1 − 1

1 ：まず、$\pi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$ を

$$\pi(x_1, ..., x_k) = (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0)$$

と定義する。この関数が滑らかであることは明らかである。また、π はその値域 $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ への写像として全単射であり、逆関数は

$$(x_1, ..., x_l) \mapsto (x_1, ..., x_k)$$

の制限であるから、これも滑らかである。

さて、f が $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ を定義域とする関数であるとき、f が滑らかであることと $f \circ \pi$ が滑らかであることが同値であることを示せ、というのが題意である。しかしこれは問題３の特殊ケースに過ぎない。

２：f が X を定義域とする滑らかな写像であるとする。$x \in Z$ とし、ここにおける f の局所的に滑らかな拡張を F と書く。するとこれは $f|_Z$ の拡張でもある。

３：合成が滑らかであることは、両方とも局所的に拡張してやれば明らかである。微分同相について。f, g がそれぞれ微分同相とすると、$g \circ f$ は全単射であり、滑らかである。その逆写像 $f^{-1} \circ g^{-1}$ もやはり滑らかである。以上。

４：(a) 考えている写像を f と名付ける。$f(x)$ は x の定数倍である。ここで、

$$\|v\| = a$$

となるベクトル v を任意に固定したとき、

$$g(t) = \|f(tv)\| = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

と置けば、これは $(0, 1)$ から $(0, +\infty)$ への全単射である。故に、f も全単射である。また、f が滑らかであることは単に明らかである。

$$y = f(x)$$

としよう。このとき、ある $b > 0$ に対して

$$x = by$$

であるが、

$$y = \frac{aby}{\sqrt{a^2 - b^2\|y\|^2}}$$

だから、

$$a^2b^2 = a^2 - b^2\|y\|^2$$

でなければならない。これは

$$b^2 = \frac{a^2}{a^2 + \|y\|^2}$$

を意味する。よってこの b を用いて、

$$f^{-1}(y) = by$$

となる。これは明らかに滑らかである。以上で、f が微分同相写像であることがわかった。

(b) 各点が $\mathbb{R}^k$ の開球に微分同相な近傍を持つことは明らかである。しかし開球は全空間と微分同相である。

５：A を V を定義域とする任意の線形作用素とする。W を V の直交補空間とし、$v + w \in V \oplus W = \mathbb{R}^N$ に対して $A(v + w) = A(v)$ と定義すれば、これは $\mathbb{R}^N$ 上で矛盾なく定義された線形作用素で、しかも有界である。よってそれは滑らかである。元々の A はこれの V 上への制限だったから、これも滑らかである。

次に、V の適当な基底 $(v_1, ..., v_n)$ を選び、$\varphi(e_i) = v_i$ として線形同型写像 φ を定義してやることができる。これは前段落の推論により滑らかで、逆写像も滑らかである。

１１：$U \subset \mathbb{R}^k$ が開集合であり、かつ S^k と微分同相であるとする。S^k はコンパクトであるから U もコンパクトであり、よって閉である。さらに U はコンパクトであるから有界である。これは $\mathbb{R}^k$ の連結性に矛盾。
（別証：S^k を単一の座標で覆えたとすれば、それがコンパクト多様体から $\mathbb{R}^k$ へのしずめ込みとなり、第四節の問題２ (b) に矛盾する。）

１２：１３の特殊ケース。

１３：

$$\pi(x_1, ..., x_k) = \frac{1}{1 - x_k}(x_1, ..., x_{k-1})$$

と定義する。逆写像は、

$$\pi^{-1}(x_1, ..., x_{k-1}) = \frac{1}{\|x\|^2 + 1}(2x_1, ..., 2x_{k-1}, \|x\|^2 - 1)$$

になる。これらが滑らかであることは形状から明らかである。互いに逆写像になっていることも容易に示せる。

１４：F、G が局所的な拡張であるとき、$F \times G$ が $f \times g$ の局所的な拡張となる。

１５：$X \subset \mathbb{R}^N$、$Y \subset \mathbb{R}^M$ とすると、この空間内の射影の制限を考えていることになる。しかし上の空間内の射影は線形なので、問題５からこの主張が導かれる。

