Golden Eggs and Hyperbolic Discounting の私的な解説

細矢祐誉

中央大学

June 6, 2021

論文紹介

この論文では動学的不整合性、特に、現在を重視しすぎて難題を将来に先送りしてしまう行動と、それを抑止するためのコミットメントについて序文で議論している。しかしモデル自体はもっと限定的に、普通預金 (liquid asset) と定期預金 (illiquid asset) の二種類の預金のどちらを選択するかというモデルの分析をした論文である。定期預金の方が長い期間をかけて崩さないと使えないが、利子率はこのモデルではふたつの預金で同一とされる。それにもかかわらず、動学的不整合性のために定期預金の需要が出てくる。

モデルの紹介（1）

この論文のモデルは $1, ..., T$ までの T 期間離散時間モデルである。c_t を t 期の消費としたとき、t 期の消費者の t 期以降の効用 U_t は以下の式で表される。（$\beta, \delta \in]0, 1[$ とする）

$$U_t(c_t, ..., c_T) = u(c_t) + \beta \sum_{i=1}^{T-t} \delta^i u(c_{t+i}).$$

$t = 1$ のとき、2 期と 3 期の効用の相対的な比重は $1 : \delta$ である。ところが $t = 2$ になると $1 : \beta\delta$ に変化する。このため、1 期のときに効用 U_1 が最大になるように立てた計画を 2 期以降で修正せずに取るかどうかがわからなくなる。そこで、この消費者を 1 期目と 2 期目で「違うプレイヤー」と見なしてゲームの形にして分析することを考える。これが、Laibson のモデルの特徴である。

モデルの紹介（２）

t 期の期初には、消費者はふたつの非負の数 (x_{t-1}, z_{t-1}) を与えられている。x_{t-1} が $t-1$ 期に残した普通預金の額、z_{t-1} が $t-1$ 期に残した定期預金の額である。これらは粗利子率 $R_t > 1$ で利子所得を発生させる。また、消費者は労働を固定単位行っていて、労働所得 $y_t > 0$ を毎期受け取るとする。y_t および R_t はこの論文では外生変数である。t 期の消費者が考えることは、これら所得からどのように消費 c_t、普通預金 x_t、定期預金 z_t を決めるか、ということである。

モデルの紹介（3）

消費は、普通預金とその収入、および労働所得からしか行うことができない。つまり、

$$0 \le c_t \le y_t + R_t x_{t-1} \tag{1}$$

が必ず成り立たねばならない。一方、$t-1$ 期の定期預金とその収入は t 期の普通預金に変えることができる。したがって

$$y_t + R_t(z_{t-1} + x_{t-1}) - c_t = z_t + x_t \tag{2}$$

がもうひとつの制約式である。$z_t,\ x_t \ge 0$ は当然仮定される。したがって t 期の消費者の「戦略」は、それまでの歴史 $h_t = (x_0, z_0, (c_\tau, x_\tau, z_\tau)_{\tau=1}^{t-1})$ に対して上の (1)(2) 式を満たす (c_t, x_t, z_t) を返す関数として定式化される。

モデルの紹介（4）

問題をゲームとして扱うことによって、本来ならばデメリットしかないはずの定期預金が意味を持ってくる。つまり、z_1 として与えられたお金およびその利子は、2期目には消費に回せない。2期目になると、自分は3期目以降を2期目と比較して重要視しなくなるので、ついつい大きく消費しそうになるが、1期目に定期預金に預けておくことでそれを禁止できるのである。このために、普通預金と同じ利子率を持っているにもかかわらず、定期預金は意味を持つ。

効用関数の仮定

各期ごとの効用関数 $u(c)$ は、$\rho > 0$ という一定の相対的危険回避度を持つことが仮定されているが、今回は少し条件を緩めたい。

仮定 1

$u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ は連続、増加的、狭義凹で、$\mathbb{R}_{++}$ で連続微分可能、$\lim_{c \to 0} u'(c) = +\infty$ である。

所得と利子についての仮定

このゲームの外生変数は $x_0, z_0 \geq 0$ と $(y_t, R_t)_{t=1}^{T}$ である。$y_t > 0$ と $R_t > 1$ は常に仮定する。後に証明内部で、労働所得が減少しすぎない、もしくは利子が大きくなりすぎないという仮定が追加で必要になる。Laibson は次の仮定を置いた。

仮定 2

すべての $t \in \{1, ..., T-1\}$ と $\tau \in \{1, ..., T-t\}$ に対して

$$u'(y_t) \geq \beta\delta^{\tau} \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t+i} \right) u'(y_{t+\tau}).$$

が成り立つ。

Laibson の主張

Laibson が主結果として主張しているのは以下の内容である。未定義の概念（P1-P4 と RE）は後で説明する。

主張 (Laibson (1997))

