \equiv 1$ を満たす f の逆需要関数である。次にこの g が、$g^n \equiv 1$ という条件の下でただひとつ

*4 $1 \leq j \leq n-1$ に対して、$\hat{S}$ の j 列目は F の j 列目に $\partial_m f(p,m)$ の何倍かを加えた形になっていることに注意。

の f の逆需要関数になっていることを示そう。証明は背理法による。仮にそうでないとすれば、$x \in \Omega$ と $(p,m) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ をうまく取れば、$x = f(p,m), p^n = 1$ かつ $(p,m) \neq G_x(x)$ であるようにできる。そこで $(p(t),m(t)) = t(p,m) + (1-t)G_x(x)$ とする。すると、$p(t) \cdot y \le m(t)$ ならば $p \cdot y(t) \le m$ か $g_x(x) \cdot y(t) \le g_x(x) \cdot x$ かのいずれかが成り立っていなければならないので、弱公理から $(p(t),m(t)) \in A$ である限り $f(p(t),m(t)) = x$ でなければならない。$p^n(t) \equiv 1$ であるから、$(p(t),m(t)) \in V_x$ となるような $t \in]0,1[$ が存在するのだが、G_x は全単射なので、$G_x(y) = (p(t),m(t))$ となる $y \in U_x$ が存在することになる。$(p(t),m(t)) \neq G_x(x)$ なので $y \neq x$ だが、一方で $x = f(p(t),m(t)) = f(G_x(y)) = y$ となり、これは矛盾である。以上で一意性が示せた。

そこで g は $g^n \equiv 1$ を満足する f のただひとつの逆需要関数である。そこで特に、g は U_x 上で g_x と一致することがわかる。g_x は C^ℓ 級なので、g もまた C^ℓ 級である。これで定理 4.2 の前半部が証明できた。

残りの主張は定理 4.2 と命題 4.1 で同じなので、同時に証明する。最初に、g が条件 (A) を満たすことを示そう。仮にそうでないとすれば、ある $x \in \Omega$ と $w \in \mathbb{R}^n$ に対して $w \cdot g(x) = 0$ かつ $w^T Dg(x) w > 0$ となる。$x(s) = x + sw$ と定義しよう。すると、$s > 0$ が十分小さい限り、

$$\frac{d}{ds}[g(x(s)) \cdot w] = w^T Dg(x(s)) w > 0,$$

が成り立つため、$g(x(s)) \cdot w > 0$ であり、したがって $x \cdot g(x(s)) < x(s) \cdot g(x(s))$ が成り立つ。$g(x) \cdot x(s) = g(x) \cdot x$ であるから、弱公理より $x \in f(g(x(s)), g(x(s)) \cdot x(s))$ を得るが、これはワルラス法則に矛盾である。これで示せた。

今度は、$f(p,m) \neq \emptyset$ となるような $(p,m) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ を取ったとしよう。まず、$x \in f(p,m)$ とする。すると $g(x) = \frac{1}{p^n} p$ であり、したがって $g(x) \cdot x = \frac{1}{p^n} m$ である。よって定理 4.1 の (II) と $f^{\succsim}$ のゼロ次同次性から、$x \in f^{\succsim^g}(g(x), g(x) \cdot x) = f^{\succsim^g}(p,m)$ である。故に $f(p,m) \subset f^{\succsim^g}(p,m)$ はわかった。次に、$x \in f(p,m)$ をひとつ取っておき、$y \in f^{\succsim^g}(p,m)$ とする。$y = x$ であれば明らかに $y \in f(p,m)$ である。そうでないとしよう。$p \cdot x = p \cdot y = m$ なので x, y は同一直線上には位置しないことに注意する。$x(s) = (1-s)x + sy$ と定義しよう。定理 4.1 の (II) から、$y(\cdot; x, y)$ の軌道は原点に対して凸である。$x, y \in f^{\succsim^g}(p,m)$ であるから $x \sim^g y$ であり、したがって任意の $s \in [0,1]$ に対して $x(s) \succsim^g x$ であるが、一方で $p \cdot x(s) \le m$ だから $x \succsim^g x(s)$ でもあり、合わせて $x(s) \sim^g x$ を得る。したがって、$y - x$ は $D_x u^g(y,x)$ と直交しており[*5]、故に補題 7.3 から、それは $g(y)$ とも直交している。よって $g(y) \cdot x = g(y) \cdot y$ がわかる。一方で $p \cdot y = p \cdot x = m$ であるため、f の弱公理から $y \in f(p,m)$ がわかる。これで

[*5] 誤解のないように注記しておくが、$D_x u^g(y,x)$ とは u^g の最初の n 座標、つまり y の入っている箇所の変数についての偏微分を並べた行列である。これは 7 章の表記と統一するために書いた。

$f(p,m) = f^{\succsim^g}(p,m)$ が示せた。

最後に、$f(p,m) = \emptyset$ であったとして、$f^{\succsim^g}(p,m) = \emptyset$ を示そう。仮にそうでないとし、$x \in f^{\succsim^g}(p,m)$ だとしよう。$f(g(x), g(x)\cdot x) \neq \emptyset$ なので、p と $g(x)$ は同一直線上にはない。よってある $y \in \Omega$ に対して $p \cdot y < m$ かつ $g(x)\cdot y = g(x)\cdot x$ が成り立つ。このとき x, y は同一直線上にはなく、またある $t > 0$ に対して $p \cdot y(t; x, y) < m$ となるため、$x \notin f^{\succsim^g}(p,m)$ であることになるがこれは矛盾である。以上で証明が完成した。 ■

こうして我々は、f の性質から g が条件 (A) を満たすことをチェックする方法を見つけたが、条件 (B) について同様の方法はまだ見つけていない。条件 (B) は式の形だけでも大変複雑な形をしているので、なんとかして他に確認する手段を見つけたいところである。残念ながら条件 (B) を確認できる簡単な手法はあまり見つかっていないが、かろうじて次の命題が成り立つ。

命題 4.2 需要関数 f は全射で弱公理を満たし、$g : \Omega \to \mathbb{R}^n_{++}$ は $g^n \equiv 1$ を満たすようなただひとつの f の逆需要関数であるとし、それが C^2 級であるとする。このとき、次の 3 条件は互いに同値である。

1) f は強公理を満たす。
2) $f = f^{\succsim}$ となるような推移的な選好 $\succsim$ が存在する。
3) g は条件 (B) を満たす。

また、仮に f が開集合 A を定義域とする C^1 級の一価関数であったとすれば、次の条件も上の 3 条件とそれぞれ同値になる。

4) $S_f(p,m)$ は常に対称である。

証明： 2) から 1) が出ることは容易に示せる。一方、定理 4.1 の (III) によれば 3) は 2) を含意している。さらに、もし f が開集合 $A \subset \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ 上での C^1 級の一価関数であった場合、2) から 4) が、また 4) から 3) が導かれることは有名である[*6]。したがって後は、多価である場合に 1) から 3) が出ることを示せばよい。我々はこれを対偶法によって示す。つまり、3) の否定を仮定して 1) の否定を導く。

そこで g が条件 (B) を満たしていないとしよう。定理 4.1 の (III) から、このとき $\succsim^g$ は推移的でない。したがって $y \succsim^g z, z \succsim^g w, w \succ^g y$ を満たす三点 $y, z, w \in \Omega$ が存在するはずである。必要であれば十分 1 に近い $s, t > 0$ を使って w を sw に、z を tz に置き換えることで、$y \succ^g z, z \succ^g w$ だと考えてよい。そこで、f が強公理を満たさないことを示すためには、$x \succ^g v$ となる任意の $x, v \in \Omega$ に対して、有限点列 $(z_i)_{i=1}^M$ で、$z_1 = x$

[*6] 2) から 4) については Hurwicz and Uzawa (1971) を見よ。4) から 3) は Samuelson (1950) にある。

であり、また任意の $i < M$ に対して $z_i \in f(p_i, m_i)$ かつ $p_i \cdot z_{i+1} \le m_i$ であり、さらに $z_M \in f(p_M, m_M)$ かつ $p_M \cdot v < m_M$ であるようなものが存在することを示せば十分である。もし $x \gg v$ であれば、$z_1 = x$ として点列 (z_1) が条件を満たす。そうでなければ、x, v は同一直線上には存在しないことになる。そこで、十分に精度の高い Euler 法による $y(\cdot; x, v)$ の差分近似列 $(z_i)_{i=1}^M$ を取ってくれば、これが要件を満たす。■

この命題には強力な主張がいくつか含まれている。まず、1) と 2) の同値性である。これは命題 3.2 と似ているが、しかし微妙に異なる。主要な違いは、f が非空値であることを仮定していないことである。前にも述べたように命題 3.2 で非空値性は本質的であったが、ここではそれを仮定しないで証明することを可能にしている。これは大きな差である。

また、条件 (B) は g の情報がきちんとなければ確認することができない条件であり、また強公理は一般にとても確認しにくい。これらと比較して、$S_f(p, m)$ の対称性は f の情報だけから確認することができるし、また比較的確認も容易である。これを用いることで、我々は条件 (B) を確認するための手段をひとつ確保することができる。これがこの命題の主要な意義である。

4.4 復元可能性

ここで我々は、いわゆる復元可能性の問題に取り組むことになる。つまり、所与の需要関数に対応する選好がひとつしかないことを確かめる、という問題である。これがうまくいかないと我々の計算方法が完全なものにならないということは、すでに前に説明したとおりである。しかし、残念なことに無限定ではこの主張は成り立たない。特に、p-推移性が成り立たない選好の中から選ぼうとすれば、ほとんどの需要関数について対応する選好が複数見つかってしまう。

そこで、p-推移的な選好の中から選ぶのであればどうだろうか、というのが次の関心の対象になるのだが、やはり残念なことに次の命題が成り立ってしまう。

命題 4.3 g は C^2 級の逆需要関数で条件 (A') を満たすとし、また $\succsim_l$ は**辞書式順序**、つまり、

$$\begin{aligned}\succsim_l = \{(x, v) \in \Omega^2 | x = v \text{ or } \exists k \in \{1, ..., n\} \\ \text{s.t. } x^1 = v^1, ..., x^{k-1} = v^{k-1}, x^k > v^k\},\end{aligned}$$

であるとする。このとき、

$$\succsim = \{(x, v) \in \Omega^2 | x \succ^g v \text{ or } [x \sim^g v \text{ and } x \succsim_l v]\},$$

と定義すると、$\succsim$ は p-推移的であり、$\succsim^g \neq \succsim$ かつ $f^{\succsim^g} = f^{\succsim}$ である。

証明： 定理 4.1 の (IV) から、$f^{\succsim^g}$ は一価関数である。後の推論は容易である。 ■

上の命題はひとつの考察の機会を与える。我々が $f^{\succsim^g} = f^{\succsim}$ としたときの $\succsim$ は、$\succsim^g$ については無差別であった部分をより細かく順序づけしたものであった。従って、$x \succ^g v$ であれば $x \succ v$ である、といった程度のことは成り立つ。次の命題はこれがより一般の場合でも成り立つということを意味するもので、$\succ^g$ という情報については我々は迷わず信じてよいということを含意する。

命題 4.4 g は C^2 級の逆需要関数で条件 (A) を満たすものとする。もし p-推移的な選好 $\succsim$ が $f^{\succsim^g} = f^{\succsim}$ という条件を満たすならば、$x \succ^g v$ となる任意の $(x, v) \in \Omega^2$ に対して $x \succ v$ となる。

証明： $x \succ^g v$ であるとし、命題 4.2 の証明中で現れた点列 $(z_i)_{i=1}^M$ を取る。また、対応して $i \le M$ に対して $z_i \in f^{\succsim}(p_i, m_i)$ で、$i < M$ に対しては $p_i \cdot z_{i+1} \le m_i$ であり、さらに $p_M \cdot v < m_M$ であるような $(p_i, m_i)_{i=1}^M$ を取る。$(z_i)_{i=1}^M$ が $\mathrm{span}\{x, v\}$ 内の点列であることに注意する。$i < M$ のとき、$z_i \in f^{\succsim}(p_i, m_i)$ と $p_i \cdot z_{i+1} \le m_i$ から、$z_i \succsim z_{i+1}$ がわかる。また、$z_M \in f^{\succsim}(p_M, m_M)$ と $p_M \cdot v < m_M$ から、$z_M \succsim v$ もわかる。もし $z_M \succ v$ であれば、p-推移性から $x \succ v$ となって証明が終わる。したがってそうでないと仮定しよう。すると $z_M \sim v$ である。$c = \dfrac{m_M}{p_M \cdot v}$ と定義すれば、$c > 1$ かつ $p_M \cdot (cv) = m_M$ であり、したがって $z_M \succsim cv$ である。$\succsim$ の p-推移性から $v \succsim cv$ を得る。一方で、$cv \in f^{\succsim}(g(cv), g(cv) \cdot (cv))$ だから、$g(cv) \cdot z \le g(cv) \cdot (cv)$ となる任意の $z \in \Omega$ に対して $cv \succsim z$ である。そこで再び p-推移性から、$g(cv) \cdot z \le g(cv) \cdot cv$ となる任意の z に対して $v \succsim z$ である。よって $v \in f^{\succsim}(g(cv), g(cv) \cdot (cv)) = f^{\succsim^g}(g(cv), g(cv) \cdot (cv))$ だが、これは $v \succsim^g cv$ を意味し、$\succsim^g$ の強単調性に矛盾する。以上で証明が完成した。 ■

では、$f^{\succsim^g} = f^{\succsim}$ ならば $\succsim^g = \succsim$ であると完全に言うためには、どんな条件を追加すればよいのだろうか。幸いにも、これを保証するための追加条件はあまり強くはない。実際のところ、$\succsim$ を選択する範囲を連続な選好に限ってみればそれだけで上の事実は成り立つ。もう少し条件を弱めたのが次の定理である。

定理 4.3 g は C^2 級の逆需要関数で条件 (A) を満たすものとする。もし p-推移的な選好 $\succsim$ について、$U(x, y) = \{z \in \Omega \cap \mathrm{span}\{x, y\} | z \succsim x\}$ が常に $\Omega \cap \mathrm{span}\{x, y\}$ の相対位相に関して閉である、という条件が成り立っており、かつ $f^{\succsim^g} = f^{\succsim}$ であるならば、$\succsim = \succsim^g$ となる。

証明： 命題 4.4 から、$x \not\succsim^g v$ から $x \not\succsim v$ が導かれる。対偶を取れば、$x \succsim v$ は $x \succsim^g v$ を含意することがわかる。

したがって後は、$x \succsim^g v$ から $x \succsim v$ が出ることを示せばよい。そこで $x \succsim^g v$ としよう。$\varepsilon_n = (1 + \frac{1}{n})$ とすると、$\varepsilon_n x \succ^g v$ であり、したがって $\varepsilon_n x \succ v$ である。$U(v,x)$ は閉であるから、$n \to \infty$ として極限を取れば $x \succsim v$ が導かれる。これで証明が完成した。 ■

この定理の中で仮定されている $U(x,y)$ が閉だという条件は、明らかに上半連続性よりも弱い。したがって、上半連続性よりもさらに弱い仮定と p-推移性の元で、当該選好は我々が計算した選好と一致してしまうのである。これは我々の計算手法に対する信頼性を著しく高めてくれる。

4.5 古典的な問題への適用

ここまでの結果を用いて、我々は Samuelson (1950) に現れる古典的な問題に解答を与えることができる。それは、$S_f(p,m)$ の階数が常に $n-1$ で、それが半負値定符号かつ対称であるような f は必ず滑らかな u に対応しているか否か、という問題である。上記論文はそれを解決したと主張したが、その証明には現代的な観点から見て少なくとも 3 つの問題点があった。

まず第一に、この論文では効用関数の存在を保証するために Frobenius の定理を用いているのだが、Frobenius の定理はあくまで、与えられた点 x の周りで一階条件 $Du = \lambda g$ を満たす関数 u と λ の存在を保証するだけの定理である。したがって当然、二階条件は考慮されていない。実際、S_f の半負値定符号性を諦めれば反例は非常に簡単に作れる。半負値定符号性を諦めなければ反例がないかどうかは、少なくとも Samuelson の記述だけからはわからない。

次に、Frobenius の定理で存在が保証できる u の定義域はあくまで x の近傍でしかなく、Ω 全体ではないということである。Debreu (1972) は、g の値域が必ずしも $\mathbb{R}^n_{++}$ でない場合に、積分可能性条件を満たしながらも大域的な効用関数を絶対に持たない g の例を構築している。その論文では g の値域が $\mathbb{R}^n_+$ である場合にはこのようなことは起こらないと主張されているが、この論文には少なくともひとつ明確な誤りがあり、その他いくつも論証があいまいな点があって信用できるかどうかに疑問が残る。

最後に、そもそも Frobenius の定理を逆需要関数に適用するためには、滑らかな逆需要関数が存在しなければならない。Hurwicz and Uzawa (1971) には、C^1 級の需要関数を持ちながらも、決して滑らかな逆需要関数を持たない効用関数の例が挙げられている。この例は S_f の階数が $n-1$ でない点を含むので厳密な反例ではないが、不安は残る。

そこで、きちんとした証明を与えるためにはこれらの問題を解決する必要がある。さしあたり Samuelson (1950) の仮定に加えて、f の全射性と C^2 級であることを仮定しておこう。もし、f が弱公理を満たしていれば、定理 4.2 の前提条件が成り立っているため、

滑らかな逆需要関数 g を持ち、さらに $f = f^{\succsim^g}$ が成り立つことになる。これに加えて S_f が対称なために $\succsim^g$ は滑らかな効用関数 u_v^g を持っており、よって問題は肯定的に解決できる。したがって、残った問題は Samuelson (1950) の仮定だけから弱公理が言えるか、という点に尽きていることがわかる。そして、実は弱公理を示すことは可能であり、次の定理が成り立つ。

定理 4.4 $\ell \ge 2$ とし、f が全射な C^ℓ 級の一価な需要関数であり、$S_f(p,m)$ が常に階数が $n-1$ の半負値定符号で対称な行列であるならば、$f = f^u$ となる C^ℓ 級の効用関数 u が存在する。

証明： すでに書いたように、f が弱公理を満たすことさえ示せばよい。このために次の補題を用いる。

補題 4.2 (Kihlstrom, Mas-Colell, and Sonnenschein (1976)) f は一価な C^1 級の需要関数で、p と直交する任意の $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して $v^T S_f(p,m) v < 0$ であるとする。このとき f は弱公理を満たす。

証明： 対偶法を用いる。最初に、次のことを確かめておこう。いま、$(p,m) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ と、p と直交し 0 でない v を取ってきたとしよう。f は連続微分可能なので、

$$0 = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f^i(p+tv, (p+tv)\cdot f(p,m)) - f^i(p,m) - \sum_{j=1}^n s_f^{ij}(p,m)(tv^j)}{t}$$