１６：まず、$g : x \mapsto (x, x)$ は任意の定義域 X について常に滑らかであることを示そう。しかしこれは線形写像を X 上に制限しただけであり、従って滑らかであることは問題５からわかる。さらに、g は対角集合 Δ への写像として一対一であるから、逆写像が存在する。逆写像は射影 $(x, y) \mapsto x$ の制限であるため、これは問題１５から滑らかである。よってこの g が微分同相写像になる。

１７：問題１６で用いた g を取る。このとき F は $(I \times f) \circ g$ と書ける。ただし I は恒等変換である。よって F は滑らかである。次に、F は明らかに全単射であり、その逆写像は単なる射影である。よって問題１５によってそれは滑らかである。

１８：(a)x が 0 のところで何回でも微分可能であることさえ示せれば十分である。平均値の定理より、このためには $\lim_{x \downarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$ さえ示せればよい。そこでまず、$x > 0$ の領域で $f^{(n)}(x) = \dfrac{p(x)}{x^{3n}} f(x)$ と書けることを示そう。ただし、$p(x)$ は多項式である。

証明は数学的帰納法による。まず $n = 0$ のところでは命題は正しい。n まで正しかったと仮定する。このとき、

$$f^{(n)}(x) = \frac{p(x)}{x^{3n}} f(x)$$

である。さて、これを微分すると、

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{p'(x)x^3 - 2np(x)x^2 + 2p(x)}{x^{3n+3}} f(x)$$

である。よって題意は正しい。

ここで、$x < 1$ ならば $\log x > -\frac{1}{x}$ であるという事実を利用する。

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^{3n}}$$

の挙動が知りたい。対数を取って、

$$\log g(x) = -\frac{1}{x^2} - 3n \log x < -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - 3n\right)$$

であり、右辺は x が 0 へ行くに従って $-\infty$ に発散する。よって g は 0 に収束しなければならない。故に、$f^{(n)}$ も 0 に収束する。かくして f の n 階右側微分の値は 0 であることがわかった。左側微分がこれと一致することは明らかであり、従って題意が成り立つ。

(b) 明らか。

(c) 前出の h とノルム関数を適切に合成すれば容易に作れる。

１－２

１：最初に次の補題を証明する。A は $\mathbb{R}^N$ から $\mathbb{R}^M$ への線形写像であり、f は A の X 上への制限であるとしよう。このとき、df_x は A の $T_x(X)$ への制限である。

証明のために、$x \in X$ をひとつ固定する。$f(x) = y$ とし、x のまわりの助変数化 φ、y のまわりの助変数化 ψ を取る。$\varphi(u) = x$、$\psi(v) = y$ とする。ここで $h = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ と置くと、仮定から $h = \psi^{-1} \circ A \circ \varphi$ である。よって

$$dh_u = d\psi_y^{-1} \circ A \circ d\varphi_u$$

であるが、ここで

$$df_x = d\psi_v \circ dh_u \circ d\varphi_x^{-1}$$

であるから、上述の結果を得る。

包含写像 i は恒等変換の制限であるので、その導関数は補題によって恒等変換の制限である。

２：U の助変数化を X の助変数化の U への制限として取れば、明らか。

３：助変数化として $\mathbb{R}^k$ から V への線形同型写像 φ を取れば、その導関数は通常の導関数の定義と一致し、従って φ 自身となる。ここから直ちに結果を得る。

４：$f \circ f^{-1} = I_Y, h^{-1} \circ h = I_X$ であるから、問題１から

$$df_x \circ df_{f(x)}^{-1} = I_{T_{f(x)}(Y)}$$

$$df_{f(x)}^{-1} \circ df_x = I_{T_x(X)}$$

が成り立つ。前者からは df_x の全射性が、後者からは df_x の核が $\{0\}$ であることが導かれ、従って df_x は全単射である。

５：次元定理と問題４から明らかである。

６：$t \mapsto (\cos t, \sin t)$ を助変数化としてやれば、その導関数は $(-\sin t, \cos t)$ となり、従ってここから結論を得る。