$T \geq 2$ とし、u が CRRA 関数で、仮定 2 が満たされるとする。このとき P1-P4 と RE を満たす戦略プロファイル s^* は一意に定まり、それがこのゲームのただひとつの部分ゲーム完全均衡である。

Laibson の主張の誤り

この主張が正しくないことはただちにわかる。というのも、均衡経路の外側には T 期の定期預金が正であるような部分ゲームがあり、そこでは定期預金をどう普通預金と定期預金に分配しようと効用に一切の影響を与えない。したがって少なくとも均衡経路の外側の挙動に関しては、部分ゲーム完全均衡がただひとつになることはあり得ないのである。
では、「均衡経路の一意性」の方は言えるだろうか？　今回の発表では、これを証明の目標とする。

実現可能経路、実現経路

$(c_t, x_t, z_t)_{t=1}^T$ が**実現可能経路**であるとは、モデルの制約条件 (1) と (2) を常に満たすことを指す。
特に、戦略プロファイル s が与えられたとしよう。このとき、$h_1 = (x_0, z_0)$ を与えると、$s_1(h_1) = (c_1, x_1, z_1)$ が定まる。これを h_1 にくっつけて $h_2 = (x_0, z_0, c_1, x_1, z_1)$ という歴史を作れば、$s_2(h_2) = (c_2, x_2, z_2)$ が定まる。以下、これを繰り返して得られる経路 $(c_t, x_t, z_t)_{t=1}^T$ は実現可能経路である。これを戦略プロファイル s が**実現する経路**と呼ぶ。
特に、サブゲーム完全均衡 s^* が実現する経路は**均衡経路**と呼ぶ。

指定された歴史から先に実現する経路

戦略プロファイル s に対して、$t-1$ 期までの歴史 h_t が与えられたときの t 期以降に s によって実現する経路を $s|h_t$ と書く。具体的に言うと、まず $s_t(h_t) = (c_t, x_t, z_t)$ として定義する。h_{t+1} を、h_t の末尾に上の $s_t(h_t)$ を加えてできた歴史として、
$s_{t+1}(h_{t+1}) = (c_{t+1}, x_{t+1}, z_{t+1})$ とする。この操作を帰納的に繰り返してできた有限列 $(c_\tau, x_\tau, z_\tau)_{\tau=t}^T$ が $s|h_t$ である。この記号を使うと、s が実現する経路は $s|h_1$ と書ける。
$t-1$ 期までにこのゲームで可能な歴史 $h_t = (x_0, z_0, (c_\tau, x_\tau, z_\tau)_{\tau=1}^{t-1})$ をすべて集めてできた集合を H_t と書く。

条件群の定義（1）

$t^* \in \{1, ..., T-1\}$ が与えられたとき、t^* 期以降の任意の経路 $(c_t, x_t, z_t)_{t=t^*}^T$ に対しての条件に以下、４つほど名前をつける。

条件 P1

$t^* \leq t < T$ ならば以下の式が成り立つ。

$$u'(c_t) \geq \max_{\tau \in \{1,...,T-t\}} \beta\delta^\tau \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t+i} \right) u'(c_{t+\tau}).$$

後で証明でわかるが、これは最適化の一階条件と対応している。

条件群の定義（2）

条件 P2

もし仮に $t^* \leq t < T$ に対して

$$u'(c_t) > \max_{\tau \in \{1,\ldots,T-t\}} \beta\delta^\tau \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t+i} \right) u'(c_{t+\tau})$$

ならば、$c_t = y_t + R_t x_{t-1}$ である。

こちらは最適化の条件が等号で得られなければ、解が端点であるという主張に対応している。

条件群の定義（３）

条件 P3

もし仮に $t^* \leq t < T-1$ に対して

$$u'(c_{t+1}) < \max_{\tau \in \{1,\ldots,T-t-1\}} \delta^{\tau} \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t+i} \right) u'(c_{t+\tau-1})$$

であれば、$x_t = 0$ である。

これは、c_{t+1} が「多すぎた」場合、それは t 期から見て「減らしたいけれど減らせなかった」ということを意味する。t 期の個人が c_{t+1} を減らす方法は x_t を減らすことなので、$x_t = 0$ でなければならない。

条件群の定義（4）

条件 P4

もし仮に $t^* \leq t < T-1$ に対して

$$u'(c_{t+1}) > \max_{\tau \in \{1,\ldots,T-t-1\}} \delta^\tau \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t+i} \right) u'(c_{t+\tau-1})$$

ならば、$z_t = 0$ である。

こちらは P3 と逆で、c_{t+1} が「少なすぎた」場合、それは t 期から見て「増やしたいけれど増やせなかった」ことを意味する。x_t をこれ以上増やすことができなかった以上、$z_t = 0$ でなければならない。