が言える。ただし $s_f^{ij}(p,m)$ は $S_f(p,m)$ の (i,j) 要素である。この両辺に $v^i = \frac{p^i + tv^i - p^i}{t}$ を掛け合わせて i について足し合わせれば、

$$0 = \lim_{t \downarrow 0} \frac{((p+tv)-p)\cdot(f(p+tv,(p+tv)\cdot f(p,m)) - f(p,m))}{t^2} - v^T S_f(p,m) v$$

が得られる。したがって $v^T S_f(p,m) v \ge 0$ を示すためには、十分小さな $t > 0$ に対して $((p+tv)-p)\cdot(f(p+tv,(p+tv)\cdot f(p,m)) - f(p,m)) \ge 0$ が常に成り立つことを示せばよいことがわかる。

さて、f が弱公理を満たしていなかったとしよう。すると、$f(p,m) \neq f(q,w)$ であり、また $q \cdot f(p,m) \le w$ かつ $p \cdot f(q,w) \le m$ であるような (p,m) と (q,w) が存在していなければならない。最初に、$q \cdot f(p,m) = w$ かつ $p \cdot f(q,w) < m$ であるような組み合わせがある場合を扱おう。まず、

$$p(s) = (1-s)q + sp,$$

とし、

$$s^* = \min\{s \ge 0 | p \cdot f(p(s), p(s)\cdot f(p,m)) = m\},$$

と定義する。$s=0$ のとき

$$p\cdot f(p(s),p(s)\cdot f(p,m))=p\cdot f(q,w)<m,$$

であり、$s=1$ のとき

$$p\cdot f(p(s),p(s)\cdot f(p,m))=p\cdot f(p,m)=m,$$

なので、f の連続性から s^* は well-defined で、$0<s^*\le 1$ を満たす。このとき、

$$p(s^*)\cdot f(q,w)=(1-s^*)w+s^*p\cdot f(q,w)<(1-s^*)w+s^*m,$$

が成り立つ。一方、

$$(1-s^*)w+s^*m=p(s^*)\cdot f(p(s^*),(1-s^*)w+s^*m)=(1-s^*)q\cdot f(p(s^*),(1-s^*)w+s^*m)+s^*m,$$

であるから、

$$q\cdot f(p(s^*),(1-s^*)w+s^*m)=w,$$

を得る。そこで最初から p の代わりに $p(s^*)$ を、m の代わりに $(1-s^*)w+s^*m$ を用いておこう。すると任意の $s\in]0,1[$ に対して、

$$p\cdot f((1-s)q+sp,[(1-s)q+sp]\cdot f(p,m))<m,$$

が成り立つ。v を、$q-p$ の $\mathrm{span}\{p\}$ の直交補空間への正射影とする。このとき、ある正の定数 c をうまく取れば、$p+tv$ と $(1-ct)p+ctq$ は原点を通る同一直線上に位置しており、したがって

$$f(p+tv,(p+tv)\cdot f(p,m)=f((1-ct)p+ctq,[(1-ct)p+ctq]\cdot f(p,m),$$

であることに注意する。よって $t>0$ が十分小さければ常に

$$p\cdot f(p+tv,(p+tv)\cdot f(p,p\cdot f(p,m)))<m,$$

が成り立つ。故に、

$$(p-(p+tv))\cdot[f(p,p\cdot f(p,m))-f(p+tv,(p+tv)\cdot f(p,m))]>0,$$

がわかる。よって $v^TS_f(p,m)v\ge 0$ であることがわかったが、一方で v は p と直交し 0 でない。これでこの場合は示せた。

次に、$q\cdot f(p,m)<w$ かつ $p\cdot f(q,w)<m$ であるような組み合わせがあった場合を考える。最初に $x(s)=f((1-s)p+sq,(1-s)m+sw)$ と定義しよう。$[(1-s)p+sq]\cdot x(s)=(1-s)m+sw$ であるから、$0<s<1$ のとき $p\cdot x(s)\le m$ と $q\cdot x(s)\ge w$ は同値である。十分 s が 0 に近ければ $q\cdot x(s)<w$ であり、十分 s が 1 に近ければ $q\cdot x(s)>w$ で

あるから、x の連続性から $q\cdot x(s)=w$ となる $s\in]0,1[$ がある。このとき $p\cdot x(s)=m$ でもある。$r=(1-s)p+sq$ とすれば、$q\cdot x(s)=q\cdot f(r,r\cdot x(s))=w$ であり、また $r\cdot f(q,w)<(1-s)m+sw=r\cdot x(s)$ でもあるから、この r と q が先ほどの場合の条件を満たす。これでこの場合も示せた。

最後に、$q\cdot f(p,m)=w$ かつ $p\cdot f(q,w)=m$ であるような組み合わせがあった場合を考える。やはり $x(s)=f((1-s)p+sq,(1-s)m+sw)$ と定義しよう。前と同様に $p\cdot x(s)\le m$ と $q\cdot x(s)\ge w$ は同値である。もしなんらかの s に対して $p\cdot x(s)<m$ が成り立つならば、q の代わりに $(1-s)p+sq$ を、w の代わりに $(1-s)m+sw$ を使えば先ほどの場合に還元できる。$q\cdot x(s)<w$ となる s がある場合も同様である。したがって残ったのは、すべての s について $p\cdot x(s)=m$ かつ $q\cdot x(s)=w$ である場合だけである。この場合はやはり v を前と同様に $q-p$ の $\mathrm{span}\{p\}$ への正射影とすれば、$v\neq 0$ であり、また十分小さな t に対して、

$$p\cdot f(p+tv,(p+tv)\cdot f(p,m))=m,$$

が成り立つので、

$$((p+tv)-p)\cdot[f(p+tv,(p+tv)\cdot f(p,m))-f(p,m)]=0,$$

が成り立つ。これでこの場合も示せた。以上で証明が完成した。 ■

したがって後は、p と直交する 0 でないベクトル v に対して常に $v^TS_f(p,m)v<0$ であることさえ示せればよい。いま、$S_f(p,m)$ は対称なので、ある直交行列 C を使って対角化できる。つまり、対角要素以外がすべて 0 である行列 A によって、

$$S_f(p,m)=C^TAC,$$

とできる。ここで A の対角要素に並んでいるのは $S_f(p,m)$ の固有値であり、半負値定符号であるからそれはすべて 0 以下であるのだが、$S_f(p,m)$ の階数は $n-1$ なのでそれらのうち一つだけが 0 であり、残りはすべて負でなければならない。0 である箇所が (i,i) 要素であるとすると、よく知られているように $p^TS_f(p,m)p=0$ であるから、$C^Tp=e_i$ である。ただし e_i は $\mathbb{R}^n$ の第 i 単位ベクトルである。ここからわかることは、p と直交する任意の v は $C^Tw=\sum_{j\neq i}c_je_j$ の形で書けるということである。よって当然、示したかった性質が成り立つ。これで証明が完成した。 ■

第 5 章

無限次元動学モデルの積分可能性

我々の興味は需要から選好を計算することだが、これはなにも静学モデルだけで議論するわけではない。動学モデルで同様のことを議論することができれば、その応用可能性は大きく広がるだろう。

だがこれは簡単ではない。大きな問題点のひとつは、動学モデルでは財空間の次元が通常、無限次元であるということである。よく知られているように、無限次元では位相の入れ方が複数あり、そのうちいくつかは微分法を適用するのにはなはだ不都合な性質を持っている。たとえば通常の L^p 空間では正象限は内点がひとつもない集合になってしまう。L^{∞} を使えばこの問題は回避できるが、この空間はその双対空間が非常に扱いにくいことが知られており、それはつまり逆需要関数の値域が扱いにくいということを意味する。他にも、微分位相幾何の結果を用いている箇所の多くは有限次元性に依存しており、単純には適用できない。本質的に用いている技術は無差別超曲面の余次元が 1 という事実に依存しており、1 は有限であるから、なんらかの形で議論を復活させることができる可能性は残っている。が、それでも簡単にはいかない。

しかし、その種の数学的困難は問題の本質ではない。真に問題なのは、一般論において動学モデルの需要関数を推定すること自体が難しいということである。なにしろ無限の将来までのデータを手に入れなければならない。そのようなデータがなんらかの手法で手に入ったとしても、今度はデータをコンピュータに入力することもまた難しい。データセットが長すぎるからである。

序論で述べたように、我々が需要関数から選好関係を導出する手法を研究する理由は、需要関数ならばデータからの推定が容易であろうという予測に依存している。これが崩れてしまうならば、もはやこの議論を続ける理由自体がなくなってしまうのである。これではせっかく多大な数学的困難を排除したとしても努力が無駄になってしまう。そのため、動学モデルでの積分可能性理論が発展する余地はあまりないように思われた。

しかし、ここで別の側面に目を向けてみよう。経済学で使われる多くの動学モデルでは

以下の Bellman 方程式

$$V(k) = \max_{k'}\{W(k,k') + \delta V(k')\}$$

が用いられる。ここで V はこのこの方程式を満たすなんらかの関数であり、通例一意に決定する。ここで所与の k に対して、この右辺の最大化問題の解 $p(k)$ を返す関数のことを、政策関数と呼ぶ。与えられた関数 W に対して V が上記の関数方程式の解であるとき、問題

$$\max_{(k_t)} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t W(k_t, k_{t+1})$$
$$\text{sub.to } (k_t, k_{t+1}) \text{ is feasible.}$$

の解は、多くの場合 $k_{t+1} = p(k_t)$ という形で与えることができる[*1]。ということは、需要関数は事実上 p の情報だけで構築することができるのである。こうして、p から経済学のモデルを逆算できるかという、別種の積分可能性問題が生じる。

さしあたり、先行研究として Boldrin and Montrucchio (1986) が存在している。この論文では任意の C^2 級関数 p から上の W を逆算する手法を構築している。主に考えられているのは次の事実である。いま、W および V が既知であるとき、

$$X(k,k') = W(k,k') + \delta V(k'),$$

として X を定義しよう。このとき、上の関数方程式から、

$$X(k, p(k)) = V(k),$$

がわかる。よって、

$$W(k,k') = X(k,k') - \delta X(k', p(k')),$$

もわかる。これはつまり、X の候補さえ見つかればそこから W の候補と V の候補を容易に逆算できるということである。X の持つ性質で最も重要なものは、

$$p(k) = \arg\max_{k'} X(k,k'),$$

である。そこで上記論文では、

$$X(k,k') = -\frac{1}{2}(k') + p(k)k' + f(k),$$

という形の X を構築し、f の形をうまく合わせれば十分小さな δ に対して W と V がよい性質を持つことを示している。

[*1] Stokey and Lucas (1989) などを参照せよ。

しかしこの手法は、我々の目的にはうまく合致しない。主要な問題点は、X の形が k' について二次の多項式になるという性質が、ほとんどの経済モデルでは成り立たないということである。このような X が許容されている理由は、p に対応する W が多すぎるという点にある。したがって経済学でよく使われる問題から p を導出し、p から上記方法で W に戻ったとき、元の W にならない。つまり、4章での定理 4.3 に相当する結果が成り立たないのである。

そこで、W についてもっと具体的な構造を最初から特定して議論すれば、この問題は解決するのではないかという予想を得る。我々は有名な Ramsey-Cass-Koopmans 型の最適資本成長のモデルに議論を限定して、この予想を肯定的に解決する。ただしそこでは、W の形を特定するために生産関数 f を所与として議論しなければならない。つまり、数学的には生産関数 f と政策関数 p の形から効用関数 u の形を推定していることになる。この点でこの章の研究は伝統的な積分可能性理論とは決定的に異なるが、しかし f, ρ の推定可能性は十分高いと思われるので、我々の目的にはこのやり方は合致している。

さて、それでは詳しく結果を見ていこう。まず、離散時間の RCK モデルの正式な形は次で与えられる。

$$\begin{array}{ll} \max_{(k_t)} & \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_t) - k_{t+1}) \\ \text{sub.to.} & k_t \in \mathrm{dom}(f) \\ & f(k_t) - k_{t+1} \in \mathrm{dom}(u) \\ & k_0 \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f)) \text{ given.} \end{array} \tag{5.1}$$

上の問題を $((u, f, \delta)$-RCK) と呼ぶことにしよう。我々は $\delta \in]0, 1[$ の場合のみを考える。ここで、いくつかの仮定に名前を付けておこう。

仮定 1:f は集合 C から C への関数である。ただし C は $\mathbb{R}_+$ か $[0, M]$ のどちらかとする。さらに f は狭義凹、単調増大で定義域上連続、定義域の内部で連続微分可能で、$f(0) = 0$ であり、かつ $f(k) = k$ となる $k > 0$ が存在する。

仮定 2:u は D から $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ への関数とする。ただし D は $\mathbb{R}_+$ か $[0, M']$ のどちらかとする。さらに u は狭義凹、単調増大で定義域上連続、定義域の内部で連続微分可能であり、$\lim_{c \downarrow 0} u'(c) = +\infty$ である[*2]。

仮定 3:$C \subset D$ が成り立つ。

仮定 1 と仮定 2 の下で、上の問題は唯一の解 $(k_t^*)_t$ を持っていることが示せる。

さて、さしあたって仮定 1 を仮定し、また $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ は単調増大で狭義凹であるとしておこう。$V(k)$ を、$k = k_0$ であるときに上の問題の解が与える最大値を表す

[*2] u は単調増大なので $u(x) = -\infty$ は $x = 0$ の場合以外にはあり得ない。

ものとしよう。すると V は凹関数であり、また Bellman 方程式と呼ばれる次の方程式を（ただし右辺の方程式に解があるときに限り）満たす[*3]：

$$V(k)=\max_{k'\in[0,f(k)],f(k)-k'\in\mathrm{dom}(u)}\{u(f(k)-k')+\delta V(k')\}.$$

右辺の上限値の目的関数は k' について狭義凹であるため、最大化の解は高々ひとつしかない。もし仮に解が存在するならば、それを $p(k)$ と書くことにし、関数 p のことを問題 ((u,f,δ)-RCK) の政策関数と呼ぶことにしよう。

すると次の事実が知られている。まず、$k=k_0$ を初期点とする問題 ((u,f,δ)-RCK) の解 $(k_t^*)_t$ が存在するとき、$k_1^*=p(k_0)$ となることが知られている[*4]。逆に、すべての k に対して $p(k)$ がきちんと存在するとき、すべての $t=0,1,...$ に対して $k_{t+1}=p(k_t)$ と定義することによって得られる列 (k_t) は問題 ((u,f,δ)-RCK) の解となることが知られている[*5]。したがって、p がきちんと定義された関数として存在することと、問題 ((u,f,δ)-RCK) に解が存在することは同値となる。

以上の準備の下で、次の定理が示せる。

定理 5.1 f は仮定 1 を満たすとする。このとき、次が成り立つ。

(I) u が仮定 2 と仮定 3 を満たすとし、$\delta\in]0,1[$ とする。p が問題 ((u,f,δ)-RCK) の政策関数であれば、以下が成り立つ。

(i) p は連続で単調増大。

(ii) $p(k^*)=k^*$ となるただひとつの $k^*>0$ が存在する。

(iii) k^* は大域安定である。つまり、任意の $k>0$ に対して、$n\to\infty$ のとき $p^n(k)\to k^*$ が成り立つ。ここで $p^1(k)=p(k)$ かつ $p^n(k)=p(p^{n-1}(k))$ である。

(iv) $f'(k^*)>1$ となる。

(v) $c(k)=f(k)-p(k)$ と定義すると、c は単調増大。

(vi) 任意の $k>0$ に対して、以下の無限積が正の値に収束する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{f'(p^n(k))}{f'(k^*)}. \tag{5.2}$$

[*3] max でなく sup を用いれば、解がないときでも成り立つ。また、条件を少し追加すれば、V はこの関数方程式のただひとつの解であることになる。Stokey and Lucas (1989) の定理 4.3 を参照。

[*4] Stokey and Lucas (1989) の定理 4.4 を参照。

[*5] やはり Stokey and Lucas (1989) の定理 4.5 を参照。なお、定理 4.5 の前件はこの場合は無条件に成り立っていることが確認できる。

(II) $p : C \to C$ がすべての k に対して $p(k) \in [0, f(k)]$ であり、さらに (i)-(vi) を満たすとする。ここで $\delta = \frac{1}{f'(k^*)}$ とし、さらに $c^* = c(k^*)$ として、

$$u(x) = \int_{c^*}^{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{f'(p^n(c^{-1}(y)))}{f'(k^*)} dy,$$

と定義する。すると u は、$\sup_k c(k) = +\infty$ のときには $\mathbb{R}_+$ 上で、そうでないときは $[0, \sup_k c(k)]$ 上で定義された $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ に値を取る関数で、仮定 2 を満たす。さらに、p は $((u, f, \delta)$-RCK) の政策関数である。

(III) p, δ, u は (II) と同じとし、p が別の問題 $((v, f, \delta')$-RCK) の政策関数でもあったとしよう。もし v が端点を除いて連続微分可能ならば、$\delta' = \delta$ であり、かつすべての $x \in]0, \sup_k c(k)[$ に対して

$$v(x) = v'(c^*)u(x) + v(c^*),$$

が成り立つ。

証明：

(I) の証明：

最初に、Bellman 方程式を見てみよう[*6]。

$$V(k) = \max_{k' \in [0, f(k)]} \{u(f(k) - k') + \delta V(k')\}.$$

V が凹であることはすでに述べた。Berge の定理から p は連続であることがわかる。$\lim_{c \downarrow 0} u'(c) = +\infty$ であることから、$p(k) \in]0, f(k)[$ を容易に示すことができる。Benveniste and Scheinkman (1979) によると V は微分可能で、

$$V'(k) = u'(f(k) - p(k))f'(k),$$

である。

明らかに $p(k)$ は上の問題の端点解ではあり得ず、よって最適点において最大化の一階条件が成り立つ。故に、

$$u'(f(k) - p(k)) = \delta V'(p(k)),$$

である。もし $k < \bar{k}$ であれば、$f(k) < f(\bar{k})$ であるから、

$$u'(f(\bar{k}) - p(k)) < \delta V'(p(k)),$$

[*6] 仮定 3 があるため、先ほどの Bellman 方程式と違い、$f(k) - k'$ が u の定義域に入っているという条件はなくてよい。

が言える。一方、

$$u'(f(\bar{k})-k')=\delta V'(k'),$$

であるような k' が $p(\bar{k})$ である。この左辺は k' について増加的、右辺は減少的であるから、先ほどの式は $p(\bar{k})>p(k)$ を意味する。よって (i) が言えた。

次に、最大化の一階条件から、

$$u'(f(k)-p(k))=\delta f'(p(k))u'(f(p(k))-p^2(k)),$$

を得る。このため、$k>0$ かつ $p(k)=k$ であれば $\delta f'(k)=1$ でなければならない。したがって、$p(k)=k$ となる k の候補は $\delta f'(k)=1$ を満たす点だけしかないことがわかる。そこを k^* と名付けておこう。以下、$p(k^*)=k^*$ であることと、k^* が大域安定であることを同時に示す。