９：(a) 積写像 $\varphi \times \psi$ によって $X \times Y$ の助変数化を作ってみれば、この定義域はユークリッド空間の開集合である。故に、通常のヤコビ行列によって導関数を計算してみれば、

$$d(\varphi \times \psi)_{(x,y)} = d\varphi_x \times d\psi_y$$

であることが容易に確かめられる。ここから直ちに主張の結果を得る。

(b) 射影は線形写像の $X \times Y$ 上への制限であるから、問題 1 で示した補題によって主張が成り立つ。

(c) まず、$g : (x, z) \mapsto (x, z + y)$ は $\mathbb{R}^M \supset Y$ 上の写像として明らかに滑らかであり、その導関数は恒等変換である。次に、$h : x \mapsto (x, 0)$ は線形写像の制限であるからやはり滑らかで、その導関数は問題 1 で示した補題によってやはり $v \mapsto (v, 0)$ に等しい。$f = g \circ h$ であるから、主張は正しい。

(d) ユークリッド空間の場合、および助変数化についてこの式が正しいことは (a) で確認した。一般の多様体については、助変数化で引き戻しておなじ議論を繰り返せばよい。

１０：(a) 問題 1 で示した補題により、明らか。

(b)φ が助変数化のとき、Δ の助変数化として (a) の f を用いて $f \circ \varphi$ が使える。ここから連鎖律によって主張を得る。

１１：(a)$g : x \mapsto (x, x)$ とする。このとき、F は $(I \times f) \circ g$ と書ける。よって問題 9 の (d) と問題１０ (a) から結論を得る。

(b) 問題１０の (b) とほとんど同様であるから、省略。

１２：$x \in X$ をひとつ固定し、助変数化 φ を取る。$\varphi(u) = x$ としよう。

最初に、曲線の速度ベクトルが接空間に入ることを示す。$c(t_0) = x$ となる曲線 c を任意に取れば、局所的に

$$c = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ c$$

が成り立つ。そこで連鎖律によって

$$dc_{t_0}(1) = d\varphi_u(d\varphi_x^{-1} \circ dc_{t_0}(1)) \in d\varphi_u(\mathbb{R}^k)$$

となる。

次に、任意の $v \in T_x(X)$ が速度ベクトルであることを示す。以下、v は固定して考え、$d\varphi_u(w) = v$ となる w を取る。ここで、

$$c(t) = \varphi(u + tw)$$

と置けば、連鎖律によって

$$dc_0(1) = d\varphi(w) = v$$

となる。以上で主張が示せた。

1－3

最初に、局所はめ込み定理の主張について補足しておこう。局所はめ込み定理の主張は、「$f:X\to Y$ が点 x ではめ込みであるならば、x のまわりの助変数化 $\varphi:U\to X$ と $f(x)$ のまわりの助変数化 $\psi:V\to Y$ が存在して、$h=\psi^{-1}\circ f\circ\varphi$ が標準的はめ込みになる」というものであった。しかしこれは、次のように強化できる：「$f:X\to Y$ が点 x ではめ込みであるならば、x のまわりの**任意の**助変数化 $\varphi:U\to X$ に対して、ある $f(x)$ のまわりの助変数化 $\psi:V\to Y$ が存在して、$h=\psi^{-1}\circ f\circ\varphi$ は $u=\varphi^{-1}(x)$ の近傍上で定義され、かつ標準的はめ込みと等しい。」

実際、本文中の証明を見直せば、いじっているのは本質的に ψ のほうだけであることに気づくであろう。同様に、4 節の局所しずめ込み定理も次のように強化できる：「$f:X\to Y$ が点 x でしずめ込みならば、$f(x)$ のまわりの**任意の**助変数化 $\psi:V\to Y$ に対して、ある x のまわりの助変数化 $\varphi:U\to X$ が存在して、$h=\psi^{-1}\circ f\circ\varphi$ は $u=\varphi^{-1}(x)$ の近傍上で定義され、かつ標準的しずめ込みと等しい。」この事実は後に何度も用いる。

1：平行移動が微分同相であることは明らかなので、主張は $b=0$ のときだけ考えればよい。しかしこれは次元定理から明白である。

2：包含写像がはめ込みになるので、これに局所はめ込み定理を適用してやって、そのときに得た助変数化 ψ の逆写像が条件を満たす。

3：$\mathbb{R}^1$ は連結だから、f の値域も連結であり、よって区間である。次に、$f'(0)>0$ であると仮定すれば、中間値の定理の対偶を取って、f' は常に正であることがわかる。よって f は狭義単調増加で、従って単射である。$f'(0)<0$ であるときも同様に単射性が示せる。あとは問題 5 の特殊ケースに過ぎない。