条件群の定義（5）

最後の条件は経路 $(c_t, x_t, z_t)_{t=t^*}^{T}$ ではなく、戦略プロファイル s についての条件である。

条件 RE

すべての $h_{T-1} \in H_{T-1}$ に対して、
$s|h_{T-1} = (c_{T-1}, x_{T-1}, z_{T-1}, c_T, x_T, z_T)$ とすると、$x_T = z_T = 0$ が成り立つ。

この条件は resource exhausting 条件と呼ばれていて、戦略プロファイル s で実現する経路では最終期に預金がゼロになるという条件である。

主結果

今回示したいのは以下の主張である。

定理 1

仮定 1 と仮定 2 の下で、RE を満たしつつ、任意の歴史 $h_{t^*} \in H_{t^*}$ に対して以降に実現する経路 $s|h_{t^*} = (c_t, x_t, z_t)_{t=t^*}^{T}$ が必ず P1-P4 を満たすようなすべての戦略 s について、$s|h_1$ は同一である。また、このゲームは部分ゲーム完全均衡 s^* を持ち、それは RE を満たし、また $s^*|h_1$ は P1-P4 を満たす。特に、部分ゲーム完全均衡のときの均衡経路は一意に定まる。

ステップ1

ステップ1

s, s' が RE を満たし、任意の歴史 $h_t \in H_t$ に対して $s|h_t$ と $s'|h_t$ が共に P1-P4 を満たすような戦略プロファイルであるとき、任意の $t < T$ と $h_t \in H_t$ に対して $s|h_t = s'|h_t$ が成り立つ。

このステップの証明は４つのサブステップを経由して得られる。
証明の際は、$t = 1$ を仮定して示せれば十分である。

サブステップ1.1

サブステップ1.1

実現可能経路 $(c_t, x_t, z_t)_{t=t^*}^{T}$ が P1-P4 を満たし、かつ $x_T = z_T = 0$ とする。このとき、$t^* \leq t < T$ ならば $c_t \geq y_t$ が成り立つ。

サブステップ1.1の証明（1）

後ろ向きの帰納法を用いる。$t \in \{t^*, ..., T-1\}$ を固定し、帰納法の仮定として $\tau \in \{t+1, ..., T-1\}$ については $c_\tau \geq y_\tau$ が常に成り立っていたと仮定しよう（$t = T-1$ のときはこのような τ が存在しないことに注意）。$x_T = z_T = 0$ であるため、$\tau = T$ のときも $c_\tau \geq y_\tau$ である。

サブステップ1.1の証明（2）

もし

$$u'(c_t) > \max_{\tau \in \{1,\dots,T-t\}} \beta\delta^{\tau} \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t+i} \right) u'(c_{t+\tau})$$

ならば、条件 P2 から $c_t = y_t + R_t x_{t-1} \geq y_t$ である。

サブステップ1.1の証明（3）

そうでないならば条件 P1 と仮定 2 から

$$
\begin{aligned}
u'(c_t) &= \max_{\tau \in \{1,\ldots,T-t\}} \beta\delta^{\tau} \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t+i} \right) u'(c_{t+\tau}) \\
&\leq \max_{\tau \in \{1,\ldots,T-t\}} \beta\delta^{\tau} \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t+i} \right) u'(y_{t+\tau}) \\
&\leq u'(y_t)
\end{aligned}
$$

を得る。したがって $c_t \geq y_t$ でなければならない。以上でサブステップ 1.1 の証明が完成した。

サブステップ1.2

サブステップ1.2

二つの実現可能経路 $(c_t, x_t, z_t)_{t=1}^T$ および $(c'_t, x'_t, z'_t)_{t=1}^T$ は両方とも P1-P4 を満たし、かつ $x_T = z_T = x'_T = z'_T = 0$ とする。さらに、与えられた $t \in \{1, ..., T-1\}$ に対して、すべての $\tau \in \{1, ..., T-t\}$ において $c_{t+\tau} \geq c'_{t+\tau}$ が成り立ち、かつ少なくともひとつは不等号が厳密に成り立つとする。このとき、$c_t \geq c'_t$ である。

サブステップ1.2の証明（1）

条件 P1 から、

$$u'(c_t) \geq \max_{\tau \in \{1,\dots,T-t\}} \beta\delta^{\tau} \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t+i} \right) u'(c_{t+\tau}) \tag{3}$$

が成り立つ。

サブステップ1.2の証明（2）

もし (3) が等号で成り立っているとすれば、条件 P1 から

$$
\begin{aligned}
u'(c'_t) &\geq \max_{\tau \in \{1,\dots,T-t\}} \beta\delta^\tau \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t+i} \right) u'(c'_{t+\tau}) \\
&\geq \max_{\tau \in \{1,\dots,T-t\}} \beta\delta^\tau \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t+i} \right) u'(c_{t+\tau}) \\
&= u'(c_t)
\end{aligned}
$$