まず、$p(k)>k\ge k^*$ であるとすれば、

$$u'(f(k)-p(k))=\delta f'(p(k))u'(f(p(k))-p^2(k))<u'(f(p(k))-p^2(k)),$$

であるから、$p^2(k)>p(k)\ge k^*$ がわかる。繰り返すことで、$p^n(k)>p^{n-1}(k)$ がわかる。$(p^n(k))$ という点列の有界性は、それが $k=k_0$ のときの問題 ((u,f,δ)-RCK) の解であることから示せる。したがってそれは上限 $k^+>k^*$ に収束する。すると p の連続性から $p(k^+)=k^+$ が言えるが、$\delta f'(k^+)<1$ であるから矛盾である。よって、$k\ge k^*$ であれば $p(k)\le k$ でなければならない。特に、$p(k^*)\le k^*$ がわかる。

次に、$p(k)<k\le k^*$ であるとすれば、同じ推論から $p^2(k)<p(k)$ を得る。よって $p^n(k)<p^{n-1}(k)$ である。明らかに $(p^n(k))$ は有界なので、それはある $k^+\ge 0$ に収束する。$k^+>0$ ならば $p(k^+)=k^+$ から矛盾が示せるから、$k^+=0$ でなければならない。すると、

$$\begin{aligned}
u'(f(k)-p(k))&=\delta f'(p(k))u'(f(p(k))-p^2(k))\\
&=(\delta f'(p(k)))(\delta f'(p^2(k))u'(f(p^2(k))-p^3(k))\\
&=...\\
&=\prod_{n=1}^{N}(\delta f'(p^n(k)))u'(f(p^N(k))-p^{N+1}(k)),
\end{aligned}$$

が成り立つことになる。しかし $\delta f'(p^n(k))>\delta f'(p(k))>1$ なので上式右辺の積は $+\infty$ に発散し、したがって $N\to\infty$ のとき $u'(f(p^N(k))-p^{N+1}(k))\downarrow 0$ が成り立たなければならないことになる。$p^N(k)\to 0$ なのでこれは $\lim_{c\downarrow 0}u'(c)=+\infty$ と矛盾する。よって、$k\le k^*$ ならば $p(k)\ge k$ でなければならない。特に $p(k^*)\ge k^*$ であり、したがって前の結果と合わせて $p(k^*)=k^*$ を得る。p は増加関数であるから、$k<k^*$ ならば $p(k)<p(k^*)=k^*$ であり、また $k>k^*$ ならば $p(k)>p(k^*)=k^*$ である。よっていず

れにせよ $p^n(k)$ は単調な点列であり、したがってある $k^+ > 0$ に収束しなければならない。p の連続性から $p(k^+) = k^+$ であり、よって $k^+ = k^*$ がわかる。これで (ii) と (iii) が示せた。明らかに $f'(k^*) = \frac{1}{\delta} > 1$ であるから (iv) が成り立つ。

次に、

$$u'(f(k) - p(k)) = \prod_{n=1}^{N} \frac{f'(p^n(k))}{f'(k^*)} u'(f(p^N(k)) - p^{N+1}(k)),$$

という方程式を思いだそう。$N \to \infty$ のとき、$p^N(k) \to k^*$ が成り立つ。よって、(5.2) の無限積は収束しなければならず、

$$u'(c(k)) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{f'(p^n(k))}{f'(k^*)} u'(c^*),$$

が成り立つ。よって (vi) がわかった。u' は減少的なので、

$$c(k) = (u')^{-1}(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{f'(p^n(k))}{f'(k^*)} u'(c^*)),$$

となるが、右辺は k の増加関数なので、c もそうである。よって (v) が言えた。以上で証明が完成する。 ■

(II) の証明：

まず、(5.2) は任意の $k > 0$ について収束することに注意する。次に、それが k について連続であることを示そう。そのために、次の事実を頻繁に使う。$N \geq 1$ に対して、無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することと、$\prod_{n=N+1}^{\infty} a_n$ も収束することは同値で、$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \prod_{n=1}^{N} a_n \times \prod_{n=N+1}^{\infty} a_n$ が成り立つ。証明は容易であるから省略する。

さて、$f_n(k) = \frac{f'(p^n(k))}{f'(k^*)}$ とすれば $f_n(k)$ は連続な減少関数であり、(5.2) 式の無限積は $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(k)$ と書き換えられる。$k > 0$ と $\varepsilon > 0$ をひとつ固定し、$0 < k_1 < k < k_2$ となる k_1 と k_2 をひとつ取る。無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(k_i)$ は正の値に収束するので、

$$\prod_{n=N}^{\infty} f_n(k_i) = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} f_n(k_i)}{\prod_{n=1}^{N-1} f_n(k_i)},$$

となるが、右辺は $N \to \infty$ のとき 1 に収束する。よって十分大きな N を取れば $\prod_{n=N}^{\infty} f_n(k_1) < 1 + \varepsilon$ とできる。よってそれが $i = 1, 2$ の双方に対して成り立つ N に対しては、$|\prod_{n=N}^{\infty} f_n(k_1) - \prod_{n=N}^{\infty} f_n(k_2)| < 2\varepsilon$ となる。各 f_n は減少関数なので、このとき $k_1 < \hat{k} < \bar{k} < k_2$ となる任意の $\hat{k}, \bar{k}$ に対して $|\prod_{n=N}^{\infty} f_n(\hat{k}) - \prod_{n=N}^{\infty} f_n(\bar{k})| < 2\varepsilon$ となる。また、$n = 1, ..., N-1$ に対して、f_n は連続なので、$\delta_n > 0$ を十分小さく取れば $|\hat{k} - k| < \delta_n$

である限り $|f_n(\hat{k})-f_n(k)|<\varepsilon$ である。したがって $\delta=\min\{\delta_1,...,\delta_{N-1},k-k_1,k_2-k\}$ とすれば、$|\hat{k}-k|<\delta$ であるとき、

$$\begin{aligned}\left|\prod_{n=1}^{\infty}f_n(\hat{k})-\prod_{n=1}^{\infty}f_n(k)\right| &\le |f_1(\hat{k})-f_1(k)|\left|\prod_{n=2}^{\infty}f_n(\hat{k})\right|+|f_1(k)|\left|\prod_{n=2}^{\infty}f_n(\hat{k})-\prod_{n=2}^{\infty}f_n(k)\right|\\ &\le ...\\ &\le \sum_{n=1}^{N-1}\left|\prod_{i=1}^{n-1}f_i(k)\right||f_n(\hat{k})-f_n(k)|\left|\prod_{m=n+1}^{\infty}f_n(\hat{k})\right|\\ &\quad+\left|\prod_{n=1}^{N-1}f_n(k)\right|\left|\prod_{n=N}^{\infty}f_n(\hat{k})-\prod_{n=N}^{\infty}f_n(k)\right|\\ &<\left(\sum_{n=1}^{N-1}\left|\prod_{i=1}^{n-1}f_i(k)\right|\left|\prod_{m=n+1}^{\infty}f_n(k_1)\right|+2\left|\prod_{n=1}^{N-1}f_n(k)\right|\right)\varepsilon,\end{aligned}$$

となる。これで (5.2) の連続性が示せた。

よって u は定義域の内点で連続微分可能である。(5.2) は正なので、定義域の内点で $u'>0$ であり、よって u は単調増大である。(5.2) は k の増加によって減少するので、u' は x の減少関数であり、よって u は単調増大で狭義凹である。$k<k^*$ のとき $p^{-1}(k)\in]0,k[$ が存在することは容易に言えるため、$\lim_{x\downarrow 0}u'(x)=+\infty$ は容易に示せる。

次に、$x\in[0,\sup_k c(k)]$ に対しては $\bar{u}(x)=u(x)$ とし、また $x>\sup_k c(k)$ に対しては $\bar{u}(x)=u(\sup_k c(k))+[\inf_{y\in]0,\sup_k c(k)[}u'(y)](1-e^{\sup_k c(k)-x})$ と定義する。さらに $\bar{u}(0)=\lim_{x\downarrow 0}\bar{u}(x)$ としよう。すると $\bar{u}$ は $\mathbb{R}_{++}$ 上で定義された $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ に値を持つ関数で、非減少かつ凹で 0 を除いて連続微分可能、さらに $\lim_{x\downarrow 0}\bar{u}'(x)=+\infty$ が成り立つ。これらの仮定があれば、任意の $k_0>0$ に対して問題 ($(\bar{u},f,\delta)$-RCK) は解を持つ。$V(k)$ を $k_0=k$ のときの問題 ($(\bar{u},f,\delta)$-RCK) の解が持つ目的関数の値としよう。すると V は凹であり、以下の関数方程式の解である。

$$V(k)=\max_{k'\in[0,f(k)]}\{\bar{u}(f(k)-k')+\delta V(k')\}, \tag{5.3}$$

ここで、右辺の最大化問題は一意的な解を持つことを証明しよう。解が存在することは既知の結果である：実際、k_0 から始まる ($(\bar{u},f,\delta)$-RCK) の解 $(k_t^*)_t$ を取ってきて、k_1^* を当てはめればそれが上の問題の解となる。仮に $\inf_{y\in]0,\sup_k c(k)[}u'(y)>0$ であれば、$\bar{u}$ は狭義凹であるため、一意性は明らかである。そこで $\inf_{y\in]0,\sup_k c(k)[}u'(y)=0$ であると仮定しよう。$f'(\hat{k})=1$ となるような $\hat{k}$ をひとつ取っておくと、$\hat{k}>k^*$ であるから、$f(\hat{k})-\hat{k}<f(\hat{k})-p(\hat{k})=c(\hat{k})$ が成り立つ。よって、任意の $k_0>0$ を初期値とする問題 ($(\bar{u},f,\delta)$-RCK) の任意の解 (k_t^*) に対して、$f(k_t^*)-k_{t+1}^*<\sup_k c(k)$ となる t は無数に存在しなければならない。ここで、$f(k_{t'}^*)-k_{t'+1}^*>\sup_k c(k)$ となる t' があったと仮定し、$t''>t'$ かつ $f(k_{t''}^*)-k_{t''+1}^*<\sup_k c(k)$ となる t'' を取る。ここで $k_{t'+1}=k_{t'+1}^*+\varepsilon$ と

し、$s = 2, ..., t'' - t'$ に対しては $k_{t'+s} = f(k_{t'+s-1}) - (f(k^*_{t'+s-1}) - k^*_{t'+s})$ として、それ以外の t に対しては $k_t = k^*_t$ と定義しよう。すると十分 $\varepsilon > 0$ が小さいとき、$(k_t)_t$ は問題 ($(\bar{u}, f, \delta)$-RCK) の制約条件を満たし、$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \bar{u}(f(k_t) - k_{t+1}) > \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \bar{u}(f(k^*_t) - k^*_{t+1})$ が成り立つことがわかるが、これは $(k^*_t)_t$ が解であったという当初の仮定に矛盾する。よって $f(k^*_t) - k^*_{t+1} \le \sup_k c(k)$ がすべての t に対して成立する。特に $f(k_0) - k^*_1 < \sup_k c(k)$ であるから、(3) の解は $\{k' \in [0, f(k)] | f(k) - k' \ge \sup_k c(k)\}$ 上にはひとつも存在しないことがわかる。一方で $\bar{u}$ は $[0, \sup_k c(k)]$ に限定すれば狭義凹であるため、これで解の一意性が言えた。

そこで $q(k)$ をその解としよう。すると $q(k) = k$ となる $k > 0$ は k^* のみで、さらに k^* は大域安定であることが先ほどと同様にして示せる。q は内点解なので、最大化の一階条件から、

$$\bar{u}'(f(k) - q(k)) = \frac{f'(q(k))}{f'(k^*)} \bar{u}'(f(q(k)) - q^2(k)),$$

が示せる。一方で $\bar{u}$ の定義から、

$$\bar{u}'(f(k) - p(k)) = \frac{f'(p(k))}{f'(k^*)} \bar{u}'(f(p(k)) - p^2(k)),$$

であることがわかっている。仮にある k について、$p(k) > q(k)$ であるとしよう。すると $\bar{u}'(f(k) - p(k)) > \bar{u}'(f(k) - q(k))$ かつ $f'(p(k)) < f'(q(k))$ であるから、$\bar{u}'(f(p(k)) - p^2(k)) > \bar{u}'(f(q(k)) - q^2(k))$ でなければならず、よって $p^2(k) > q^2(k)$ でなければならない。繰り返すことで、$p^n(k) > q^n(k)$ を得る。$d(k) = f(k) - q(k)$ としよう。このとき、$c(k) < d(k)$ であるから、$c(k) \in]0, \sup_k d(k)[$ であり、よって $c(k) = d(d^{-1}(c(k)))$ である。そこで、

$$\bar{u}'(c(k)) = \frac{f'(q(d^{-1}(c(k))))}{f'(k^*)} \bar{u}'(d(q(d^{-1}(c(k)))))$$

となる。これを繰り返せば、

$$\bar{u}'(c(k)) = \prod_{n=1}^{N} \frac{f'(q^n(d^{-1}(c(k))))}{f'(k^*)} \bar{u}'(d(q^N(d^{-1}(c(k))))),$$

を得る。k^* は大域安定なので、$\bar{u}'(d(q^N(d^{-1}(c(k))))) \to \bar{u}'(d(k^*))$ となるが、$q(k^*) = k^* = p(k^*)$ なので $d(k^*) = c^*$ であり、よって、

$$\bar{u}'(c(k)) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{f'(q^n(d^{-1}(c(k))))}{f'(k^*)},$$

を得る。一方で $\bar{u}$ の定義から、

$$\bar{u}'(c(k)) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{f'(p^n(k))}{f'(k^*)},$$

であることがわかる。よって、$d^{-1}(c(k)) > k = d^{-1}(d(k))$ であるため $c(k) > d(k)$ となるが、当初の仮定 $p(k) > q(k)$ から $c(k) < d(k)$ が言えるので、矛盾が生ずる。よって $p(k) \le q(k)$ でなければならない。

逆に $p(k) < q(k)$ であるとしよう。先ほどと同様の推論から、$p^n(k) < q^n(k)$ がすべての n に対して示せる。$c(k) > d(k)$ であるから $d(k) \in]0, \sup_k c(k)[$ であり、よって $\bar{u}$ の定義から、

$$\bar{u}'(d(k)) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{f'(p^n(c^{-1}(d(k))))}{f'(k^*)},$$

である。一方、先ほどと同様にして

$$\bar{u}'(d(k)) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{f'(q^n(k))}{f'(k^*)},$$

が示せる。ここから $c^{-1}(d(k)) > k = c^{-1}(c(k))$ となり、$d(k) > c(k)$ がわかるがこれは矛盾である。よって $p(k) \ge q(k)$ でなければならず、先ほどの結果と合わせて $p(k) = q(k)$ を得る。故に、p は問題 $((\bar{u}, f, \delta)$-RCK) の政策関数であることがわかった。故にそれは $((u, f, \delta)$-RCK) の政策関数でもある。以上で証明が完成した。 ■

(III) の証明：

すでに示したのと同様の論理によって、任意の $x \in]0, \sup_k c(k)[$ に対して、

$$v'(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{f'(p^n(c^{-1}(x)))}{f'(k^*)} v'(c^*),$$

が成り立つ。よって積分すれば、

$$v(x) = v(c^*) + v'(c^*) \int_{c^*}^{x} \frac{f'(p^n(c^{-1}(y)))}{f'(k^*)} dy = v'(c^*)u(x) + v(c^*),$$

となって証明が終わる。 ■

第 6 章

結論と補遺

本稿で我々は、さまざまな形で消費者の選好を観測がより容易であるものから算出する手法について研究し、一定の成果を挙げた。

本稿最後となるこの章では、前章までで行ってきた議論をこれからいかに拡張できるかということと、その問題点について触れる。

6.1 滑らかさを落とす

まず、なによりも最初に考えられるのは定理 4.1 の強化である。この定理の (II) は C^2 級以上の滑らかさがないと証明できないが、これは補題 7.3 で u^g の二階微分を使わなければならないからという事実に全面的に依存している。しかし、(II) の証明は事実上 Otani (1983) の簡単な拡張であり、同論文は準凹関数の特徴付け定理である。準凹性の特徴付け定理で二階微分を用いないものは他にもあるので、それを使えば、(II) の証明を補題 7.3 に依存せずに行えるかもしれない。

これがうまく行けば、定理 4.2 や命題 4.1 など、C^2 級以上が条件であった 4 章の結果はすべて C^1 級以上という形に書き改めることができる。特に定理 4.4 を C^1 級にまで引き上げられるのは有益であろう。これが拡張の方向性としてはいちばん現実的である。

次に、そもそも連続性すら取り払うことができる可能性もある。たとえば通常の効用関数から導出された無差別曲線は凸型をしているため、右側微分と左側微分を共に持つ。もし右側微分だけから無差別曲線を再構築することができるのであれば、g の連続性を取り払うことが可能である。このために必要なのはおそらく無差別曲線の絶対連続性のみであろう。定理 4.1 にこれを適用できれば、我々の技術の適用範囲は $S_f(p,m)$ の階数が $n-1$ より小さい需要関数まで広がることになり、極めて大きな進展であると言える。それはさすがに難易度が高いと思われるが、定理 3.2 の拡張は比較的容易にできるかもしれない。

6.2 $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ への拡張

次の可能性は、端点を含めた消費集合に直して積分可能性の議論ができるかどうかである。定理 3.2 の (II) や (III)、定理 4.1 などは逆需要関数に頼っているが、端点を含めると逆需要関数はうまく定義できない場合がある。しかしうまく定義できなくても、たかだか端を埋めるだけならできるのではないか？　と考えがちなのだが、次の例がその甘い考えを戒めてくれる。

例 4 (復元不可能な例) 最初に、次のような関数を見てみよう。

$$h_1(c) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{c^2}} & (\text{if } c > 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

この関数は非常に有名で、次のような特徴を持つ。第一に、この関数は $c = 0$ を含むすべての点で何回でも微分可能である。第二に、この関数は $c > 0$ の範囲内で増加的である。第三に、$c \to \infty$ のとき、この関数は 1 に収束する。

次に、

$$h_2(c) = 1 - \frac{h_1(1-c)}{h_1(1)}$$

$$h_3(c) = \tan(\frac{\pi}{2}h_1(c-2))$$

$$h(c) = h_2(c) + h_3(c)$$

と定義していく。すると h は非減少で、$c \in [1,2]$ に対して $h(c) = 1$ であり、$c \in \mathbb{R}_{++} \setminus [1,2]$ 上で増加的であり、$c \downarrow 0$ のとき $h(c) \downarrow 0$ で、また $c \uparrow \infty$ のとき $h(c) \uparrow \infty$ となる関数になる。

次に、$x, y > 0$ に対して以下の方程式

$$(x^{\frac{1}{1+\frac{1}{c}}} + y^{\frac{1}{1+\frac{1}{c}}})^{1+\frac{1}{c}} = h(c),$$