4：複素平面と同一視すれば、e^z が条件を満たす。

5：まず局所微分同相性から、$f(X)$ は X の開集合と微分同相な Y の開集合の合併であり、よって開集合であることがわかる。次に f は $X\to f(X)$ の写像として全単射であ

る。滑らかさは局所的性質なので明らかである。以上で証明が完成した。

６：(a) 第２節の問題９の (d) から明らかである。

(b) 連鎖律から明らかである。

(c)Z が X の部分多様体であるとき、f の Z への制限は要するに $f \circ i_Z$ に過ぎない。ただし i_Z は包含写像である。そこで第２節の問題１と連鎖律から結論を得る。

(d) 次元定理より、df_x の単射性は全射性を意味する。ここから逆関数定理によって結論を得る。

９：(a)$T_x(X)$ の基底 $v_1, ..., v_k$ を取ってきて、行列

$$V = (v_1, ..., v_k)$$

を考える。明らかに、$T_x(X)$ はこの行列による $\mathbb{R}^k$ の像である。さて、この行列の階数は k なので、行 $i_1, ..., i_k$ をうまく取れば、行列

$$V_k = \begin{pmatrix} v_{1,i_1} & \cdots & v_{k,i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,i_k} & \cdots & v_{k,i_k} \end{pmatrix}$$

が正則であるように取れる。このとき、

$$V_k \circ V^{-1}$$

は全単射である（V^{-1} は逆行列ではなく、$\mathbb{R}^k$ から $T_x(X)$ への写像としての V の逆写像である）。さらに、計算してみればこれは $v \in T_x(X)$ に対して、$(v_{i_1}, ..., v_{i_k})$ を返す関数であることもわかる。つまりこれは射影である。かくして、射影が全単射であるような座標の選び方があることがわかった。

　さて、これとおなじ射影を X 上で定義すると、これは x において導関数

$$V_k \circ V^{-1}$$

を持つ。（参照：第２節の問題１、補題）これが接空間からの全単射であることをすでに示した。よって逆関数定理によって射影は局所微分同相であり、これが局所座標系になる。

(b) 上の座標系の逆写像である序変数化を取ればよい。

１０：第８節の演習問題１４の特殊例に過ぎないが、いちおう示しておく。
　まず、$f_Z = f \circ i_Z$ の導関数は
$$df_x \circ di_{T_x(Z)}$$
であって、よって f_Z は常にはめ込みである。f_Z が単射であることもわかっているのだから、これはコンパクト多様体上の単射なはめ込みであり、よって埋め込みである。従って f_Z は微分同相写像である。
　さて、各点 $z \in Z$ の近傍で f がその上では微分同相になるようなものを求め、これを U_z と置く。このとき
$$U = \cup_{z \in Z} U_z$$
は Z の近傍であり、その上で f は常に局所微分同相である。
　次に、
$$U^n = \{x \in U | \inf_{z \in Z} \|x - z\| < \frac{1}{n}\}$$
と定義する。ここで、すべての n について U^n 上で $f(x_n) = f(y_n)$ かつ $x^n \neq y^n$ となるような x_n, y_n があったと仮定してみよう。x_n, y_n は
$$\{x \in \mathbb{R}^N | \inf_{z \in Z} \|x - z\| \leq 1\}$$
内の点列であり、Z はコンパクトであるからこの空間は有界である。よって x_n, y_n 共に収束するような部分列を持つ。一般性を失うことなく x_n, y_n は最初から収束すると仮定し、その収束先を x^*, y^* としよう。f の連続性から $f(x^*) = f(y^*)$ である。ここで、
$$\inf_{z \in Z} \|x^* - z\| = 0$$
であるため、Z のコンパクト性から $x^* \in Z$。同様の理由で $y^* \in Z$ である。f は Z 上で単射であるため、$x^* = y^*$ でなければならない。すると x_n, y_n は十分大きな n について U_{x^*} 内に所属していなければならないが、この内部で f は微分同相、従って単射であり、$f(x_n) = f(y_n)$ から $x_n = y_n$ を得る。これは最初の x_n, y_n の取り方に不合理である。よってこのようなことはありえず、ある U^n 上で f は単射になる。問題５により、この U^n 上で f は微分同相である。