となる。よって $c_t \geq c'_t$ である。

サブステップ1.2の証明（3）

したがって以下では、(3) 式が厳密な不等号で成り立つと仮定する。$t=1$ ならば、条件 P2 から $c_1 = y_1 + R_1 x_0 \geq c_1'$ である。$t>1$ ならば、条件 P2 から $c_t = y_t + R_t x_{t-1}$ であり、一方で $c_t' \leq y_t + R_t x_{t-1}'$ である。よってもし $x_{t-1} \geq x_{t-1}'$ ならば主張は正しいので、以降は $x_{t-1}' > x_{t-1}$ を仮定する。すると $x_{t-1}' > 0$ である。

サブステップ1.2の証明（4）

サブステップ1.1から、

$$
\begin{aligned}
0 &< \sum_{\tau=1}^{T-t}\left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t+i}^{-1}\right)(c_{t+\tau} - c'_{t+\tau}) \\
&\leq \sum_{\tau=1}^{T-t}\left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t+i}^{-1}\right)(c_{t+\tau} - y_{t+\tau}) \\
&= x_t + z_t = R_t(x_{t-1} + z_{t-1}) + y_t - c_t = R_t z_{t-1}
\end{aligned}
$$

を得る。ここで最後の行の等号は制約条件

$$
c_{t+\tau} - y_{t+\tau} = R_{t+\tau}(z_{t+\tau-1} + x_{t+\tau-1}) - (z_{t+\tau} - x_{t+\tau})
$$

と、既に前ページで得た $c_t = y_t + R_t x_{t-1}$ で得られる。よって $z_{t-1} > 0$ である。

サブステップ1.2の証明（5）

以上で、$x'_{t-1} > 0$ と $z_{t-1} > 0$ がわかったので、これに P3 と P4 の対偶を適用してやると、

$$
\begin{aligned}
u'(c'_t) &\geq \max_{\tau \in \{1,\dots,T-t\}} \delta^\tau \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t+i} \right) u'(c'_{t+\tau}) \\
&\geq \max_{\tau \in \{1,\dots,T-t\}} \delta^\tau \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t+i} \right) u'(c_{t+\tau}) \\
&\geq u'(c_t)
\end{aligned}
$$

となり、$c_t \geq c'_t$ がわかる。これでサブステップ 1.2 の証明が完成した。

サブステップ1.3

サブステップ1.3

二つの実現可能経路 $(c_t, x_t, z_t)_{t=1}^{T}$ と $(c'_t, x'_t, z'_t)_{t=1}^{T}$ は両方とも P1-P4 を満たし、かつ $x_T = z_T = x'_T = z'_T = 0$ とする。このとき、$t \in \{1, ..., T\}$ に対して $c_t = c'_t$ である。

サブステップ 1.3 の証明

そうでないと仮定し、$t^* = \max\{t | c_t \neq c'_t\}$ と定義しよう。一般性を失うことなく $c_{t^*} > c'_{t^*}$ とする。サブステップ 1.2 の主張から、すべての t に対して $c_t \geq c'_t$ がわかる。すると、

$$
\begin{aligned}
0 &< \sum_{t=1}^{T} \left(\prod_{i=1}^{t} R_i^{-1} \right) (c_t - c'_t) \\
&= \sum_{t=1}^{T} \left(\prod_{i=1}^{t} R_i^{-1} \right) [(c_t - y_t) - (c'_t - y_t)] \\
&= (x_0 + z_0) - (x_0 + z_0) = 0
\end{aligned}
$$

となるがこれは矛盾である。

サブステップ1.4

サブステップ1.4

実現可能経路 $(c_t, x_t, z_t)_{t=1}^{T}$ は P1-P4 を満たし、かつ $x_T = z_T = 0$ とする。このとき、$t > 1$ ならば $c_t = y_t + R_t x_{t-1}$ が成り立つ。

サブステップ 1.4 の証明

$t > 1$ とし、仮に $c_t < y_t + R_t x_{t-1}$ であったとしよう。$x_T = z_T = 0$ なので、$t < T$ である。条件 P1 と P2 の対偶から、

$$u'(c_t) = \max_{\tau \in \{1,\ldots,T-t\}} \beta\delta^\tau \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t+i} \right) u'(c_{t+\tau})$$

が成り立つ。よって

$$u'(c_t) < \max_{\tau \in \{1,\ldots,T-t\}} \delta^\tau \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t+i} \right) u'(c_{t+\tau})$$