を考える。この式の左辺は c について減少的であるから、この方程式の解 $c(x,y)$ は一意に定まる。さらに陰関数定理によって、c は C^∞ 級である。そこで次のような逆需要関数、

$$g(x,y) = (x^{-\frac{1}{1+c(x,y)}}, y^{-\frac{1}{1+c(x,y)}}).$$

について考えよう。すると、$c(x,y)$ が $\succsim^g$ の効用関数となることを容易に示せる。

さて、この $\succsim^g$ を $\mathbb{R}^2_+$ 上に拡張することを考えよう。もしも $y \neq 1$ であれば、$(0,y)$ に対応する無差別曲線は $c^{-1}(h^{-1}(y))$ ただひとつに定まる。したがって y は効用水準 $h^{-1}(y)$

に対応するという形で選好を拡張できる。同様に、$x \neq 1$ ならば $(x,0)$ は効用水準 $h^{-1}(x)$ に対応するとして拡張できる。

しかし $(0,1)$ や $(1,0)$ に対しては簡単に拡張することができない。いま、$d \in [1,2]$ に対して $h(d)=1$ なので、$c^{-1}(d)$ はすべて $(0,1)$ および $(1,0)$ を極限点として持つ。ここからただちにわかるのは、$\succsim^g$ を連続性と推移性を保ったまま $\mathbb{R}^2_+$ 上に拡張することはできないという事実である。実際、そのような拡張 $\succsim$ があるとし、$c(x,y)=2$ かつ $c(z,w)=1$ であるような $x,y,z,w>0$ を取ってくれれば、連続性から $(x,y) \sim (0,1) \sim (z,w)$ であるため推移性から $(x,y) \sim (z,w)$ を得るが、$(x,y) \succ^g (z,w)$ であるためこれはあり得ない。

もちろん、推移性と連続性のどちらかを諦めれば、$\succsim^g$ の拡張は行える。しかし、その場合には別の問題が生じることになる。つまり、どちらを諦めても復元可能性に問題が生じる。推移性を諦めた場合に復元可能性が壊れるのはこの例に限らず、ほとんどすべての選好に対して成り立つので、ここでは問題にしない。そこで、連続性を諦めて推移性を取った場合を考えてみよう。しかしこの場合も、$(0,1)$ あるいは $(1,0)$ がどの効用水準に対応するかについての、自然な決め方は存在しない。比較的妥当だと思えるのは $[1,2]$ 区間内部のどこかの効用水準と同じ程度によいとすることであるが、それでもまだ、対応する選好は無限個存在する。厄介なことにどの選好でも $(0,1)$ や $(1,0)$ は需要の値としては現れないので、それらの無限個の選好はすべて同じ需要関数に対応することになり、復元可能性は壊れてしまう。

多少救いになりそうなのは、選好の連続性を部分的にしか諦めないことで復元可能性が復活することである。たとえば上半連続性を仮定することにすれば、$(0,1)$ あるいは $(1,0)$ は効用水準 2 に対応する形の拡張以外にはあり得なくなる。したがって $\succsim^g$ は推移的かつ上半連続な $\mathbb{R}^2_+$ への拡張をただひとつ持つ。しかし同様に、たとえば下半連続性を仮定すれば、$(0,1)$ あるいは $(1,0)$ は効用水準 1 に対応する形の拡張以外にあり得なくなる。この上半連続な拡張と下半連続な拡張のどちらが自然であるかは、よくわからない。結局、おなじ需要関数に対応する同程度に説得力のある選好が複数存在するという問題は、この例では解決できない。

従って、このようなことが起こる例では定理 4.1 などの拡張は一筋縄ではいかないことがわかる。もう少し詳しい説明が細矢 (2010) にあるので、参考にされたい。

6.3 RCK モデルの拡張

最後に考えられるのは、5 章の結果の拡張である。5 章の結果は基礎の RCK モデルに限定して行ったが、これはもっと一般のモデルに拡張できるかもしれない。特に、k 以外の変数がある場合のモデルに議論を拡張することは飛躍的に応用可能性を高めてくれるの

で、その方向の拡張が望まれる。

しかし、多変数化を試みる際にすぐにぶつかる問題がある。それは、解かなければいけない問題が偏微分方程式になるという問題である。一変数のときは、一階の条件を展開していけば簡単に

$$u'(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{f'(p^n(c^{-1}(x)))}{f'(k^*)} u'(c^*),$$

という形が作れた。だから u を求めるには右辺を積分するだけでよかった。しかし二変数以上になると、こう簡単にはいかなくなる。

ただし、ストック変数でない変数、たとえば労働などを入れるに当たっては、それほど難易度は上がらないかもしれない。いまストック変数を k、そうでない変数を ℓ として、価値関数 $V(k,\ell)$ を構築したとき、ℓ はストックでないから価値関数に与える影響はなく、したがって V は ℓ については定数関数になる。この事実を使えば、もう少しだけ進んだ成果を挙げることができる可能性がある。

第 7 章

定理 4.1 の証明

7.1 補助定理：平面幾何からの結果

我々の目標は定理 4.1 であるが、その前にいくらかの準備を行わなければならない。

最初に、互いに一次独立であるような任意の $(x, v) \in \Omega^2$ を取り、それに対して以下の記号群を定義しておく[*1]。

$$a_1 = \frac{1}{\|x\|}x$$
$$a_2 = \frac{1}{\|v - (v \cdot a_1)a_1\|}(v - (v \cdot a_1)a_1)$$

a_1, a_2 は x, v から Gram-Schmidt 法によって生成される平面 $\mathrm{span}\{x, v\}$ の正規直交基底である。

$$Py = (y \cdot a_1)a_1 + (y \cdot a_2)a_2$$

P は $\mathbb{R}^n$ から $\mathrm{span}\{x, v\}$ への正射影である。

$$Rw = (w \cdot a_1)a_2 - (w \cdot a_2)a_1$$

R は平面 $\mathrm{span}\{x, v\}$ 上で、ベクトルの長さを保ちながら 90 度回転させる回転作用素に対応する。R は形式上 $\mathbb{R}^n$ 全体で定義されているように見えるが、回転作用素としての意味をはっきりさせるために、我々は R の定義域が $\mathrm{span}\{x, v\}$ であると考えることにする。

$$v_1 = \arg\min\{w \cdot a_1 | w \in P\mathbb{R}^n_+, \|w\| = 1, w \cdot a_2 \geq 0\}$$
$$v_2 = \arg\min\{w \cdot a_1 | w \in P\mathbb{R}^n_+, \|w\| = 1, w \cdot a_2 \leq 0\}$$

[*1] 以下の記号群はすべて (x, v) の関数であるのだが、その変数は誤解の余地がない場合は省略して書くことにする。たとえば $a_1(x, v)$ は a_1 と略記する。

後で示すが、v_1, v_2 は凸錐 $P\mathbb{R}^n_+$ を張るベクトルになる。

$$\begin{aligned} y_1 &= \{s_1 v | s_1 \in \mathbb{R}\} \cap \{x + s_2 R v_1 | s_2 \in \mathbb{R}\} \\ y_2 &= \{s_3 v | s_3 \in \mathbb{R}\} \cap \{x + s_4 R v_2 | s_4 \in \mathbb{R}\} \\ \Delta &= \{w \in \mathrm{span}\{x, v\} | w \cdot Rv \le 0,\ w \cdot v_1 \ge x \cdot v_1,\ w \cdot v_2 \le x \cdot v_2\} \end{aligned}$$

y_1 は v 方向への原点を通る直線と、x を通る傾き Rv_1 の直線の交点である。y_2 も同様。後で厳密に示すが、$\Delta = \mathrm{co}\{x, y_1, y_2\}$ であり、これは半空間 $\{w \in \mathrm{span}\{x, v\} | w \cdot v \le 0\}$ と $x + RP\mathbb{R}^n_+$ の共通部分と一致する。この集合がコンパクトであるという事実が定理 4.1 の (I) の証明のために本質的に重要である。

また例外的に y_1, y_2 のみ、同一直線上にあるような二点 $(x, v) \in \Omega^2$ に対しても $y_1(x, v) = y_2(x, v) = x$ と定義しておく。

最後に定数をひとつ定義しておく。

$$C = \|x\| \|v - (v \cdot a_1) a_1\|$$

すると次の結果が成り立つ[*2]。

補題 7.1 (細矢 (2009)) a) $y \in \mathbb{R}^n$ かつ $w \in \mathrm{span}\{x, v\}$ のときには必ず $y \cdot w = Py \cdot w$ が成り立つ。

b) R は $Ra_1 = a_2$ および $Ra_2 = -a_1$ を満たすただひとつの $\mathrm{span}\{x, v\}$ 上の直交変換である。さらに、もし T が $\mathrm{span}\{x, v\}$ 上の直交変換であり、また任意の $w \in \mathrm{span}\{x, v\}$ に対して $w \cdot Tw = 0$ を満たすのであれば、$T = R$ か $T = -R = R^{-1} = R^3$ のいずれかが成り立つ。特に、$z \in \mathrm{span}\{x, v\} \cap \mathbb{R}^n_{++}$ かつ $[x, z] \cap \{cv | c \in \mathbb{R}\} = \emptyset$ であれば、必ず $R(x, v) = R(z, v)$ が成り立つ。

c) v_1 と v_2 は連続な一価関数であり、$P\mathbb{R}^n_+ = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 | c_1, c_2 \ge 0\}$ が成り立つ。

d) y_1 と y_2 は連続な一価関数であり、さらに任意の $x, v \in \Omega$ について $y_1(x, v),\ y_2(x, v) \in \Omega$ となる[*3]。

e) $\Delta = (x + RP\mathbb{R}^n_+) \cap \{w \in \mathrm{span}\{x, v\} | w \cdot Rv \le 0\} = \mathrm{co}\{x, y_1, y_2\}$ が成り立つ。従って Δ は Ω 内のコンパクト集合である。

f) 任意の $y \in \mathbb{R}^n$ に対して $(y \cdot x)v - (y \cdot v)x = C \cdot RPy$ が成り立つ。

以下、結果を直観的に理解できるように、簡単な場合についてこれらの記号群を実計算してみよう。

$x = (2, 1), v = (1, 2)$ とする。このとき、

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1),\ a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2),$$

[*2] これは細矢 (2009) において最初に証明された。

[*3] y_1, y_2 の定義域だけは他の記号と異なり Ω^2 であるということに注意。

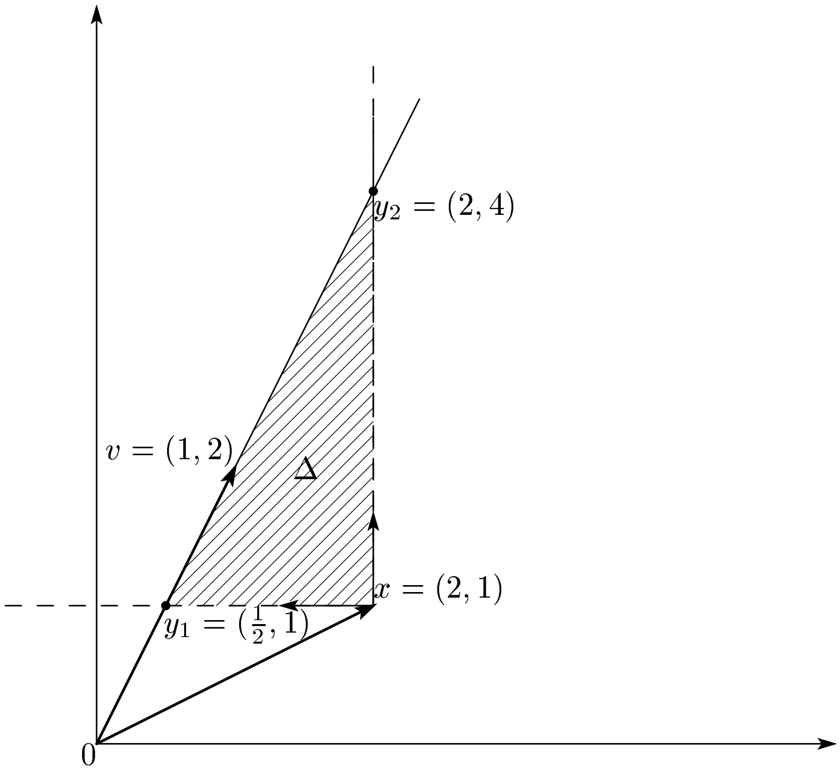

図 7.1　実計算の例

である。P は恒等変換 I に等しい。また簡単な計算により、任意の $z=(z^1,z^2)$ に対して

$$Rz=(-z^2,z^1),$$

であることを示せる。$P\mathbb{R}^2_+=\mathbb{R}^2_+$ であるから、定義どおりに計算すれば $v_1=(0,1)$ および $v_2=(1,0)$ を得る。従って $Rv_1=(-1,0), Rv_2=(0,1)$ である。これを用いて y_1,y_2 を計算すれば、$y_1=(\frac{1}{2},1)$ であり、また $y_2=(2,4)$ であることがわかる。そして、

$$\Delta=\{(z^1,z^2)|z^2\le 2z^1, z^2\ge 1, z^1\le 2\},$$

を得る。

図 7.1 はこれらの結果の一部を図示したものである。これを見れば、上で挙げたいくつかの性質、特に e) などについては確かに成り立っていることが確認できるであろう。

7.1.1　a) の証明

これは有名な事実なので証明を略す。 ■

7.1.2 b) の証明

$\{a_3, ..., a_n\} \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathrm{span}\{x, v\}$ の直交補空間における任意の正規直交基底とし、また A は i 列目が a_i と等しくなるような n 次正方行列であるとする。ここで、

$$T^* = A \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} A^{-1},$$

と定義する。すると T^* は直交変換であることがわかる。明らかに $R = T^*|_{\mathrm{span}\{x,v\}}$ であるから、R もまた直交変換である。$Ra_1 = a_2$、$Ra_2 = -a_1$、$R^{-1} = -R = R^3$ は明白であろう。

次に、T は任意の $w \in \mathrm{span}\{x, v\}$ に対して $w \cdot Tw = 0$ となるような $\mathrm{span}\{x, v\}$ 上の直交変換であるとする。$\dim(\mathrm{span}\{x, v\}) = 2$ であるから、$Ta_1 = a_2$ か $Ta_1 = -a_2$ のいずれかである。

$Ta_1 = a_2$ であったとしよう。もし $Ta_2 = -a_1$ であるならば、明らかに $T = R$ である。そこでそうでないと仮定してみよう。$a_2 \cdot Ta_2 = 0$ かつ $\dim(\mathrm{span}\{x, v\}) = 2$ であるから、$Ta_2 = a_1$ でなければならない。すると $T(a_1 + a_2) = a_1 + a_2$ であるため、$0 = (a_1 + a_2) \cdot T(a_1 + a_2) = 2$ となるがこれは矛盾である。従ってこれはあり得ず、$T = R$ が正しい。対称的な議論により、$Ta_1 = -a_2$ ならば $T = R^{-1}$ であることもわかる。

R の一意性は上の事実から明白である。最後に、$[x, z] \cap \{cv | c \in \mathbb{R}\} = \emptyset$ であるような $z \in \mathrm{span}\{x, v\} \cap \Omega$ を任意に選ぶ。記号の節約のために $R(x, v)$ を R と書こう。任意の w について $w \cdot R(z, v)w = 0$ であるから、$R(z, v) = R$ と $R(z, v) = -R$ のどちらかしかあり得ない。そこで仮に $R(z, v) = -R$ であったとしてみよう。$w(t) = R((1-t)x + tz, v)v$ と定義する。w は $[0, 1]$ 上で連続であり、また $w(t) = Rv$ と $w(t) = -Rv$ のいずれかが成り立つ。従って $w^{-1}(Rv)$ と $w^{-1}(-Rv)$ は非空で共通部分を持たない $[0, 1]$ 内の閉集合であり、さらに $w^{-1}(Rv) \cup w^{-1}(-Rv) = [0, 1]$ であるが、これは $[0, 1]$ の連結性に矛盾する。以上で証明が完成した。 ■

7.1.3 c) の証明

任意の $w \in P\mathbb{R}^n_+$ を選び、$Py = w$ となるような $y \in \mathbb{R}^n_+$ を選ぶ。1) から、$w \cdot a_1 = y \cdot a_1$ であり、また $a_1 \in \Omega$ であるから、$w \cdot a_1 \geq 0$ と $w \cdot a_1 = 0 \Leftrightarrow w = 0$ がわかる。従って

$w \in P\mathbb{R}^n_+$ かつ $\|w\| = 1$ であればうまく $c \in]-1, 1[$ を選んで

$$w = \sqrt{1-c^2}\ a_1 + ca_2,$$

となるようにできる。$c = w \cdot a_2$ であることに注意する。ここで、

$$c^* = \max\{\frac{1}{\|Py\|}Py \cdot a_2 | y \in \mathbb{R}^n_+, \sum_{i=1}^n y^i = 1\},$$

と定義しよう。$w \in P\mathbb{R}^n_+$ かつ $\|w\| = 1$ であるような任意の w を取り、$Pz = w$ となる $z \in \mathbb{R}^n_+$ を取ってくる。$w \neq 0$ なので $z \neq 0$ であり、従って $\sum_{i=1}^n z^i > 0$ である。そこで $y = \frac{1}{\sum_{i=1}^n z^i} z$ とする。すると $\frac{1}{\|Py\|}Py = w$ であるため、c^* の定義から $w \cdot a_2 \le c^*$ である。従って

$$v_1 = \sqrt{1-(c^*)^2}\ a_1 + c^* a_2,$$

となることがわかり、v_1 は well-defined な一価関数である。また Berge の定理を c^* に適用すれば c^* は (x, v) に関する連続関数であり、故に v_1 も連続である。v_2 についても同様にして同じ主張を確かめることができる。

$P\mathbb{R}^n_+$ は a_1 の近傍を含むので、$v_1 \neq a_1 \neq v_2$ であることに注意。従って $v_1 \neq v_2$ がわかる。$a_1 \cdot v_1, a_1 \cdot v_2 > 0$ であるから、$v_1 \neq -v_2$ であり、従って v_1 は v_2 と一次独立である。

次に $K^* = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 | c_1, c_2 \ge 0\}$ と定義する。$P\mathbb{R}^n_+$ が凸錐なのは明白なので、$K^* \subset P\mathbb{R}^n_+$ は正しい。逆の包含関係を示すために、まず $a_1 \in K^*$ であることを示す。$a_2 \cdot v_1 > 0$ および $a_2 \cdot v_2 < 0$ から、$a_2 \cdot w = 0$ であるような $w \in [v_1, v_2]$ が存在する。$\dim(\mathrm{span}\{x, v\}) = 2$ であるからある $c \in \mathbb{R}$ に対して $w = ca_1$ であるが、v_1 は v_2 と一次独立なので $c \neq 0$ である。一方、$v_1, v_2 \in P\mathbb{R}^n_+$ であり $P\mathbb{R}^n_+$ は凸なので、$w \in P\mathbb{R}^n_+$ であり従って $c = w \cdot a_1 \ge 0$ である。故に $c > 0$ であり、よって $a_1 = c^{-1}w \in K^*$ がわかる。