１－４

１：標準的しずめ込みについては、これは明らかに成立する。そこで、$x \in U$ を任意に取れば、局所しずめ込み定理によって $U_x \subset U$ という近傍があって $f(U_x)$ は開集合になる。さらに

$$U = \cup_{x \in U} U_x$$

なので、主張は正しい。

２：(a) 問題 1 から、$f(X)$ は開。一方、X はコンパクトであるから、$f(X)$ は閉。よって連結性から主張を得る。

(b) 存在したとすれば $\mathbb{R}^l$ がコンパクトであることになり、矛盾する。

３：この曲線を微分すれば $(1, 2t, 3t^2)$ であり、したがってこれははめ込みである。また、第一座標が恒等変換であるから単射である。その逆像は第一座標の射影であるから、有界なものの逆像は有界になり、よって固有である。以上でこの曲線が埋め込みであることがわかった。

次に、$g_1(x) = x_1^2 - x_2$、$g_2(x) = x_1^3 - x_3$ と置けば、このふたつの関数の零点の逆像がいまの曲線である。これらの関数が大域的に独立であることはすぐわかる。

４：$z \in Z$ の Z における近傍 U の助変数化を φ とし、X における近傍 V の助変数化を ψ とする。$Z \subset X$ なので、包含写像 i_Z ははめ込みである。よって局所はめ込み定理から、ψ を適当に修正し、φ の定義域 U を V 内に縮めてやることによって、$h = \psi^{-1} \circ i_Z \circ \varphi = \psi^{-1} \circ \varphi$ は標準的はめ込みである。

さて、$z \in Y$ であるから、Y における近傍 W の助変数化 χ が存在する。そこでふたたび包含写像 i_X に局所はめ込み定理を適用すれば、χ を適当に修正し、ψ の定義域 V を制限してやることで、$\chi^{-1} \circ \psi$ が標準的はめ込みになる。さらに φ の定義域も修正した V に合わせて縮めてやれば、

$$\chi^{-1} \circ \varphi = \chi^{-1} \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi$$

が標準的はめ込みになることは明らかである。そこで χ^{-1} の後ろの l 座標を取ってきて g と置けば、この g と W の組が題意を満足する。

５：問題６の特殊ケース。

６：オイラー方程式から、偏微分が常に 0 であるならば p の値は 0 になる。よって対偶を取れば、$a \neq 0$ ならば a は p の正則値であることがわかる。微分同相については、a と b に対して $x \mapsto (b/a)^{\frac{1}{m}}$ を取ればよい。

７：$f^{-1}(y)$ は 0 次元の多様体であり、従って離散集合である。X はコンパクトなので、閉集合である $f^{-1}(y)$ もコンパクトであり、コンパクトである離散集合は有限集合でしかあり得ない。

そこで、$f^{-1}(y) = \{x_1, ..., x_N\}$ とする。逆関数定理から、各 x_i に対して W_i という近傍があって、この近傍上で f は微分同相写像であることがわかる。あらかじめ W_i を十分小さく取り、これらが互いに素であるようにしておく。さらに、

$$U = \cap_{i=1}^{N} f(W_i)$$

と置いて、W_i を $f^{-1}(U) \cap W_i$ と置き換える。すると W_i は互いに素で、x_i の近傍であり、その像は U に等しい。

ここで、$U^n = \{z \in U | \|z - y\| < \frac{1}{n}\}$ と置く。このとき、ある n に対して $f^{-1}(U^n) \subset W = W_1 \cup ... \cup W_N$ であることがわかる。証明は背理法による。すべての n に対して、$f(x^n) \in U^n$ となる $x^n \in X \setminus W$ が存在したと仮定する。$X \setminus W$ はコンパクトなので、x^n は収束部分列を持つ。そこで最初から部分列を取っておくことで、x^n は $x^* \in X \setminus W$ に収束すると仮定してよい。このとき $f(x^*)$ は f の連続性から y に等しい。よって x^* は $x_1, ..., x_N$ のどれかであるが、これらはすべて W の中にあるので、矛盾である。よって仮定は否定され、主張が成り立つ。

そこで、このような U^n を持ってくると、$V_i = f^{-1}(U_n) \cap W_i$ が主張を満たすことがわかる。

９：ノルムが $\sqrt{n}$ で押さえられるので、正しい。

１０：本文中の計算から、$f = AA^t$ に対して、

$$df_I(B) = B + B^t$$

であることがわかっている。よってその核は $B + B^t = 0$ となる行列の全体に等しい。

１－５
１：明白である。

２：(a) 横断的。(b) 横断的。(c) 横断的でない。(d)$k+l \geq n$ ならば横断的。(d)$k=n$ あるいは $l=n$ でないなら横断的でない。(f) 横断的。(g) 横断的。