となる。条件 P3 からこれは $x_{t-1} = 0$ を意味する。すると $c_t < y_t$ となるがこれはサブステップ 1.1 に矛盾している。

残りの証明

いま、ステップ1の主張の前件を満たす s, s' を取ってきて、$s|h_1 = (c_t, x_t, z_t)_{t=1}^T$ とし、$s'|h_1 = (c'_t, x'_t, z'_t)_{t=1}^T$ としよう。$c_t = c'_t$ はすでにサブステップ 1.3 で示したが、サブステップ 1.4 から $x_t = x'_t$ がわかる。よって (2) の制約条件式から容易に $z_t = z'_t$ が示せる。以上でステップ1の証明が完成することになる。

ステップ 2

ステップ 2

部分ゲーム完全均衡 s^* が存在する。さらに、それは RE を満たし、任意の $h_t \in H_t$ に対して $s^*|h_t$ は P1-P4 を満たす。さらに、$h_1 = (x_0, z_0)$ について、均衡経路 $s^*|h_1$ は連続的に動く。

このステップは T についての数学的帰納法を用いて証明するが、そのために最後の主張が必要になる。ステップ 1 とステップ 2 が定理の主張を意味することは明白である。

帰納法の基底（1）

まず、$T = 2$ のときを考える。後ろ向きに考えれば二期目に $z_2 + x_2 = R_2 z_1$, $c_2 = y_2 + R_2 x_1$ が最適反応の必要十分条件となる。そして一期目は $z_1 = 0$ であることが最適反応の必要条件で、このとき $z_2 = x_2 = 0$ となって RE が満たされる。すると $x_1 = R_1 x_0 + R_1 z_0 + y_1 - c_1$ でなければならないので、c_1 だけが実質的に選べる変数で、一期目に解くべき問題は

$$\begin{aligned} \max_{c_1} \quad & u(c_1) + \beta\delta u(y_2 + R_2[R_1 x_0 + R_1 z_0 + y_1 - c_1]) \\ \text{subject to.} \quad & 0 \le c_1 \le y_1 + R_1 x_0, \end{aligned} \tag{4}$$

である。この問題の解 c_1^* が正値で、(x_0, z_0) について連続であることはベルジュの定理を適用するだけで示せる。（均衡経路外の解は一意にならないので、そこでの連続性までは示せないことに注意）

帰納法の基底（２）

既に RE は一つ前のスライドで示している。$T = 2$ だと P3 と P4 は意味のない条件になる。今回の場合 P1 は

$$u'(c_1) \geq \beta\delta R_2 u'(c_2)$$

を意味し、また P2 は

$$u'(c_1) > \beta\delta R_2 u'(c_2) \Rightarrow c_1 = y_1 + R_1 x_0$$

を意味する。この二つが証明の目標である。

帰納法の基底（３）

問題 (4) の解 c_1^* は正なので、目的関数の c_1 についての微分は c_1^* で非負でなければならない。つまり、

$$u'(c_1^*) - \beta\delta R_2 u'(c_2^*) \geq 0$$

である。ここから P1 が導かれる。さらにこれが正であれば端点解が出ていなければならないので、$c_1^* = y_1 + R_1 x_0$ であり、ここから P2 が導かれる。c_2^* と x_1^* は c_1^* の連続関数で、$z_1^* = x_2^* = z_2^* = 0$ なので、$s^*|h_1$ は h_1 について連続である。以上で、$T = 2$ の場合の証明が終わった。

帰納法のステップ（1）

以後、$T > 2$ とし、$T-1$ までの証明が終わったとする。$(c_t(x_0, z_0), x_t(x_0, z_0), z_t(x_0, z_0))_{t=1}^{T-1}$ を、$T-1$ 期のときの部分ゲーム完全均衡で実現する均衡経路を示す関数とする。T 期の問題については、2 期目以降の問題の部分ゲームでの部分ゲーム完全均衡の解の実現経路は

$$(c_t, x_t, z_t)_{t=2}^{T} = (c_{t+1}(x_1, z_1), x_{t+1}(x_1, z_1), z_{t+1}(x_1, z_1))_{t=1}^{T-1} \equiv \omega(x_1, z_1)$$

で定まっているため、後ろ向き帰納法により、$t = 1$ の時のプレイヤーが

$$\begin{aligned} \max_{c_1, x_1, z_1} \quad & u(c_1) + \sum_{t=2}^{T} \beta\delta^t u(c_t(x_1, z_1)) \\ \text{subject to.} \quad & 0 \le c_1 \le R_1 x_0, \\ & c_1 + x_1 + z_1 = R_1(x_0 + z_0) + y_1 \end{aligned} \tag{5}$$