さて、いよいよ $P\mathbb{R}^n_+ \subset K^*$ を示そう。このためには、$\|w\| = 1$ となるような任意の $w \in P\mathbb{R}^n_+$ に対して $w \in K^*$ となることを示せば十分である。そこで $w \in P\mathbb{R}^n_+$ かつ $\|w\| = 1$ としよう。仮に $w \cdot a_2 \ge 0$ であったとする。するとある $c \in [0, c^*]$ に対して $w = \sqrt{1-c^2}\ a_1 + ca_2$ である。すると $Rw = \sqrt{1-c^2}\ a_2 - ca_1$ であるから、

$$a_1 \cdot Rw = -c \le 0,$$
$$v_1 \cdot Rw = c^*\sqrt{1-c^2} - c\sqrt{1-(c^*)^2} \ge 0,$$

がわかる。故に $w^* \cdot Rw = 0$ となるような $w^* \in [v_1, a_1]$ が存在するが、$\dim(\mathrm{span}\{x, v\}) = 2$ なのである $d \in \mathbb{R}$ に対して $w^* = dw$ である。v_1 は a_1 と一次独立であるから $w^* \neq 0$ で、また $w^* \in P\mathbb{R}^n_+$ だから $w^* \cdot a_1 > 0$ がわかり、よって

$$d = \frac{w^* \cdot a_1}{w \cdot a_1} > 0,$$

となる。従って $w = d^{-1}w^* \in K^*$。同様に $w \cdot a_2 \le 0$ の時も v_1 の代わりに v_2 を用いて $w \in K^*$ を示すことができる。以上で証明が完成した。 ■

7.1.4 d) の証明

最初に x と v が互いに一次独立であるときを考えよう。$Py = v_1$ となるような $y \in \mathbb{R}^n_+$ を取ると、$y \neq 0$ であり、従って $v \cdot v_1 = v \cdot y > 0$ である。故に二つの直線 $\{cv|c \in \mathbb{R}\}$ と $\{x + dRv_1|d \in \mathbb{R}\}$ の任意の交点 $y = cv = x + dRv_1$ を取れば、

$$0 = cv \cdot Rv = x \cdot Rv + dRv_1 \cdot Rv = x \cdot Rv + dv_1 \cdot v,$$

であり、従って $d = -\frac{x \cdot Rv}{v_1 \cdot v}$ となる。この条件を満たす d の値はひとつしかなく、また逆に d を上の値に設定すれば $y = x + dRv_1$ は 2 直線の交点に来る。したがって y_1 は well-defined な一価関数である。またその (x, v) における連続性は上の d が (x, v) において連続であることから従う。y_2 についても同様。

以下、y_1, y_2 が共に Ω^2 全体の上で連続であることを示すのだが、その前に少々準備をしておく。まず $(x, v) \in \Omega^2$ を任意に取り、$\bar{x}(x, v) = \frac{(x \cdot v)}{\|v\|^2}v$ と定義する（つまり、x の v 方向への射影を $\bar{x}$ と書く、という意味)。$\bar{x} \in [y_1, y_2]$ を示そう。仮に x と v が同一直線上にあれば $\bar{x} = x$ であるから、この主張は自明である。よって以下では x と v は互いに一次独立であることを仮定する。$v \cdot (\bar{x} - x) = 0$ であるから、ある $c \in \mathbb{R}$ をうまく選べば $\bar{x} - x = cRv$ となる。一方で、$v \in P\mathbb{R}^n_+$ であるから、$c_1, c_2 \ge 0$ をうまく選べば $v = c_1v_1 + c_2v_2$ となる。よって $\bar{x} - x = cc_1Rv_1 + cc_2Rv_2$ である。

$y_1, \bar{x}, y_2$ はすべて直線 $\{dv|d \in \mathbb{R}\}$ に含まれており、また $y_1 \neq y_2$ である[*4]から、$t \in \mathbb{R}$ をうまく選べば $\bar{x} = (1-t)y_1 + ty_2$ となる。後は $t \in [0, 1]$ であることを示せば十分である。ここで $y_1 = x + s_1Rv_1,\ y_2 = x + s_2Rv_2$ であるとすれば、$\bar{x} - x = (1-t)s_1Rv_1 + ts_2Rv_2$ であることになる。従って $cc_1 = (1-t)s_1$ かつ $cc_2 = ts_2$ である。

一方で Cauchy-Schwarz の不等式により、

$$\begin{aligned} x \cdot Rv &= -(v \cdot a_2)(x \cdot a_1) \\ &= \frac{\|x\|}{\|v - (v \cdot a_1)a_1\|}[(v \cdot a_1)^2 - \|v\|^2] \\ &< 0, \end{aligned}$$

[*4] これは $v_1 \neq v_2$ から導かれる。

がわかる。$y_1 \cdot Rv = 0$ かつ $v \cdot v_1 > 0$ であるから、これらを総合して

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{v \cdot v_1} s_1 v \cdot v_1 \\ &= \frac{1}{v \cdot v_1} Rv \cdot s_1 Rv_1 \\ &= \frac{1}{v \cdot v_1} Rv \cdot (y_1 - x) \\ &> 0, \end{aligned}$$

がわかる。同様に $s_2 > 0$ も示せる。従って $(1-t) = \frac{cc_1}{s_1}$、$t = \frac{cc_2}{s_2}$ がわかる。$c_1, c_2 \geq 0$ なので $t(1-t) \geq 0$ であり、故に $t \in [0,1]$。これで $\bar{x} \in [y_1, y_2]$ が示せた。

さて、いよいよ y_1, y_2 が Ω^2 上で連続であることを示そう。x と v が互いに一次独立であるときはもう解決したので、ここではそうでないことを仮定する。Ω^2 内の点列 $((x_k, v_k))_k$ で $(x_k, v_k) \to (x, v)$ となるものを任意に取る。$\bar{x}(x_k, v_k) \in [y_1(x_k, v_k), y_2(x_k, v_k)]$ かつ $\bar{x}(x_k, v_k) \to x = \bar{x}(x, v)$ であるから、後は $\|y_2(x_k, v_k) - y_1(x_k, v_k)\| \to 0$ が示せれば、

$$\begin{aligned} \|y_i(x_k, v_k) - x\| &\leq \|y_i(x_k, v_k) - \bar{x}(x_k, v_k)\| + \|\bar{x}(x_k, v_k) - x\| \\ &\leq \|y_2(x_k, v_k) - y_1(x_k, v_k)\| + \|\bar{x}(x_k, v_k) - x\| \to 0, \end{aligned}$$

となって証明が終わる。そこでこれを目標としよう。x_k と v_k が同一直線上にあれば $\|y_2(x_k, v_k) - y_1(x_k, v_k)\| = 0$ なので、一般性を失うことなくすべての k に対して x_k は v_k と互いに一次独立であると仮定してよい。

以下、次の記号群を定義する。

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{v^i | i \in \{1, ..., n\}\},$$

$$A = \{y \in \mathbb{R}^n | y^i > \varepsilon \text{ for any } i \in \{1, ..., n\}\},$$

$$S = \{y \in \mathbb{R}^n | \|y\| = \varepsilon \text{ and } y^n = 0\},$$

および任意の $y \in A$ に対して、

$$M(y) = \max_z \{\|y_2(z, y) - y_1(z, y)\| | z - y \in S\}.$$

$y \in A$ かつ $z - y \in S$ であれば $z \in \Omega$ かつ y は z と一次独立である。y_1, y_2 はこのような (y, z) の点においては連続であるから、Berge の定理によって M は A 上で連続であることがわかる。次に、以下の二つの事実を示す。

i) 互いに一次独立な任意の $y \in A$, $z \in \Omega$ および任意の $c > 0$ に対して、もし $(1-c)y + cz \in \Omega$ であれば必ず $y_i((1-c)y + cz, y) - y = c(y_i(z, y) - y)$ となる。

ii) 互いに一次独立な任意の $y \in A,\ z \in \Omega$ および任意の $d > 0$ に対して、$y_i(dz, y) = dy_i(z, y)$ となる。

記号の節約のために $z(c) = (1-c)y + cz$ と書く。b) より、$R(z, y) = R(z(c), y) = R(dz, y)$ がわかる。また、$v_1(z, y) = v_1(z(c), y) = v_1(dz, y)$ は容易に示せる。従って $v_1(z, y)$ は v_1 と、$R(z, y)$ は R と略記することにしよう。$y_1(z, y) = z + sRv_1$ となるような $s \in \mathbb{R}$ を選ぶ。すると $(z(c) + csRv_1) \cdot Ry = c(z + sRv_1) \cdot Ry = 0$ であるから $z(c) + csRv_1 = y_1(z(c), y)$ であることがわかる。故に、

$$y_1(z(c), y) - y = z(c) + csRv_1 - y = c(z + sRv_1) - cy = c(y_1(z, y) - y),$$

となる。同様に $(dz + dsRv_1) \cdot Ry = 0$ であるから $dz + dsRv_1 = y_1(dz, y)$ であり、

$$y_1(dz, y) = d(z + sRv_1) = dy_1(z, y),$$

がわかる。y_2 についても同様。これで i) と ii) が示せた。

ここで $k > k^*$ ならば $v_k \in A$ となっているような数 k^* を選ぶ。$d_k = \frac{v_k^n}{x_k^n},\ x_k(c) = (1-c)v_k + cd_kx_k$ および $c_k = \frac{\varepsilon}{\|d_kx_k - v_k\|}$ と定義しよう。すると $x_k(c_k) - v_k \in S,\ (1 - c_k^{-1})v_k + c_k^{-1}x_k(c_k) = d_kx_k$ であり、また $M(v_k) \longrightarrow M(v),\ d_k \to \frac{v^n}{x^n},\ c_k \to +\infty$ であるから、

$$\begin{aligned}\|y_2(x_k, v_k) - y_1(x_k, v_k)\| &= d_k^{-1}\|y_2(d_kx_k, v_k) - y_1(d_kx_k, v_k)\| \\ &= d_k^{-1}c_k^{-1}\|y_2(x_k(c_k), v_k) - y_1(x_k(c_k), v_k)\| \\ &\le d_k^{-1}c_k^{-1}M(v_k) \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

がわかる。これで y_1, y_2 の連続性が示せた。

最後に、任意の $(x, v) \in \Omega^2$ に対して $y_1(x, v), y_2(x, v) \in \Omega$ であることを示そう。x と v が同一直線上にあれば自明なので、そうでないことを仮定する。我々は既に $y_1 = x + sRv_1$ となるような数 s は正であること、および $x \cdot Rv < 0$ であることを示している。ここから、

$$v \cdot Rx = R^{-1}v \cdot x = -Rv \cdot x > 0,$$

がわかる。一方で $Rv_1 \cdot Rx = v_1 \cdot x > 0$ もわかる。故に、

$$\begin{aligned}0 &< s \\ &= \frac{1}{Rv_1 \cdot Rx} sRv_1 \cdot Rx \\ &= \frac{1}{Rv_1 \cdot Rx}(x + sRv_1) \cdot Rx \\ &= \frac{1}{Rv_1 \cdot Rx} y_1 \cdot Rx,\end{aligned}$$

より、$y_1 \cdot Rx > 0$ を得る。従って、もし $y_1 = tv$ であるならば、

$$t = \frac{y_1 \cdot Rx}{v \cdot Rx} > 0,$$

であり、故に $y_1 \in \Omega$ がわかる。y_2 についても同様。これで d) の証明がすべて完成した。
■

7.1.5 e) の証明

まず最初に $v_1 \cdot Rv_2 > 0$ を示そう。実際、v_1, v_2 の定義から $v_1 \cdot a_1, v_1 \cdot a_2, v_2 \cdot a_1 > 0$ であり、また $v_2 \cdot a_2 < 0$ であるから、

$$\begin{aligned} v_1 \cdot Rv_2 &= v_1 \cdot [(v_2 \cdot a_1)a_2 - (v_2 \cdot a_2)a_1] \\ &= (v_1 \cdot a_2)(v_2 \cdot a_1) - (v_1 \cdot a_1)(v_2 \cdot a_2) > 0, \end{aligned}$$

となって主張は正しい。ここから $v_2 \cdot Rv_1 = R^{-1}v_2 \cdot v_1 = -Rv_2 \cdot v_1 < 0$ を得る。

次に $x + RP\mathbb{R}^n_+ = \{w \in \mathrm{span}\{x, v\} | w \cdot v_1 \geq x \cdot v_1 \text{ and } w \cdot v_2 \leq x \cdot v_2\}$ を示そう。まず $w \in \mathrm{span}\{x, v\}$ であると仮定してみよう。$\{Rv_1, Rv_2\}$ は $\mathrm{span}\{x, v\}$ の基底なので、$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ をうまく選べば $w - x = c_1 Rv_1 + c_2 Rv_2$ とできる。従って

$$(w - x) \cdot v_1 = c_2(v_1 \cdot Rv_2),\ (w - x) \cdot v_2 = c_1(v_2 \cdot Rv_1),$$

を得る。$v_1 \cdot Rv_2 > 0, v_2 \cdot Rv_1 < 0$ であるから、$c_2 \geq 0$ と $w \cdot v_1 \geq x \cdot v_1$ は同値であり、また $c_1 \geq 0$ と $w \cdot v_2 \leq x \cdot v_2$ は同値である。ここから主張していた結果を得る。以上の結果から $\Delta = \{w \in \mathrm{span}\{x, v\} | w \cdot Rv \leq 0\} \cap x + RP\mathbb{R}^n_+$ は直ちにわかる。

さて、$w \in \mathrm{co}\{x, y_1, y_2\}$ とする。$x, y_1, y_2 \in x + RP\mathbb{R}^n_+$ であり、また $x + RP\mathbb{R}^n_+$ は凸であるから、$w \in x + RP\mathbb{R}^n_+$ である。また我々は既に $x \cdot Rv < 0$ を示している。$y_1 \cdot Rv = y_2 \cdot Rv = 0$ であるから、$w \cdot Rv \leq 0$ でなければならない。故に $w \in \Delta$。

最後に、$w \in \Delta$ とする。$w \in x + RP\mathbb{R}^n_+$ であるから、$c_1, c_2 \geq 0$ をうまく選べば $w = x + c_1 Rv_1 + c_2 Rv_2$ となる。もし $c_1 = c_2 = 0$ であれば $w = x \in \mathrm{co}\{x, y_1, y_2\}$ となるので、以下では $c_1 > 0$ か $c_2 > 0$ のいずれか少なくとも片方が成り立っていると仮定しよう。$Rv_1 \cdot Rx > 0$ かつ $Rv_2 \cdot Rx > 0$ なので、$w \cdot Rx > 0$ がわかる。$x \cdot Rv < 0$ であり、また $w \in \Delta$ から $w \cdot Rv \leq 0$ でもある。さらに $(w - x) \in RP\mathbb{R}^n_+$ なので、$(w - x) \cdot Rv > 0$ である。これらの結果より、ある $c_3 \in \mathbb{R}$ と $c_4 \geq 1$ に対して $c_3 v = x + c_4(w - x)$ となっていることがわかる。この式を変形すると、

$$w = \frac{1}{c_4} c_3 v + (1 - \frac{1}{c_4})x,$$

となる。よって $w \in \mathrm{co}\{x, y_1, y_2\}$ を示すには、$c_3 v \in [y_1, y_2]$ を示せばよいことになる。$y_1 = c_5 v,\ y_2 = c_6 v$ としよう。すると後は $c_3 \in [c_5, c_6]$ が示せればよいことになる。

y_1 の定義から、$y_1 \cdot v_1 = x \cdot v_1$ である。一方、我々は既に $v_1 \cdot Rv_2 > 0$ であることを知っている。従って $w \cdot v_1 \geq y_1 \cdot v_1$ である。故に $c_3 \geq c_5$ を示すためには、$v \cdot v_1 > 0$ であればよいことになる。しかしこれは明白であろう。$c_3 \leq c_6$ も同様に示せる。以上で証明が完成した。■

7.1.6 f) の証明

これは単純な計算によって示せる。実際、

$$\begin{aligned}
CRPy &= CR[(y \cdot a_1)a_1 + (y \cdot a_2)a_2] \\
&= C[(y \cdot a_1)a_2 - (y \cdot a_2)a_1] \\
&= (y \cdot x)[v - (v \cdot a_1)a_1] - (y \cdot [v - (v \cdot a_1)a_1])x \\
&= (y \cdot x)v - (y \cdot x)(v \cdot a_1)a_1 - (y \cdot v)x + (y \cdot a_1)(v \cdot a_1)x \\
&= (y \cdot x)v - (y \cdot v)x,
\end{aligned}$$

であるから主張は正しい。■

7.2 (I) の証明

さて、いよいよ定理 4.1 の証明に入る。まず $x, v \in \Omega$ かつ x と v は互いに一次独立であるとしよう。ここで次の初期値問題：

$$\begin{array}{rcl}
\dot{y} &=& (g(y) \cdot x)v - (g(y) \cdot v)x \\
y(0) &=& x
\end{array} \tag{7.1}$$

を考え、その延長不能な解を $y(\cdot; x, v)$ と置く。我々が最初に示さねばならないことは $y(t; x, v) = cv$ となるような c, t の組が存在することであるが、y の軌道は平面 $\mathrm{span}\{x, v\}$ 上にあるため、これは $y(t; x, v) \cdot Rv = 0$ となる t の存在を示すことと同値である。補題 7.1 の f) から、$\dot{y} = CRPg(y)$ であることがわかるので、a) と b) から、

$$\frac{d}{dt}[y \cdot Rv] = CRPg(y) \cdot Rv = CPg(y) \cdot v = Cg(y) \cdot v > 0$$

がわかる。一方で $x \cdot Rv < 0$ をすでに示しているので、証明するべきは $y(t; x, v) \cdot Rv > 0$ となるような t の存在である。一方、$\dot{y} \in RP\mathbb{R}^n_+$ が常に成り立つので、$t > 0$ ならば $y(t; x, v) \in x + RP\mathbb{R}^n_+$ でなければならない。すると補題 7.1 の e) から、$t > 0$ のときに $y(t; x, v) \cdot Rv > 0$ と $y(t; x, v) \notin \Delta$ は同値であることがわかる。

そこで、そのような t の存在を背理法を用いて示してみよう。仮にそのような t がないとすると、y の軌道はずっとコンパクト集合 Δ の内部にとどまることになる。$y(\cdot; x, v)$ は延長不能な解であるから、その定義域は $]a, +\infty[$ という形でなければならない。そこで、

$C^* = \min\{CRP_V g(w) \cdot Rv | w \in \Delta\}$ と定義すれば、$C^* > 0$ であり、したがって $t > \frac{x \cdot Rv}{C^*}$ のときに $y(t; x, v) \cdot Rv > 0$ となって矛盾が生じる。これで示せた。