３：まず、

$$\mathbb{R}^n = V_1 + (V_2 \cap V_3) \subset V_1 + V_2$$

であることに注意すれば、V_1 と V_2 が横断的であることはただちにわかる。後は本文中の定理にしたがって余次元を計算していけばよい。

４：第 2 節の問題 1 を用いれば、これは問題 5 の特殊ケースに過ぎない。

５：$x \in W$ を任意に取る。第四節の逆像定理の部分的な逆 2 によって、$f(x)$ の近傍 V で定義されたしずめ込み $g : Y \to \mathbb{R}^l$ が存在して、$g^{-1}(0) = Z \cap V$ である。そこで $f^{-1}(V) = U$ とおけば、$W \cap U = f^{-1}(Z \cap V) = (g \circ f)^{-1}(0)$ となる。さらに 0 は $g \circ f$ の正則値となるというのが横断性の意味であった。そこで第 4 節最後の命題から、

$$T_x(W) = \mathrm{Ker}(d(g \circ f)_x)$$

がわかる。ところが、同命題から $\mathrm{Ker}(dg_{f(x)}) = T_{f(x)}(Z)$ がわかっている。そこで、

$$df_x^{-1}(T_{f(x)}(Z)) \subset \mathrm{Ker}(d(g \circ f)_x) = T_x(W)$$

がわかる。

逆に、i_W は W から X へのしずめ込みとし、$h = f \circ i_W$ とする。h は W から Z への写像であるので、dh_x は $T_x(W)$ から $T_{f(x)}(Z)$ への写像である。しかし、

$$dh_x = df_x \circ d(i_W)_x$$

であって、i_W の微分は包含写像である（第 2 節の問題１）ので、これは $df_x(T_x(W)) \subset T_{f(x)}(Z)$ を意味する。以上で結論が成り立つことがわかった。

７：最初に、f が $g^{-1}(W)$ と横断的であると仮定する。$x \in (g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ と $w \in T_{(g\circ f)(x)}(Z)$ を取り、これを固定する。g が横断的であると仮定しているから、$w_1 \in T_{f(x)}(Y)$ と $w_2 \in T_{(g\circ f)(x)}(W)$ が存在して、$w = dg_{f(x)}(w_1) + w_2$ となっている。横断性の仮定から、先ほど取った w_1 に対して $v_1 \in T_x(X)$ と $v_2 \in T_{f(x)}(g^{-1}(W))$ が存在して、$w_1 = df_x(v_1) + v_2$ であるはずである。さらに問題５から、

$$T_{f(x)}(g^{-1}(W)) = dg^{-1}_{f(x)}(T_{(g\circ f)(x)}(W))$$

であることはわかっているので、$dg_{f(x)}(v_2) \in T_{(g\circ f)(x)}(W)$ である。そこで、$w = d(g \circ f)_x(v_1) + [dg_{f(x)}(v_2) + w_2]$ である。w と x は任意であったから、$g \circ f$ が W と横断的であることが分かった。

逆に、$g \circ f$ が W と横断的であるとする。$x \in (g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ と $v \in T_{f(x)}(Y)$ を取り、固定する。$w = dg_{f(x)}(v) \in T_{(g\circ f)(x)}(Z)$ に対して、$g \circ f$ の横断性から $w_1 \in T_x(X)$ と $w_2 \in T_{(g\circ f)(x)}(W)$ をうまく取って $w = d(g \circ f)_x(w_1) + w_2$ とできる。ここで $v_1 = v - df_x(w_1)$ と置くと、$dg_{f(x)}(v_1) = w_2$ である。ふたたび問題５から

$$T_{f(x)}(g^{-1}(W)) = dg^{-1}_{f(x)}(T_{(g\circ f)(x)}(W))$$

であるので、$v_1 \in T_{f(x)}(g^{-1}(W))$ であり、$v = df_x(w_1) + v_1$ である。よって f は $g^{-1}(W)$ と横断的である。

９：W と Δ は V と次元が等しいため、横断性の条件はこれらの共通部分が $\{0\}$ であることと同値である。これは $v = Av$ を満たす v が $\{0\}$ のみであるということであるから、ここから主張の結果を得る。