を解いて c_1, x_1, z_1 を定めれば部分ゲーム完全均衡が求まる。

帰納法のステップ（2）

問題 (5) にベルジュの定理を適用することで、我々は部分ゲーム完全均衡 s^* の存在と、均衡経路 $s^*|h_1$ の (x_0, z_0) についての連続性が示せる。s^* が RE を満たすのは明白であるため、後は $s^*|h_1$ が P1-P4 を満たすことを示せれば証明が終わる。
以降の議論のために、

$$U(c_1, ..., c_T) = u(c_1) + \beta \sum_{t=2}^{T} \delta^{t-1} u(c_t)$$

という記号を定義しておく。

帰納法のステップ（3）

次の問題を考える。

$$
\begin{aligned}
\max_{(c_t,x_t,z_t)_{t=1}^T} \quad & U(c_1,...,c_T) \\
\text{subject to.} \quad & x_t, z_t \geq 0 \\
& 0 \leq c_t \leq y_t + R_t x_{t-1} \\
& x_t + z_t = R_t(x_{t-1} + z_{t-1}) + y_t - c_t \\
& x_T = z_T = 0 \\
& (c_t, x_t, z_t)_{t=2}^T \text{ satisfies P1-P4.}
\end{aligned}
$$

いま $s^*|h_1$ は帰納法の仮定から $2 \leq t \leq T$ の範囲内では P1-P4 を満たすので、この問題の解でなければならない。この問題の制約を満たす $(c_t, x_t, z_t)_{t=1}^T$ の集合を C_1、解の集合を C_1^* と置こう。

帰納法のステップ（4）

上記問題を少し修正する。

$$
\begin{aligned}
\max_{(c_t,x_t,z_t)_{t=1}^T} \quad & U(c_1,...,c_T) \\
\text{subject to.} \quad & x_t, z_t \geq 0 \\
& 0 \leq c_t \leq y_t + R_t x_{t-1} \\
& x_t + z_t = R_t(x_{t-1} + z_{t-1}) + y_t - c_t \\
& x_T = z_T = 0 \\
& c_2 \geq y_2 \\
& c_t = y_t + R_t x_{t-1} \text{ if } t \geq 3
\end{aligned}
$$

この問題の制約を満たす $(c_t, x_t, z_t)_{t=1}^T$ の集合を C_2、解の集合を C_2^* と置こう。

サブステップ2.1

サブステップ2.1

$C_1 \subset C_2$ が成り立つ。

サブステップ2.1の証明

$(c_t, x_t, z_t)_{t=1}^T \in C_1$ とする。サブステップ1.1から $c_2 \geq y_2$ がわかる。また、サブステップ1.4から $t > 2$ のときには $c_t = y_t + R_t x_{t-1}$ である。よって、$(c_t, x_t, z_t)_{t=1}^T \in C_2$ がわかる。

サブステップ2.2

サブステップ2.2

$C_1^* \subset C_2^*$ である。

サブステップ2.2の証明（１）

まず、C_2 が有界閉集合になることはすぐ示せるので、解集合 C_2^* の非空性はすぐに示せる。$C_1 \subset C_2$ なので、C_1 の元の中に C_2^* に含まれるものが存在していれば証明は終わる。いま C_2^* から $\omega' = (c_t', x_t', z_t')_{t=1}^T$ をひとつ取り、$x_1'' = R_2^{-1}(c_2' - y_2)$ とし、$z_1'' = z_1' + x_1' - x_1''$ として、残りはそのままにした列 $\omega'' = (c_t'', x_t'', z_t'')_{t=1}^T$ を取る。この ω'' が $C_2^* \cap C_1$ を満たすことを示すのが証明の目標である。

サブステップ2.2の証明（2）

まず、ω'' が C_2 に属することは、作り方からすぐにわかる。さらに目的関数の値は ω' と ω'' で同じ値なので、$\omega'' \in C_2^*$ であることもわかる。また、$t \geq 2$ ならば $c_t'' = y_t + R_t x_{t-1}''$ なので、ω'' は $t \geq 2$ で P2 を満たす。よって後は P1 と P3 と P4 を確かめればよい。

P1について（1）

ω'' が $t \geq 2$ で P1 を満たすことを示すためには、背理法を用いる。仮に $(c''_t, x''_t, z''_t)_{t=2}^{T}$ が P1 を満たしていなかったとすると、ある $t' \geq 2, t'' > t'$ について

$$u'(c''_{t'}) < \beta\delta^{t''-t'} \left(\prod_{i=1}^{t''-t'} R_{t'+i} \right) u'(c''_{t''})$$