したがって、$t(x,v)$ は well-defined である。また合わせて、$y([0, t(x,v)]; x, v) \subset \Delta(x,v)$ であるという結果が得られた。$t(x,v)$ は $y(t; x, v) \cdot Rv = 0$ という陰関数の t についての解であるから、陰関数定理によって、関数 t は $\{(x,v) \in \Omega^2 | \not\exists c > 0, x = cv\}$ 上で C^ℓ 級でなければならず、したがって u^g もまた同じ集合内で C^ℓ 級である。また任意の $x, v \in \Omega$ に対して $u^g(x,v)v \in [y_1(x,v), y_2(x,v)]$ であることを考えれば、y_1, y_2 の連続性から明らかに u^g もまた Ω^2 全体で連続である。

次に重要な補題を示しておこう。これは、「同一平面上の相異なる 2 つの無差別曲線は交わらない」という意味を持つ補題である。

補題 7.2 $x, v, z, w \in \Omega$ とし、x は v と一次独立、z は w と一次独立であるが、$\mathrm{span}\{x, v\} = \mathrm{span}\{z, w\}$ であるとする。このとき、$y(\cdot; x, v)$ の軌道と $y(\cdot; z, w)$ の軌道が一箇所でも交わるなら、それは完全に一致する。

証明： $P(x,v) = P(z,w)$ なので、記号の節約のためにこれらは共に P とだけ書くことにしよう。さらに、$R(x,v)$ のほうを R と書くことにしておく。補題 7.1 の b) から、$R(z,w)$ は R か $-R$ のどちらかに等しい。そこで前者のときは $s = 1$ とし、後者のときは $s = -1$ としよう。次に、

$$z_1(t) = y(\frac{1}{C(x,v)}t; x, v), z_2(t) = y(\frac{s}{C(z,w)}t; z, w)$$

と定義する。補題 7.1 の f) から、

$$\dot{z}_1(t) = RPg(z_1(t)),\ \dot{z}_2(t) = RPg(z_2(t))$$

を得る。したがって z_1 と z_2 は共に次の自律系微分方程式、

$$\dot{z} = RPg(z)$$

の延長不能な解になっている。したがってそれらの軌道は一箇所でも交わっていれば完全に一致していなければならない。z_1 の軌道は $y(\cdot; x, v)$ の軌道と一致し、z_2 の軌道は $y(\cdot; z, w)$ の軌道と一致するので、これで示せたことになる。 ■

この補題を使うことで、我々は $\succsim^g$ の様々な性質を示すことができる。たとえば完備性を示すためには、まず $(x,v) \in \Omega^2$ を取る。もし $x = cv$ となる c があれば、$c \geq 1$ なら $x \succsim^g v$ だし、$c < 1$ なら $v \succsim^g x$ なので、証明すべきことはなにもない。そこでそのような c が存在せず、x と v が一次独立である場合を考えてみよう。証明すべきは、$u^g(x,v) < 1$ ならば $u^g(v,x) \geq 1$ であることである。そこで $u^g(x,v) < 1$ であると仮定する。

$$c(t) = u^g(x, y(t; v, x))$$

と定義しよう。c は連続であり、また先の仮定から $c(0) < 1$ である。もし $c(t') = 1$ となる t' があれば、$y(\cdot; x, v)$ と $y(\cdot; v, x)$ の軌道はそこで交わったことになる。すると補題 7.2 から $c(t) \equiv 1$ となってしまい、$c(0) = 1$ を得るがこれは矛盾である。よってすべての点で $c(t) \neq 1$ でなければならない。中間値の定理を考慮に入れれば、これはすべての t に対して $c(t) < 1$ であることを意味する。そこで特に

$$(u^g(v, x))^{-1} = u^g(x, u^g(v, x)x) = c(t(v, x)) < 1$$

であり、したがって $u^g(v, x) > 1$ である。これで示せた。

同様にして p-推移性も示せる。最初に、$x, z, v \in \Omega$ で、ただしこれらは一次従属であるならば、$u^g(u^g(x, z)z, v) = u^g(x, v)$ が成り立つことを示そう。もし z が x の定数倍であれば、$u^g(x, z)z = x$ なのでこの主張は自明である。したがって、我々はそれ以外の状況だけを考えればよい。

仮に v が z の定数倍だとすれば、$y(0; x, z) = x = y(0; x, v)$ であり、したがって補題 7.2 から $y(t(x, z); x, z) = y(t(x, v); x, v)$ である。したがって、

$$u^g(x, v) = u^g(x, z)\frac{z^1}{v^1} = \frac{u^g(x, z)z^1}{v^1} = u^g(u^g(x, z)z, v)$$

がわかる。

同様に、もし v が x の定数倍だとすれば、$y(t(x, z); x, z) = u^g(x, z)z = y(0; u^g(x, z)z, v)$ であることから補題 7.2 によって $y(t(u^g(x, z)z, v); u^g(x, z)z, v) = x$ がわかる。したがって、

$$u^g(x, v) = \frac{x^1}{v^1} = \frac{y^1(t(u(x, z)z, v); u^g(x, z)z, v)}{v^1} = u^g(u^g(x, z)z, v)$$

となる。

最後に、x, v, z のどのふたつを取っても互いに一次独立である場合を考えよう。このとき、$y(t(x, z); x, z) = u^g(x, z)z = y(0; u^g(x, z)z, v)$ と $y(0; x, z) = y(0; x, v)$ に補題 7.2 を適用すれば、$y(\cdot; x, z), y(\cdot; x, v), y(\cdot; u^g(x, z)z, v)$ という 3 つの解の軌道はすべて一致することがわかる。したがって $y(t(x, v); x, v) = y(t(u^g(x, z)z, v); u^g(x, z)z, v)$ でなければならず、ここから $u^g(x, v) = u^g(u^g(x, z)z, v)$ を得る。これで $u^g(x, v) = u^g(u^g(x, z)z, v)$ が示せた。

ここで、$x \succsim^g z$ と $z \succsim^g v$ が成り立ち、かつ x, z, v は一次従属であるとしよう。このとき $u^g(x, z) \geq 1$ である。そこでもし $u^g(u^g(x, z)z, v) \geq u^g(z, v)$ であるとすれば、

$$u^g(x, v) = u^g(u^g(x, z)z, v) \geq u^g(z, v) \geq 1$$

となって、$x \succsim^g v$ が示せて p-推移性の証明が終わる。したがって証明するべきは、任意の $(x, v) \in \Omega^2$ と $s > 1$ に対して $u^g(sx, v) > u^g(x, v)$ であることである。

しかしこれは容易に示せる。v が x の定数倍であれば $u^g(sx,v) = su^g(x,v) > u^g(x,v)$ であるから明白である。そうでなければ、$c(t) = u^g(y(t;x,v),sx)$ と置けば、$c(0) < 1$ であることから、完備性を示したときと同様にして $c(t) < 1$ が常に成り立つ。したがって $c(t(x,v)) < 1$ であるが、これは $u^g(u^g(x,v)v,sx) < 1$ を意味しており、したがって $\frac{u^g(sx,v)}{u^g(x,v)} = u^g(sx,u^g(x,v)v) > 1$ である。これで示せた。

$\succsim^g$ の連続性は u^g の連続性から明らかなので、残っている示さなければいけないことは強単調性だけである。これを示すために、$(x,v) \in \Omega^2$ かつ $v \gneq x$ であるとしよう。v が x の定数倍であれば明らかに $u^g(x,v) < 1$ なので、そうでない場合のみを考える。$\succsim^g$ は完備だから、証明しなければいけないのは $u^g(x,v) < 1$ のみである。そこで $z = v - x$ とすると $z \in \mathrm{span}\{x,v\}$ かつ $z \gneq 0$ である。すると補題 7.1 の 6) から、

$$\frac{d}{dt}y(t;x,v)\cdot R(x,v)z = g(y(t;x,v))\cdot z > 0$$

であり、したがって、

$$\begin{aligned} u^g(x,v)v\cdot R(x,v)z &= y(t(x,v);x,v)\cdot R(x,v)z \\ &> y(0;x,v)\cdot R(x,v)z \\ &= x\cdot R(x,v)z \\ &= v\cdot R(x,v)z \end{aligned}$$

がわかる。そこで $u^g(x,v) < 1$ を示すためには、$v\cdot R(x,v)z < 0$ さえ示せればよい。

作り方から明らかに $x\cdot a_2(x,v) = 0$ であるため、

$$\begin{aligned} v\cdot R(x,v)z &= v\cdot[(z\cdot a_1(x,v))a_2(x,v) - (z\cdot a_2(x,v))a_1(x,v)] \\ &= (z\cdot a_1(x,v))(v\cdot a_2(x,v)) - (v\cdot a_2(x,v))(v\cdot a_1(x,v)) \\ &= -(v\cdot a_2(x,v))(x\cdot a_1(x,v)) \end{aligned}$$

がわかる。$x\cdot a_1(x,v) = \|x\| > 0$ であり、また Cauchy-Schwarz の不等式から $v\cdot a_2(x,v) \ge 0$ がわかるため、$v\cdot R(x,v)z \le 0$ である。もし $v\cdot R(x,v)z = 0$ であれば、v は z の定数倍ということになり、それは v が x の定数倍であることを意味するが、これは我々の当初の仮定に反するためにありえない。したがって $v\cdot R(x,v)z < 0$ である。これで (I) の証明がすべて完成した。■

7.3　(II) の証明

まず、記号の約束を確認しておく。D_xu^g は u^g の第一変数についての偏微分、$D_{xx}u^g$ は D_xu^g の第一変数についての偏微分とする。

さて、最初に次の補題を示そう。

補題 7.3 $(x, v) \in \Omega^2$ とし、ただし x は v の定数倍ではないとする。このとき、

1) $D_x u^g(x, v) \neq 0$ かつ $D_x u^g(x, v)x > 0$ である。
2) $PD_x u^g(x, v) = \lambda(x)Pg(x)$ となる。ただし $\lambda(x) = \frac{PD_x u^g(x,v)\cdot x}{Pg(x)\cdot x}$。
3) $g(x) \cdot w = 0$ を満たす任意の $w \in \mathrm{span}\{x, v\}$ に対して、$w^T D_{xx} u^g(x, v)w = \lambda(x)w^T Dg(x)w$ が成り立つ。

証明： まず 1) を示す。そのために、x, v, z が一次従属であれば $u^g(x, v) = u^g(u^g(x, z)z, v)$ が成り立つということに注意しよう。したがって任意の $t > 0$ に対して、

$$t = u^g(tv, v) = u^g(u^g(tv, x)x, v),\ 1 = u^g(x, x) = u^g(u^g(x, v)v, x)$$

が成り立つ。この前者の等式の両辺を $t = u^g(x, v)$ の点で t について微分すれば、

$$\begin{aligned} 1 &= D_x u^g(u^g(u^g(x, v)v, x)x, v)[D_x u^g(u^g(x, v)v, x)v]x \\ &= D_x u^g(x, v)[D_x u^g(u^g(x, v)v, x)v]x \end{aligned}$$

が成り立つ。ここからただちに $D_x u^g(x, v) \neq 0$ と $D_x u^g(x, v)x \neq 0$ を得る。また、我々はすでに $t > 1$ ならば $u^g(tx, v) - u^g(x, v) > 0$ であることを示しているので、t で割って $t \to 1$ のときの方向微分を取れば、$D_x u^g(x, v)x \geq 0$ がわかる。これと $D_x u^g(x, v)x \neq 0$ を合わせれば $D_x u^g(x, v)x > 0$ がわかる。以上で 1) が示せた。

2) を示すために、$z = \dot{y}(0; x, v)$ とする。明らかに、任意の t に対して $u^g(y(t; x, v), v) = u^g(x, v)$ である。この両辺を $t = 0$ の点で t について微分すれば、$D_x u^g(x, v)z = 0$ がわかる。一方で補題 7.1 の f) から $z = CRPg(x)$ がわかり、したがって $g(x) \cdot z = 0$ である。故に $Pg(x)$ と $PD_x u^g(x, v)$ は共に直線 $\{w \in \mathrm{span}\{x, v\} | w \cdot z = 0\}$ 内に位置しており、よって 2) が成り立つ。

3) を示すために、$w \in \mathrm{span}\{x, v\}$ かつ $g(x) \cdot w = 0$ としよう。$w = 0$ ならば主張は明らかなのでそうでない場合だけを考える。$h(z) = D_x u^g(z, v)w$ としよう。すると v の定数倍でない任意の $z \in \Omega$ に対して、

$$\begin{aligned} h(z) &= D_x u^g(z, v)w \\ &= [PD_x u^g(z, v)]w \\ &= \lambda(z)(Pg(z) \cdot w) \\ &= \lambda(z)(g(z) \cdot w) \end{aligned}$$

である。$z = x$ の点で z について微分すれば、

$$\begin{aligned} w^T D_{xx} u^g(x, v)w &= Dh(x)w \\ &= (g(x) \cdot w)D\lambda(x)w + \lambda(x)[w^T Dg(x)w] \end{aligned}$$

が成り立つが、$g(x) \cdot w = 0$ であるから、これで 3) が示せた。 ■

さて、(II) の証明に戻ろう。最初に (2) が成り立っているとしよう。$g(x) \cdot w = 0$ となる任意の $w \in \mathbb{R}^n$ を選ぶ。もし $w = 0$ であれば、明らかに $w^T Dg(x)w = 0$ である。そうでないとしよう。$x + sw, x - sw \in \Omega$ となるような十分小さな $s > 0$ を選び、$v = x + sw$ とし、$x(t) = (1-t)x + tv$ と定義する。$x \in f^{\succsim^g}(g(x), g(x) \cdot x)$ であることから $0 \in \arg\max\{u(x(t), v) | t \in]-1, 1[\}$ を得る。すると二階の必要条件から、

$$(sw)^T D_{xx} u^g(x, v)(sw) \le 0$$

がわかるため、補題 7.3 の 3) から $w^T Dg(x)w \le 0$ である。よって (1) が示せた。

次に、(2) が成り立っていないと仮定する。すると、$x \notin f^{\succsim^g}(g(x), g(x) \cdot x)$ であるような $x \in \Omega$ が存在する。したがって $g(x) \cdot z \le g(x) \cdot x$ かつ $u^g(z, x) > 1$ となる z が存在するが、一方で強単調性から、十分小さな $c > 0$ を取れば $u^g(cz, x) < 1$ になる。そこで u^g の連続性と中間値の定理から、ある $c^* \in]0, 1[$ に対して $u^g(c^* z, x) = 1$ となる。そこで $v = c^* z$ と置けば、$g(x) \cdot v < g(x) \cdot x$ かつ $v \sim^g x$ である。

明らかに v は x の定数倍ではない。$x(t) = (1-t)x + tv$ と定義すれば、補題 7.3 の 2) から、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[u^g(x(t), v)]|_{t=0} &= D_x u^g(x, v)(v - x) \\
&= PD_x u^g(x, v)(v - x) \\
&= \lambda(x) Pg(x)(v - x) \\
&= \lambda(x) g(x)(v - x) \\
&= \lambda(x)[g(x) \cdot v - g(x) \cdot x] < 0
\end{aligned}$$

であるから、十分小さな $t > 0$ に対して $u^g(x(t), v) < u^g(x, v)$ である。よって $v \succ^g x(t)$ であり、p-推移性から $x(t) \not\succsim^g x$ を得る。したがって (3) の否定が成り立つ。対偶を取れば、(3) より (2) が示せたことになる。

最後に残った課題は、(1) から (3) を示すことである。そこで背理法の仮定として、(1) が成り立っているにも関わらず (3) が成り立っていないとしよう。このとき、$v \sim^g x$ でありながらある $t \in]0, 1[$ に対して $(1-t)x + tv \not\succsim^g x$ が成り立ってしまうような $x, v \in \Omega$ が存在する。明らかに v は x の定数倍ではない。そこで $x(s) = (1-s)x + sv$ とし、

$$s^* = \max[\arg\min\{u^g(x(s), v) | s \in [0, 1]\}]$$

と定義する。$u^g(x(t), v) < 1$ であることから、$s^* \in]0, 1[$ がわかる。$p = PD_x u^g(x(s^*), v)$ としよう。s^* は $u^g(x(\cdot), v)$ の最小点であるため、

$$0 = D_x u^g(x(s^*), v)(v - x) = p \cdot (v - x)$$

がわかる。一方、補題 7.3 の 1) から $p \cdot x(s^*) > 0$ であり、したがって $p \neq 0$ である。

次に、以下の方程式、

$$u^g(bp+x(s^*+a),v)=u^g(x(s^*),v)$$

を考える。$\|p\|^2\neq 0$ であることから上の方程式の a,b に対して陰関数定理を適用できて、ある C^ℓ 級関数 $b:]-\varepsilon,\varepsilon[\to\mathbb{R}$ で $b(0)=0$ かつ $u^g(b(a)p+x(s^*+a))\equiv u^g(x(s^*),v)$ であるようなものが存在する。この両辺を a で微分すれば

$$D_xu^g(b(a)p+x(s^*+a),v)[b'(a)p+(v-x)]=0$$

がわかり、さらにもう一度微分すれば

$$\begin{aligned}&[b'(a)p+(v-x)]^TD_{xx}u^g(b(a)p+x(s^*+a),v)[b'(a)p+(v-x)]\\&+b''(a)D_xu^g(b(a)p+x(s^*+a),v)p=0\end{aligned}$$

となる。最初の式に $a=0$ を代入すれば、

$$0=D_xu^g(x(s^*),v)[b'(0)p+(v-x)]=b'(0)\|p\|^2$$

となるため、$b'(0)=0$ である。(1) から、任意の $y\in\Omega$ と $g(y)\cdot w=0$ となる任意の $w\in\mathbb{R}^n$ に対して $w^TDg(y)w\leq 0$ となるため、補題 7.3 から $D_xu^g(b(a)p+x(s^*+a),v)w=0$ となる任意の $w\in\mathrm{span}\{x,v\}$ に対して $w^TD_{xx}u^g(b(a)p+x(s^*+a),v)w\leq 0$ となる。この w に $b'(a)p+(v-x)w$ を代入すれば、

$$[b'(a)p+(v-x)]^TD_{xx}u^g(b(a)p+x(s^*+a),v)[b'(a)p+(v-x)]\leq 0$$

であるから、$b''(a)D_xu^g(b(a)p+x(s^*+a),v)p\geq 0$ を得る。そこで $c:a\mapsto D_x(u^g(b(a)p+x(s^*+a),v)p$ とすると、c は a について連続であり、かつ $c(0)=\|p\|^2>0$ であるため、十分小さな $a>0$ に対して $b''(a)\geq 0$ でなければならない。 そこで十分小さな $a>0$ に対して $b'(a)\geq 0$ にならねばならず、よって十分小さな $a>0$ に対して $b(a)\geq 0$ を得る。一方で、$D_xu^g(x(s^*),v)p=\|p\|^2>0$ だから、十分 $a>0$ が小さければ

$$D_xu^g(b'p+a(v-x)+x(s^*),v)p>0\text{ for any }b'\in[0,b(a)]$$

が成り立つ。すると、

$$u^g(x(s^*+a),v)\leq u^g(b(a)p+x(s^*+a),v)=u^g(x(s^*),v)$$

となるが、これは s^* の定義に矛盾している。これで (II) の証明が完成した。 ■

7.4 (III) の証明

(4) から (2) は明白なので証明を略す。

次に、(3) から (4) を出してみよう。任意の $x, z \in \Omega$ に対して、x と z が同一直線上にあれば $u_v^g(x) = u_v^g(u^g(x,z)z)$ である。一方、同一直線上にないとしても、

$$\frac{d}{dt}[u_v^g(y(t;x,z)] = \lambda(y(t;x,z))(g(y(t;x,z)) \cdot \dot{y}(t;x,z)) = 0$$

が常に成り立つので、結局 $u_v^g(x) = u_v^g(u^g(x,z)z)$ が成り立つ。したがって、

$$x \succsim^g z \Leftrightarrow u^g(x,z) \geq 1 \Leftrightarrow u_v^g(x) \geq u_v^g(z)$$

であることがただちにわかる。これで示せた。

今度は (2) から (3) を示す。まず、任意の $x, z \in \Omega$ に対して、

$$u_v^g(x,v)v \sim^g x \sim^g u^g(x,z)z \sim^g u^g(u^g(x,z)z,v)v$$

であり、ここから

$$u^g(x,v) = u^g(u^g(x,z)z,v)$$

を得る。ここで特に z を v と同一直線上にないように取れば、x が v と同一直線上にないときは左辺が (x,v) について C^ℓ 級であり、同一直線上にあるときは右辺が (x,v) について C^ℓ 級である。ここから、u_v^g が任意の点で C^ℓ 級であることがわかる。

次に、$x \in \Omega$ を任意に取り、$\mathrm{span}\{g(x)\}$ の直交補空間の基底 $v_1, ..., v_{n-1}$ で、$x + v_i \in \Omega$ が常に成り立つものを取る。このとき、v_i と $\dot{y}(0;x,x+v_i)$ は共に $P(x,x+v_i)g(x)$ と直交している $\mathrm{span}\{x,v_i\}$ 内の点であるため、それらは一次従属である。したがって $\dot{y}(0;x,x+v_1), ..., \dot{y}(0;x,x+v_{n-1})$ は互いに一次独立である。一方、$x \sim^g y(t;x,x+v_i)$ なので $u^g(x,y(t;x,x+v_i)) = 1$ であり、したがって $u_v^g(x) = u_v^g(y(t;x,x+v_i))$ である。これを $t = 0$ のところで t について微分すれば、$Du_v^g(x)\dot{y}(0;x,x+v_i) = 0$ が成り立つ。したがって、$Du_v^g(x)$ と $g(x)$ は共に $\mathrm{span}\{\dot{y}(0;x,x+v_1), ..., \dot{y}(0;x,x+v_{n-1})\}$ の直交補空間に属しているが、その空間の次元は 1 であるため、$Du_v^g(x) = \lambda(x)g(x)$ となるような $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ が存在していなければならない。$\lambda(x) > 0$ は補題 7.3 からわかる。これで (3) が示せた。

したがって (2)(3)(4) はすべて同値であることがわかった。最後に残ったのは (1) と (3) の同値性だけなので、これを示そう。

(3) から (1) について先に示す。まず、λ が $C^{\ell-1}$ 級であることに注意しよう。次に、$D^2u_v^g(x) = g(x)D\lambda(x) + \lambda(x)Dg(x)$ が対称であることに注意すれば、

$$g^i(x)\partial_j\lambda(x) + \lambda(x)\partial_j g^i(x) = g^j(x)\partial_i\lambda(x) + \lambda(x)\partial_i g^j(x)$$

$$g^j(x)\partial_k\lambda(x)+\lambda(x)\partial_k g^j(x)=g^k(x)\partial_j\lambda(x)+\lambda(x)\partial_j g^k(x)$$

$$g^k(x)\partial_i\lambda(x)+\lambda(x)\partial_i g^k(x)=g^i(x)\partial_k\lambda(x)+\lambda(x)\partial_k g^i(x)$$

の 3 式を得る。この第一式に $g^k(x)$ を、第二式に $g^i(x)$ を、第三式に $g^j(x)$ を掛けて足し合わせ、整理してから $\lambda(x)$ で割れば、条件 (B) の式が出てくる。これで示せた。

残ったタスクは (1) から (3) を示すことである。最初に補題をひとつ示す。

補題 7.4 任意の $v\in\Omega$ に対して、v の開近傍 W^v, W_1^v と $\hat{u}^v: W_1^v\to\mathbb{R}$、$\lambda^v: W_1^v\to\mathbb{R}_{++}$ で、以下の条件を満たすものが存在する：

1) 任意の $x,y,z\in W^v$ に対して $u^g(x,z)=u^g(u^g(x,y)y,z)$ が成り立つ。
2) 任意の $x,y\in W^v$ に対して $y([0,t(x,y)];x,y)\subset W_1^v$ が成り立つ。
3) $\hat{u}^v$ は C^ℓ 級で、W_1^v 上で $D\hat{u}^v=\lambda^v g$ である。

証明： 長いので 2 ステップに分ける。
ステップ 1：まず、3) が成り立つような W_1^v と $\hat{u}^v,\lambda^v$ をうまく見つける作業を行う。$v\in\Omega$ を最初に固定しておこう[*5]。

最初に、$\bar{g}(x)=\frac{1}{g^1(x)}g(x)$ と置く。定理 2.14 から、$\bar{g}(x)$ は条件 (B) を満たす。

$v_{-1}=(v^2,...,v^n)^T$ と定義しよう。ここで $(v^1+y,v_{-1}+tz)\in\Omega$ を満たす任意の y,z,t に対して、

$$\Phi(t,y,z)=-\bar{g}(v^1+y,v_{-1}+tz)$$

と定義し、次の初期値問題：

$$\begin{array}{rcl}\dot{\phi} & = & \sum_{j=1}^{n-1}\Phi^{j+1}(t,\phi,z)z^j\\ \phi(0) & = & y\end{array}\tag{7.2}$$

を考える。すると、$\varepsilon_1>0$ と開集合 $U_1\subset\Omega-v$ をうまく選べば、$0\in U_1$ であり、また $\phi:]-\varepsilon_1,\varepsilon_1[\times U_1\to\mathbb{R}$ という上の問題の C^ℓ 級の解が存在するようにできる。任意の $(y,z)\in U_1$ に対して $\phi(0;y,z)=y$ であるから、$D_y\phi(0;y,z)=1$ である。したがって $\varepsilon_2>0$ と開集合 $U_2\subset U_1$ をうまく選べば、$0\in U_2$ であり、また任意の $t\in]-\varepsilon_2,\varepsilon_2[$ と $(y,z)\in U_2$ に対して $D_y\phi(t;y,z)$ が 0 にならないようにできる。

$s=\frac{\varepsilon_2}{2}$ とし、$U_3=\{(y,z)|(y,s^{-1}z)\in U_2\}$ として、任意の $t\in]-2,2[$ と $(y,z)\in U_3$ に対して、

$$\psi(t;y,z)=\phi(st;y,s^{-1}z)$$

[*5] このステップの内容の拡張が Hosoya (2011c) で証明されている。

と定義する。すると U_3 は開集合で、$\psi(0;y,z)=y$ で、$D_y\psi(t;y,z)$ は常に 0 にはならず、さらに

$$\dot\psi(t;y,z)=\sum_{j=1}^{n-1}\Phi^{j+1}(t,\psi(t;y,z),z)z^j$$

が成り立つ。つまり、ψ は $]-2,2[\times U_3$ 上で定義された問題 (7.2) の解である。

次に $F(y,z,u)=y-\psi(1;u,z)$ とする。すると $(u,z)\in U_3$ である限り D_uF は 0 にならない。さらに、$\psi(1;0,0)=0$ であるから $F(0,0,0)=0$ である。そこで陰関数定理によって、ある開集合 $U_4\subset U_3,\ V_4\subset\mathbb{R}$ および $\bar u:U_4\to V_4$ で、関数 $\bar u$ が C^ℓ 級であり、$(0,0,0)\in U_4\times V_4$ であって、$\bar u(0,0)=0$ であり、さらに任意の $(y,z,u)\in U_4\times V_4$ に対して

$$F(y,z,u)=0\Leftrightarrow u=\bar u(y,z)$$

が成り立つようなものが存在する。そこで任意の $(y,z)\in U_4$ に対して $\tilde u(y,z)=(\bar u(y,z),z)$ と定義しよう。$F(y,0,u)=y-u$ だから、$D_y\bar u(0,0)>0$ で、したがって $D\tilde u(0,0)$ は正則である。そこで逆関数定理により、ある開集合 $U_5\subset U_4$ と $U_6\subset\mathbb{R}^n$ で $(0,0)\in U_5\cap U_6$ であり、また $\tilde u:U_5\to U_6$ は C^ℓ 級の全単射で、$\tilde u^{-1}$ もまた C^ℓ 級であり、さらに $D_y\bar u>0$ が常に成り立つようなものが取れる。ここであらかじめ十分小さく U_6 の形を選んでおくことで、$U_6\subset U_4$ であり、またある開集合 $V_6\subset\mathbb{R}$ と $W_6\subset\mathbb{R}^{n-1}$ に対して $U_6=V_6\times W_6$ が成り立つ、という風にしておく。

ここで y をひとつ固定し、$t\in]-2,2[$ かつ $(y,z)\in U_4$ となるように (t,z) を選ぶ。この (t,z) に対して、

$$\Psi_y(t,z)=(v_1+\psi(t;y,z),v_{-1}+tz)$$

$$A_y(t,z)=\bar g(\Psi_y(t,z))^TD_z\Psi_y(t,z)$$

と定義する。したがって計算すれば、

$$A_y^i(t,z)=\bar g^T(\Psi_y(t,z))D_{z^i}\Psi_y(t,z)=\partial_{z^i}\psi(t;y,z)+t\bar g^{i+1}(\Psi_y(t,z))$$

ということになる。

明らかに $A_y^{i,j}(0,z)=0$ である。一方、ψ は (7.2) の解であるから、$\partial_t\partial_{z^i}\psi$ は存在して、$\partial_t\partial_{z^i}\psi=\partial_{z^i}\partial_t\psi$ が成り立つ。したがって A_y^i は t について微分可能で、

$$\begin{aligned}\dot A_y^i(t,z)&=\partial_t\partial_{z^i}\psi(t;y,z)+\bar g^{i+1}(\Psi_y(t,z))+tD\bar g^{i+1}(\Psi_y(t,z))\dot\Psi_y(t,z)\\&=\partial_{z^i}\dot\psi(t;y,z)+\bar g^{i+1}(\Psi_y(t,z))\\&\qquad+t[\partial_1\bar g^{i+1}(\Psi_y(t,z))\dot\psi(t;y,z)+\sum_{j=1}^{n-1}\partial_{j+1}\bar g^{i+1}(\Psi_y(t,z))z^j]\end{aligned}$$

が成り立つ。一方、

$$
\begin{aligned}
\partial_{z^i}\dot{\psi}(t;y,z) &= \partial_{z^i}[\sum_{j=1}^{n-1} -\bar{g}^{j+1}(v^1+\psi(t;y,z), v_{-1}+tz)z^j] \\
&= -\bar{g}^{i+1}(\Psi_y(t,z)) - \sum_{j=1}^{n-1} z^j[\partial_1\bar{g}^{j+1}(\Psi_y(t,z))\partial_{z^i}\psi(t;y,z) \\
&\quad + t\partial_{i+1}\bar{g}^{j+1}(\Psi_y(t,z))]
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\dot{A}^i_y(t,z) &= t\sum_{j=1}^{n-1} z^j[\partial_{j+1}\bar{g}^{i+1}(\Psi_y(t,z)) - \partial_{i+1}\bar{g}^{j+1}(\Psi_y(t,z))] \\
&\quad + [t\partial_1\bar{g}^{i+1}(\Psi_y(t,z))\dot{\psi}(t;y,z) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n-1}\partial_1\bar{g}^{j+1}(\Psi_y(t,z))\partial_{z^i}\psi(t;y,z)z^j]
\end{aligned}
$$

となる。ここで

$$
\dot{\psi}(t;y,z) = \sum_{j=1}^{n-1} -\bar{g}^{j+1}(\Psi_y(t,z))z^j
$$

であり、

$$
\partial_{z^i}\psi(t;y,z) = A^i_y(t,z) - t\bar{g}^{i+1}(\Psi_y(t,z))
$$

だから、

$$
\begin{aligned}
\dot{A}^i_y(t,z) &= -\sum_{j=1}^{n-1} z^j\partial_1\bar{g}^{j+1}(\Psi_y(t,z))A^i_y(t,z) \\
&\quad + t\sum_{j=1}^{n-1} z^j[\partial_{j+1}\bar{g}^{i+1}(\Psi_y(t,z)) - \partial_{i+1}\bar{g}^{j+1}(\Psi_y(t,z)) \\
&\quad + \{\partial_1\bar{g}^{j+1}(\Psi_y(t,z))\bar{g}^{i+1}(\Psi_y(t,z)) \\
&\quad - \partial_1\bar{g}^{i+1}(\Psi_y(t,z))\bar{g}^{j+1}(\Psi_y(t,z))\}] \\
&= -\sum_{j=1}^{n-1} z^j\partial_1\bar{g}^{j+1}(\Psi_y(t,z))A^i_y(t,z)
\end{aligned}
$$

がわかる。ここで最後の等式のために $\bar{g}$ が条件 (B) を満たしていることを用いた。

したがって、$A^i_y(t,z)$ は次の初期値問題：

$$
\begin{array}{rcl}
\dot{A}^i_y(t,z) &=& -\sum_{j=1}^{n-1} z^j\partial_1\bar{g}^{j+1}(\Psi_y(t,z))A^i_y(t,z) \\
A^i_y(0,z) &=& 0
\end{array}
\tag{7.3}
$$

の解であることがわかった。明らかに、$A_y(t,z)\equiv 0$ がこの問題の解であるから、我々は $A_y(t,z)\equiv 0$ を証明したことになる。したがって、

$$\bar{g}(\Psi_y(t,z))^T D_z\Psi_y(t,z)=0^T$$

が示された。

さて、$(p,q)\in v+U_5$ であるとし、$(y,z)=(p-v^1,q-v_{-1})$ とする。このとき $(y,z)\in U_5\subset U_4$ であるから、

$$y-\psi(1,\bar{u}(y,z),z)=F(y,z,\bar{u}(y,z))=0$$

となり、$y=\psi(1,\bar{u}(y,z),z)$ が得られる。$(y,z)\in U_5$ だから、$(\bar{u}(y,z),z)\in U_6\subset U_4$ であり、よって $(p,q)=\Psi_{\bar{u}(y,z)}(1,z)$ である。そこで、

$$\bar{g}(p,q)^T D_z\Psi_{\bar{u}(y,z)}(1,z)=0^T$$

がわかった。

次に、$u\in V_6$ とし、任意の $z\in W_6$ を選ぶ。すると $(u,z)\in U_6$ なので、$\bar{u}(y,z)=u$ を満たす $(y,z)\in U_5$ が存在する。$y=\psi(1,u,z)$ だから、$\Psi_u(1,z)-v=(y,z)$ である。よって $\bar{u}(\Psi_u(1,z)-v)=u$ である。この両辺を z で微分すれば、

$$D\bar{u}(\Psi_u(1,z)-x)D_z\Psi_u(1,z)=0$$

がわかる。

最後に、$(p,q)\in(v+U_5)\cap(v+U_6)$ であるとし、$(y,z)=(p-v^1,q-v_{-1})$ とし、$\hat{u}^v(p,q)=\bar{u}(y,z)$ と定義する。すでに示したように、$\bar{g}(p,q)^T D_z\Psi_{\hat{u}^v(p,q)}(1,z)=0^T$ であり、また $z\in W_6$, $\hat{u}^v(p,q)\in V_6$ かつ $\Psi_{\hat{u}^v(p,q)}(1,z)-v=(y,z)$ であるから、$D\hat{u}^v(p,q)D_z\Psi_{\hat{u}^v(p,q)}(1,z)=0^T$ であることがわかる。したがって $\bar{g}(p,q)$ と $D\hat{u}^v(p,q)$ は共に $\mathrm{span}\{D_{z^1}\Psi_{\hat{u}^v(p,q)}(1,z),...,D_{z^{n-1}}\Psi_{\hat{u}^v(p,q)}(1,z)\}$ の直交補空間に所属しているが、その次元は 1 なので、ある数 $\mu(p,q)$ が存在して

$$D\hat{u}^v(p,q)=\mu(p,q)\bar{g}(p,q)=\frac{\mu(p,q)}{g^1(p,q)}g(p,q)$$

となる。そこで $W_1^v=(v+U_5)\cap(v+U_6)$、$\lambda^v(p,q)=\frac{\mu(p,q)}{g^1(p,q)}$ と定義しておこう。$D_1\hat{u}^v(p,q)>0$ が常に成り立つので $\mu(p,q)>0$ であり、したがって $\lambda^v(p,q)>0$ である。ここまででステップ 1 が終わる。

ステップ 2：ここまでで、v を含む開集合 $W_1^v\subset\Omega$ と $\hat{u}^v:W_1^v\to\mathbb{R}$、そして $\lambda^v:W_1^v\to\mathbb{R}_{++}$ で、$\hat{u}^v$ が C^ℓ 級であり、かつ $D\hat{u}^v=\lambda^v g$ が W_1^v 上で成り立つようなものが存在

することがわかった。必要ならば W_1^v を縮めて、W_1^v は凸であると仮定してよい。さて、補題 7.1 の d) によれば、y_1, y_2 は Ω^2 上で連続であった。$y_1(v,v) = v = y_2(v,v)$ なので、$U_1^v = y_1^{-1}(W_1^v) \cap y_2^{-1}(W_1^v)$ と置けばこれは (v,v) を含む開集合である。そこで次に十分小さく開凸な v の近傍 $W_2^v \subset W_1^v$ を取り、$W_2^v \times W_2^v \subset U_1^v$ となるようにし、$U_2^v = y_1^{-1}(W_2^v) \cap y_2^{-1}(W_2^v)$ として、さらに十分小さく開凸な v の近傍 $W^v \subset W_2^v$ を取って $W^v \times W^v \subset U_2^v$ となるようにする。

明らかに 3) は成り立つ。2) を確かめるために、$x, y \in W^v$ としよう。もし x が v の定数倍であれば $t(x,v) = 0$ なのでこの主張は自明である。そうでないとき、$x, v \in W^v$ であるから、$(x,y) \in U_2^v$ であり、したがって $y_1(x,y), y_2(x,y) \in W_2^v$ である。W_2^v は凸なので $\Delta(x,y) \subset W_2^v \subset W_1^v$ であり、よって $y([0,t(x,y)]; x,y) \subset \Delta(x,y) \subset W_1^v$ がわかる。これで 2) も示せた。