が成り立っていることになる。

P1について（2）

まず、$x''_{t'-1} > 0$である場合を考えよう。$\bar{\omega} = (\bar{c}_t, \bar{x}_t, \bar{z}_t)_{t=1}^T$を以下のように構成する。まず$\bar{c}_{t'-1} = c''_{t'-1}, \bar{x}_{t'-1} = x''_{t'-1} - \varepsilon$とし、$\bar{z}_{t'-1} = z''_{t'-1} + \varepsilon$とする。以後、$t' \leq t < t'' - 1$に対して帰納的に$\bar{c}_t = y_t + R_t \bar{x}_{t-1}$とし、また$\bar{x}_t = x''_t, \bar{z}_t = z''_t + \left(\prod_{i=1}^{t-t'+1} R_{t'-1+i}\right)\varepsilon$とする。$t = t'' - 1$に対しても$\bar{c}_t$は同様に定義するが、ただし$\bar{x}_t = x''_t + \left(\prod_{i=1}^{t-t'+1} R_{t'-1+i}\right)\varepsilon$とし、$\bar{z}_t = z''_t$とする。そして$\bar{c}_{t''} = y_t + R_t \bar{x}_{t''-1}$とし、後の箇所はすべて$\bar{c}_t = c''_t, \bar{x}_t = x''_t, \bar{z}_t = z''_t$となるようにする。こうして作られた$\bar{\omega}$は、$\varepsilon \leq x_{t'-1}$である限り必ず$C_2$に所属する。しかし仮定から十分に$\varepsilon > 0$が小さいときには$U(c''_1, ..., c''_T) < U(\bar{c}_1, ..., \bar{c}_T)$となり、$\omega'' \in C_2^*$に矛盾する。

P1について（3）

残った場合は $x''_{t'-1} = 0$ の場合のみである。この場合 $c''_{t'} = y_{t'}$ となる。ところが仮定 2 から

$$\begin{aligned} u'(y_{t'}) &\geq \beta\delta^{t''-t'} \left(\prod_{i=1}^{t''-t'} R_{t'+i} \right) u'(y_{t''}) \\ &\geq \beta\delta^{t''-t'} \left(\prod_{i=1}^{t''-t'} R_{t'+i} \right) u'(c''_{t''}) \end{aligned}$$

となって、これは当初の仮定に矛盾している。以上で ω'' が $t \geq 2$ で P1 を満たすことがわかった。

P3について

P3についての証明はP1の証明の $x''_{t'-1} > 0$ のときの証明とほとんど同じなので省略する。

P4について（1）

仮に $t' \geq 3$ に対して

$$u'(c''_{t'}) > \max_{\tau \in \{1,\ldots,T-t'\}} \delta^{\tau} \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t'+i} \right) u'(c''_{t'+\tau})$$

であり、かつ $z''_{t'-1} > 0$ であったとしよう。$z''_T = 0$ であるから、$t^* = \min\{t | z''_t = 0\}$ はきちんと定義できる。さらに、$t \geq 3$ ならば $x''_t + z''_t = R_t z''_{t-1}$ なので、$x''_T = 0$ から $z''_{T-1} = 0$ もわかる。故に $T > t^* \geq t'$ である。

P4 について（2）

仮定から、

$$u'(c''_{t'}) > \delta^{t^*-t'+1}\left(\prod_{i=1}^{t^*-t'+1} R_{t'+i}\right) u'(c''_{t^*+1})$$

が成り立つ。また $z''_{t^*} = 0$ なので $0 < z''_{t^*-1} = x''_{t^*}$ がわかる。そこで、先ほどと同様に $\bar{\omega} = (\bar{c}_t, \bar{x}_t, \bar{z}_t)_{t=1}^T$ をうまく定義することによって、$\bar{\omega} \in C_2$ かつ $U(c''_1, ..., c''_T) < U(\bar{c}_1, ..., \bar{c}_T)$ とすることができ、矛盾が生じる。以上でサブステップ 2.2 の証明が完成した。

以降の証明の方針

特に、$s|h_1 \in C_1^*$ であったから、サブステップ 2.2 から $s|h_1 \in C_2^*$ である。これを利用して、$t = 1$ を含めても $s|h_1$ が P1-P4 を満たすことを示せば、証明が完成する。これが以降の証明の目標である。

P1について

まず、P1について。仮に $s^*|h_1$ が P1 を満たしていなかったとしよう。$s^*|h_1 \in C_1$ であるから、ある $\tau \geq 1$ について

$$u'(c_1^*) < \beta\delta^\tau \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{t+i}\right) u'(c_{1+\tau}^*)$$

が成り立つ。ところが $c_1^* > 0$ であるから、先のサブステップ 2.2 の証明の P1 の部分の $x''_{t'} > 0$ のときの部分と同様にして $s^*|h_1 \notin C_2^*$ が示せる（$x_0 = 0$ である可能性があるが、今回はそれで問題が発生しない）。これは矛盾であるから、$s^*|h_1$ は P1 を満たす。

P2について

次にP2について。同様に、$s^*|h_1$ がP2を満たしていなかったとすると、

$$u'(c_1^*) > \max_{\tau \in \{1,\ldots,T-1\}} \beta\delta^\tau \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{1+i} \right) u'(c_{1+\tau}^*)$$

であるのに、$c_1^* < y_1 + R_1 x_0$ であることがわかる。そこでこれもサブステップ2.2の証明のP4のときと同様にして $s^*|h_1 \notin C_2^*$ が示せ、矛盾が生ずる。よって $s^*|h_1$ はP2も満たす。

P3について（1）

P3について。これも同様に、$s^*|h_1$ が P3 を満たしてなかったとすると、ある $\tau \geq 1$ について

$$u'(c_2^*) < \delta^\tau \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{2+i} \right) u'(c_{2+\tau}^*)$$

であるにも関わらず、$x_1^* > 0$ である、ということになる。もし $c_2^* > y_2$ であるならば、前と同様にして $s^*|h_1 \notin C_2^*$ がわかる。よって $c_2^* = y_2$ でなければならない。一方、

$$x_2^* + z_2^* = R_1(x_1^* + z_1^*) > 0$$

である。

P3について（2）

そこである $t' \geq 3$ に対して $c^*_{t'} > y_{t'}$ でなければならない。t^* をそのような t' の最小値とすると、$t^* > 2$ であり、さらに仮定 2 から

$$u'(c^*_2) > \beta\delta^{t^*-2}\left(\prod_{i=1}^{t^*-2} R_{2+i}\right)u'(c^*_{t^*})$$

がわかる。ここで、$2 < t < t^*$ ならば $c^*_t = y_t$ であるが、また一方で $c^*_t = y_t + R_t x^*_{t-1}$ であるため、$x^*_{t-1} = 0$ でなければならない。さらに $c^*_{t^*} = y_t + R_t x^*_{t^*-1}$ なので $x^*_{t^*-1} > 0$ であるが、$2 \leq t < t^*$ ならば $x^*_t + z^*_t = R_t(x^*_{t-1} + z^*_{t-1})$ なので、これは $2 \leq t < t^* - 1$ に対して $z^*_t > 0$ を意味する。したがって $x^*_{t^*-1}$ と各期の z^*_t を少しずつ減らして、$c^*_{t^*}$ を少し減らし、対応して c^*_2 を少しだけ増やすと、利得は改善する。これは $s^*|h_1 \notin C^*_2$ を意味し、矛盾である。よって P3 が成り立つ。

P4について

最後にP4について。$s^*|h_1$ がP4を満たしてなかったとすると、

$$u'(c_2^*) > \max_{\tau \in \{1,\ldots,T-2\}} \delta^\tau \left(\prod_{i=1}^{\tau} R_{2+i} \right) u'(c_{2+\tau}^*)$$

であるにも関わらず、$z_1^* > 0$ であることになる。このときもP2等のときと同様、z_1^* を少し減らし、対応して x_1^* を少し増やすことで、利得を改善できる。これは $s^*|h_1 \notin C_2^*$ を意味し矛盾であるから、$s^*|h_1$ はP4を満たしている。

結論

以上で $s^*|h_1$ が P1-P4 を満たすことが確認できた。よって数学的帰納法の原理から、ステップ 2 はすべての T について正しいことになるが、ステップ 1 とステップ 2 は定理が正しいことを意味する。以上で証明が完成した。

残った問題（1）

この問題を無限期間の問題に変更したときに、P1-P4 を満たす問題の解があるかどうかは未解決である。Laibson はそのような問題にそのような解が存在することを前提として金融市場へのインプリケーションを分析しているのだが、無限期間にした場合に解が一意になるかどうかは非常にデリケートな問題であり、簡単には言えないと思われる。ただし、均衡経路の一意性を捨てれば、そのような解が「存在する」ことは言える可能性がある。これを確認できれば、当該分野にとって無視できない貢献になるであろう。

残った問題（2）

有限期間の場合に、RE の条件を、与えられた $X, Z \geq 0$ に対して $x_T = X,\ z_T = Z$ となることに変えて問題を解くことは、X, Z があまりにも大きすぎなければ可能であると思われる。これをうまく使うことで、サブステップ 1.1 の条件 $c_t \geq y_t$ を常に満たすサブゲーム完全均衡が存在したとすれば、それは P1-P4 を満たす、ということくらいは言えるのではないかと思われる。（サブステップ 1.1 だけは、仮定しないと出てこないのではないかと予想している）

残った問題（3）

また、一次同時の生産を入れて定常均衡を求める問題にするということも考えられる。一次同時な生産技術であれば、均衡では y_t と R_t は定数数列になるので、問題はかなり簡単になる。そこでは DP のテクニックが使えるようになるので、かなり問題は簡単になるのではないかと推測している。サブゲーム完全均衡の存在とその性質の解析程度なら、比較的簡単にできるのではないだろうか。

残った問題（4）

他にあり得る方向性としては、有限期間でも分析できるようにOLG モデルで議論することである。この選好を持つ場合の年金制度の問題などを扱うだけで簡単に魅力的な応用が見つけられる可能性がある。

Thank you for your attention.