最後に 1) を示す。$x, y, z \in W^v$ であるとしよう。これらが一次従属であればすでに (I) の証明の中で $u^g(x,z) = u^g(u^g(x,y)y, z)$ を示してあるので、そうでないとする。すでに示したように $y([0,t(x,y)]; x,y) \subset W_2^v$ であり、したがって $u^g(x,y)y \in W_2^v$ である。よって $y_1(u^g(x,y)y, z), y_2(u^g(x,y)y, z) \in W_1^v$ であり、故に $\Delta(u^g(x,y)y, z) \subset W_1^v$ である。したがって $y([0, t(u^g(x,y)y,z)]; u^g(x,y)y, z) \subset W_1^v$ である。またすでに $y([0,t(x,z)]; x,z) \subset W_1^v$ も示した。

一方、

$$\frac{d}{dt}\hat{u}^v(y(t;x,y)) = 0 \ \forall t \in [0, t(x,y)]$$

$$\frac{d}{dt}\hat{u}^v(y(t; u^g(x,y)y, z)) = 0 \ \forall t \in [0, t(u^g(x,y)y, z)]$$

$$\frac{d}{dt}\hat{u}^v(y(t;x,z)) = 0 \ \forall t \in [0, t(x,z)]$$

が成り立つ。よって、

$$\hat{u}^v(u^g(x,z)z) = \hat{u}^v(x) = \hat{u}^v(u^g(x,y)y) = \hat{u}^v(u^g(u^g(x,y)y,z)z)$$

がわかる。$D\hat{u}^v \gg 0$ が常に成り立っているので、$u^g(x,z) = u^g(u^g(x,y)y, z)$ でなければならない。よって 1) が成り立つ。これですべての証明が完成した。■

これで、u^g が Ω^2 上全体で C^ℓ 級であることを示す準備が整った。まず、$(x,v) \in \Omega^2$ としよう。もし x が v の定数倍でなければ、u^g が (x,v) のまわりで C^ℓ 級であることはすでに示してある。そうでないとし、$x = sv$ だったとしよう。補題 7.4 にしたがって W^x を取り、x の定数倍でないような $z \in W^x$ を取る。$W' = W^x \setminus \{tz | t \in \mathbb{R}\}$ とし、$W'' = s^{-1}W'$ としよう。すると W' は x の開近傍、W'' は v の開近傍で、任意の $(y,w) \in W' \times W''$ に対して

$$u^g(y,w) = su^g(y,sw) = su^g(u^g(y,z)z, sw) = u^g(u^g(y,z)z, w)$$

であるが、この右辺は (y,w) について (x,v) の近くで C^ℓ 級である。よって u^g は Ω^2 上で C^ℓ 級であることがわかった。

次に、

$$X=\{x\in\Omega|\exists\mu(x)\in\mathbb{R}\text{ such that }D_xu^g(x,v)=\mu(x)g(x)\}$$

と定義する。我々が証明すべきは $X=\Omega$ である。

まず、X が $L=\{sv|s>0\}$ の開近傍を含んでいることを示そう。$s>0$ をひとつ固定し、$x=sv$ として、補題 7.4 から $W^x,W_1^x,\hat{u}^x,\lambda^x$ を取ってくる。$y\in W^x$ を固定し、$\hat{u}^x(z)=\hat{u}^x(y)$ となる任意の $z\in W^x$ を選ぶ。すると、

$$\frac{d}{dt}\hat{u}^x(y(t;y,z))\equiv 0\ \forall t\in[0,t(y,z)]$$

であるから、$\hat{u}^x(y)=\hat{u}^x(u^g(y,z)z)$ であることがわかる。したがって $u^g(y,z)=1$ である。故に、

$$u^g(y,v)=su^g(y,x)=su^g(u^g(y,z)z,x)=su^g(z,x)=u^g(z,v)$$

がわかる。逆に、$u^g(y,v)=u^g(z,v)$ となる任意の $z\in W^x$ を選べば、

$$u^g(z,v)=u^g(y,v)=su^g(y,x)=su^g(u^g(y,z)z,x)=u^g(u^g(y,z)z,v)$$

であるから、$u^g(y,z)=1$ である。よって、

$$\hat{u}^x(y)=\hat{u}^x(u^g(y,z)z)=\hat{u}^x(z)$$

がわかる。故に $\hat{u}^x(z)=\hat{u}^x(y)$ と $u^g(z,v)=u^g(y,v)$ は同値であることがわかった。

逆像定理によって、$(\hat{u}^x)^{-1}(y)$ は $n-1$ 次元の C^ℓ 級微分可能多様体であり、したがって $D\hat{u}^x(y)$ と $D_xu^g(y,v)$ は共にその y における接空間と直交している。よってある定数 $c\in\mathbb{R}$ が存在して、

$$D_xu^g(y,v)=cD\hat{u}^x(y)=c\lambda^x(y)g(y)$$

となる。故に $\cup_{s>0}W^{sv}\subset X$ がわかった。

次に、$x\in\Omega$ を固定する。我々が示したいのは $x\in X$ である。もし x が v の定数倍ならば、これはすでに示してある。そこでそうでないとしよう。A_x を $y(\cdot;x,v)$ の軌道が成す集合とし、$B_x=A_x\cap\mathrm{int}X$ とする。すると $x\in B_x$ が証明できればよいことになる。$x\in A_x$ は明らかなので、そのためには $B_x=A_x$ が示せればよい。A_x は連続写像による区間の像であるから連結であり、したがって後は B_x が非空で、かつ A_x の位相に関して開かつ閉であることを示せばよいことがわかる。$u^g(x,v)v\in B_x$ はすでに示してあるので、B_x は明らかに非空。また B_x の定義からそれが A_x の位相で開であることも明らかである。よって、後は B_x が A_x の位相について閉であることを示せばよい。

そこで $(z_k)_k$ は B_x の点列である $z^* \in A_x$ に収束しているとしよう。証明すべきは $z^* \in B_x$ であるが、$z^* = u^g(x,v)v$ ならば明らかなので、それ以外のケースだけを考える。補題 7.4 によってあらかじめ $W^{z^*}, W_1^{z^*}, \hat{u}^{z^*}, \lambda^{z^*}$ を取っておこう。

W^{z^*} は Ω 内の開集合なので、$z_k \in W^{z^*}$ となる k が存在する。A_x の定義から、$y(t_k; z^*, v) = z_k$ となる t_k が存在する。$z_k \in B_x$ なので、ある $W_{z_k} \subset W^{z^*}$ と $\mu : W_{z_k} \to \mathbb{R}$ が存在して、$z \in W_{z_k}$ ならば $D_x u^g(z,v) = \mu(z)g(z)$ でなければならない。W_3 を z^* の開近傍で、$W_3 \subset W^{z^*}$ であり、かつ任意の $z \in W_3$ について $y(t^k; z, v) \in W_{z^k}$ を満たすものとする。

次に局所しずめ込み定理を $\hat{u}^{z^*}$ に適用する。すると $W_4, V \subset \mathbb{R}^n$ と $\phi : V \to W_4$ をうまく取れば、$z^* \in W_4 \subset W_3$ であり、V は凸で、ϕ は V から W_4 への全単射で、ϕ と ϕ^{-1} は共に C^ℓ 級で $(\hat{u}^{z^*} \circ \phi)(w) = w^1$ がすべての $w \in V$ に対して成立するようにできる。

いま、$y, z \in W_4$ かつ $\hat{u}^{z^*}(y) = \hat{u}^{z^*}(z)$ であったとしよう。ここで曲線 $z_1(s)$ と $z_2(s)$ を、

$$z_1(s) = \phi((1-s)\phi^{-1}(y) + s\phi^{-1}(z)),\ z_2(s) = y(t^k; z_1(s), v)$$

と定義する。すると任意の $s \in [0,1]$ に対して $\hat{u}^{z^*}(z_2(s)) = \hat{u}^{z^*}(z_1(s)) = \hat{u}^{z^*}(y)$ である。一方で $z_2(s) \in W_{z^k}$ だから、

$$\frac{d}{ds}[u^g(z_2(s), v)] = 0$$

がわかる。したがって、

$$u^g(y,v) = u^g(z_1(0),v) = u^g(z_2(0),v) = u^g(z_2(1),v) = u^g(z_1(1),v) = u^g(z,v)$$

となる。同様に、もし $u^g(y,v) = u^g(z,v)$ であれば $\hat{u}_{z^*}(y) = \hat{u}_{z^*}(z)$ である、ということも示せる。したがって後はまた逆像定理を用いて、$W_4 \subset X$ を示すことができる。これで (III) の証明が完成した。 ■

7.5　(IV) の証明

$(p,m) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ を選ぶ。$p \cdot x = m$ となる $x \in \Omega$ に対して、仮に $g(x)$ が p の定数倍でないとすれば、$v \in \Omega$ をうまく選んで $p \cdot v \le p \cdot x$ かつ $v \succ^g x$ となるようにできる。したがって $x \notin f^{\succsim^g}(p,m)$ である。よって、仮に $g(x)$ が p の定数倍であるような x が一つもなかった場合、$f^{\succsim^g}(p,m) = \emptyset$ となる。次に、$g(x) = \lambda p$ かつ $p \cdot x = m$ となるような $x \in \Omega$ が存在したと仮定してみよう。(II) から、このとき $x \in f^{\succsim^g}(p,m)$ である。

仮に、$y \sim^g z$ かつ $y \ne z$ となる任意の $y, z \in \Omega$ に対して $(1-t)y + tz \succ^g y$ であったとすれば、そこから $x \ne v$ かつ $p \cdot v \le m$ である任意の $v \in \Omega$ に対して $x \succ^g v$ が言えることになり、$f^{\succsim^g}(p,m) = \{x\}$ となって一価性が言える。さらには、

$x = f^{\succsim^g}(p,m), v = f^{\succsim^g}(q,w)$ とし、$p \cdot v \le m$ かつ $x \neq v$ だったとすれば $x \succ^g v$ なのだから、$q \cdot x > w$ でなければならず、弱公理が言える。よって後は上の主張を示せばよい。

そこでいま逆に主張が成り立たなかったとし、$y \succsim^g (1-t)y + tz$ であったとしよう。$y(s) = (1-s)y + sz$ とする。(II) の c) から $y(s) \succsim^g y$ がすべての $s \in [0,1]$ に対して言えるので、$t \in \arg\min\{u^g(y(s), y) | s \in [0,1]\}$ である。すると一階条件と二階条件、そして補題 7.3 から、

$$g(y(t)) \cdot (z-y) = 0,$$

$$(z-y)^T Dg(y(t))(z-y) \ge 0,$$

が言えるがこれは条件 (A') に矛盾している。以上で証明が完成した。 ■

7.6 (V) の証明

まず (1) の仮定の下では補題 7.3 から $u^g(ay(t;x,v), av)$ が定数関数であることを確認できる。よって $ay(t;x,v)$ の軌道と $y(t;ax,av)$ の軌道は一致していなければならない。ここから (2) を得る。逆に (2) を仮定すると、任意の $v \in \Omega$ に対して $ay(t;x,v)$ の軌道と $y(t;ax,av)$ の軌道は一致する。すると $g(x)$ の直交補空間の十分小さな元 $w \neq 0$ に対して $\dot{y}(0;x,x+w)$ は w の正の定数倍なので、$\dot{y}(0;ax,ax+aw)$ もそうでなければならず、したがって w は $g(ax)$ とも直交している。これは $g(x)$ の直交補空間と $g(ax)$ の直交補空間が一致していることを意味し、ここから (1) を得る。 ■

7.7 (VI) の証明

まず、u^g_v が一次同次であることは明白である。一般に、一次同次な準凹関数は凹である[*6]から、u^g_v は凹であることがわかる。よって $\succsim^g$ を表現する連続かつ凹な効用関数が存在するのであるから、最小凹な効用関数 w も存在する。最小凹の定義から、単調な凹関数 $\phi : w(\Omega) \to \mathbb{R}$ で $u^g_v = \phi \circ w$ となるものが存在しなければならない。ϕ が凸であればそれは正一次変換でなければならないが、ここから容易に u^g_v も最小凹であることが示せる。よってそれが証明の目標になる。

そこでまず、$a, b \in w(\Omega)$ と $\alpha \in]0,1[$ を取り、$x \in w^{-1}(a)$ と $y \in w^{-1}(b)$、さらに $z \in w^{-1}((1-\alpha)a + \alpha b)$ をひとつずつ取ってくる。$x \sim^g u^g_v(x)v, y \sim^g u^g_v(y)v, z \sim^g u^g_v(z)v$

[*6] Stokey and Lucas (1989) の問題 2-1 を見よ。

である。w は凹であるから、

$$\begin{aligned} w(u_v^g(z)v) &= w(z) \\ &= (1-\alpha)w(x) + \alpha w(y) \\ &= (1-\alpha)w(u_v^g(x)v) + \alpha w(u_v^g(y)v) \\ &\le w(((1-\alpha)u_v^g(x) + \alpha u_v^g(y))v), \end{aligned}$$

である。ここから $u_v^g(z) \le (1-\alpha)u_v^g(x) + \alpha u_v^g(y)$ が示せる。したがって、

$$\phi((1-\alpha)a + \alpha b) = u_v^g(z) \le (1-\alpha)u_v^g(x) + \alpha u_v^g(y) = (1-\alpha)\phi(a) + \alpha\phi(b),$$

となって、ϕ の凸性が示せた。以上で証明が完成した。■

7.8 系 2 の証明

$t^*(x,v)$ の存在については定理 4.1 の (I) とまったく同様に証明すればよいので、残りの主張だけ確かめる。x と v が同一直線上にあれば主張は明白なので、そうでないとしよう。ここで $t \neq t^*(x,v)$ とし、$y^*(t;x,v)$ を y^* と略記することにする。すると補題 7.3 から、

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}[u^g(y^*(s;x,v),v)]|_{s=t} &= D_x u^g(y^*,v)\dot{y}^*(t;x,v) \\ &= D_x u^g(y^*,v)\sigma(y^*,x,v)[(g(y^*)\cdot x)v - (g(y^*)\cdot v)x] \\ &= \sigma(y^*,x,v)D_x u^g(y^*,v)[(g(y^*)\cdot x)v - (g(y^*)\cdot v)x] \\ &= \sigma(y^*,x,v)PD_x u^g(y^*,v)[(g(y^*)\cdot x)v - (g(y^*)\cdot v)x] \\ &= \sigma(y^*,x,v)\lambda(y^*)Pg(y^*)[(g(y^*)\cdot x)v - (g(y^*)\cdot v)x] \\ &= \sigma(y^*,x,v)\lambda(y^*)g(y^*)[(g(y^*)\cdot x)v - (g(y^*)\cdot v)x] \\ &= 0 \end{aligned}$$

がわかる。したがって、$u^g(x,v) = u^g(y^*(t^*(x,v);x,v),v)$ であることがわかる。故に $u^g(x,v)v = u^g(y^*(t^*(x,v);x,v),v)v = y^*(t^*(x,v);x,v)$ となる。これで示せた。■

参考文献

[1] Antonelli, G. B. (1886) *Sulla Teoria Matematica della Economia Politica.* Pisa: Nella tipografia del Folchetto.

[2] Arrow, K. (1959) “Rational Choice Functions and Orderings.” *Econometrica*, 26:121-127.

[3] Benveniste, L. M. and Scheinkman, J. A. (1979) “On the Differentiability of the Value Function in Dynamic Models of Economics.” *Econometrica*, 47:727-732.

[4] Boldrin, M. and Montrucchio, L. (1986) “On the Indeterminacy of Capital Accumulation Paths.” *Journal of Economic Theory*, 40:26-39.

[5] Debreu, G. (1972) “Smooth Preferences.” *Econometrica*, 40:603-615.

[6] ——————. (1976) “Least Concave Utility Function.” *Journal of Mathematical Economics,* 3:121-129.

[7] Gale, D. (1960) “A Note on Revealed Preference.” *Economica*, 27:348-354.

[8] Hosoya, Y. (2011a) “An Existence Result and a Characterization of the Least Concave Utility of Homothetic Preferences.” *Advances in Mathematical Economics*, 15:123-127.

[9] ——————. (2011b) “An Existence Result and a Characterization of the Least Concave Utility of Quasi-Linear Preferences.” Forthcoming to *Journal of Mathematical Economics.*

[10] ——————. (2011c) “Elementary Form and Proof of the Frobenius Theorem for Economists.” Forthcoming to *Advances in Mathematical Economics.*

[11] Hurwicz, L. and Uzawa, H. (1971) “On the Integrability of Demand Functions.” in: Chipman, J. S., Hurwicz, L., Richter, M. K., and H. F. Sonnenschein (eds.) *Preferences, Utility, and Demand.* Harcourt Brace Janovich, New York, 1971.

[12] Kihlstrom, R., Mas-Colell, A., and Sonnenschein, H. (1976) “The Demand Theory of the Weak Axiom of Revealed Preference.” *Econometrica*, 44:971-978.

[13] Kim, T. and Richter, M. K. (1986) “Nontransitive-Nontotal Consumer Theory.” *Journal of Economic Theory*, 38:324-363.

[14] Mas-Colell, A. (1977) “The Recoverability of Consumers’ Preferences from Market Demand Behavior.” *Econometrica*, 45:1409-1430.

[15] Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995) *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, New York.

[16] Otani, K. (1983) “A Characterization of Quasi-Concave Functions.” *Journal of Economic Theory*, 31:194-196.

[17] Pareto, V. (1909) *Manuel d’economie Politique.* Geneve: Librairee Droz.

[18] Quah, J. K-H. (2006) “Weak Axiomatic Demand Theory.” *Economic The-*

ory, 29:677-699.

[19] Richter, M. K. (1966) “Revealed Preference Theory.” *Econometrica*, 34:635-645.

[20] ————. (1979) “Duality and Rationality.” *Journal of Economic Theory*, 20:131-181.

[21] Rose, H. (1958) “Consistency of Preference: The Two-Commodity Case”. *Review of Economic Studies*, 25:124-125.

[22] Rubinstein, A. (1998) *Modelling Bounded Rationality.* MIT Press.

[23] Samuelson, P. A. (1938) “A Note on the Pure Theory of Consumer’s Behaviour.” *Economica*, 5:61-71.

[24] ————. (1950) “The Problem of Integrability in Utility Theory.” *Economica*, 17:355-385.

[25] Stokey, N. and Lucas, R. (1989) *Recursive Methods in Economic Dynamics.* Harvard University Press.

[26] Uzawa, H. (1960) “Preferences and Rational Choice in the Theory of Consumption.” in: Arrow, K. J., Karlin, S., and P. Suppes (eds.) *Mathematical Models in the Social Science.* Stanford University Press. Reprinted in: Chipman, J. S., Hurwicz, L., Richter, M. K., and H. F. Sonnenschein (eds.) *Preferences, Utility, and Demand.* Harcourt Brace Janovich, New York, 1971.

[27] 細矢祐誉 (2009) 「消費者理論と平面の幾何学」『三田学会雑誌』102:161-172.

[28] ————(2010)『効用関数の測定理論：消費者の需要から選好を逆算する手法』三菱経済研究所。