１０：問題９と同様の推論により、このとき f のグラフと Δ は横断的であることがわかる。よってその共通部分は０次元の多様体であって、つまり離散集合である。Δ と f のグラフはともに閉なので、共通部分も閉である。ここから不動点の集合が閉集合であることがわかる。しかし $X \times X$ はコンパクトであることがわかっているので、それらはコンパクトであり、よって有限集合である。

１－６

１：第１節、問題１８から、$\rho([0,\frac{1}{4}])=\{0\}$ かつ $\rho([\frac{3}{4},1])=\{1\}$ を満たす滑らかな関数 ρ が存在する。さて、F はホモトピーとすれば、

$$\tilde{F}(x,t)=F(x,\rho(t))$$

が条件を満たす。

２：反射、対称は明らかなので、推移律だけ示す。F は f と g のホモトピー、G は g と h のホモトピーとする。問題１で取った関数 ρ を用いて、

$$H(x,t)=\left\{\begin{array}{rl} F(x,\rho(2t)) & \text{if } t\leq\frac{1}{2} \\ G(x,\rho(2t-1)) & \text{if } t\geq\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

とすれば、これが f と h の間のホモトピーになる。

３：まず、弧状連結が同値関係であることを示す。反射、対称については自明である。$f(0)=x,f(1)=g(0)=y,g(1)=z$ としよう。問題１で用いた ρ によって、

$$h(t)=\left\{\begin{array}{rl} f(\rho(2t)) & \text{if } t\leq\frac{1}{2} \\ g(\rho(2t-1)) & \text{if } t\geq\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

と置けば、これが x と z を結ぶ弧になる。よって推移律が示せた。

次に、$x\in X$ と助変数化 φ を適当に取る。$\varphi(u)=x$ とし、φ の定義域 U に含まれる u を中心とした十分小さな半径の開球を B と置く。このとき、もし $y\in\varphi(B)$ ならば、

$$f(t)=\varphi(t\varphi^{-1}(y)+(1-t)u)$$

が x と y をつなぐ弧になる。よって弧状連結な点という同値関係の同値類は $\varphi(B)$ を含む。x は任意であったから、これは各同値類が開集合であることを示す。X が連結であるなら、これら同値類はひとつしか存在しえない。

４：恒等写像と定値写像の間のホモトピーを F と書く。さて、$g:Y\to X$ が任意に与えられたとき、

$$G(y,t)=F(g(y),t)$$

がホモトピーになる。よって Y から X へのすべての写像は定値写像とホモトープである。ホモトピーは同値関係であるから、これはそれらの写像がすべてホモトープであることを意味する。

逆に、任意の多様体 Y から X へのすべての写像が定値写像とホモトープであるならば、特に $Y=X$ と置いて、恒等写像と定値写像がホモトープであるという結論を得る。

5：$F(t,x)=tx$ がホモトピーになる。

6：X が可縮であるとすれば、X から X へのすべての写像はホモトープである。そこで任意の $x_0,x_1\in X$ に対して、$f_0(x)=x_0, f_1(x)=x_1$ というふたつの定値写像はホモトープであるということがわかる。そのホモトピーを F とし、適当に取った $x\in X$ に対して $g(t)=F(x,t)$ と定義すれば、これは x_0 と x_1 をつなぐ弧になる。つまり X は弧状連結であるということがわかる。

一般に、弧状連結な集合は連結である。これは背理法によって示せる。ある集合 Z が弧状連結であるが連結ではないと仮定してみよう。このとき $U\cup V=Z, U\cap V=\emptyset$ となるふたつの開集合 U,V が取れる。$x\in U$ と $y\in V$ を勝手に取って、$g(0)=x$ かつ $g(1)=y$ となる弧 g が取れる。すると、

$$[0,1]=g^{-1}(Z)=g^{-1}(U)\cup g^{-1}(V), g^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)=\emptyset$$

であるから、$[0,1]$ が連結でないという結論を得る。しかし、$[0,1]$ が連結であることは簡単に示せるので、矛盾である[*1]。

そこで特に X は連結である。また、X は可縮であるのだから、S^1 から X へのすべての写像はホモトープである。よって X は単連結である。

第 7 節の問題 6 によれば、$k>1$ ならば S^k は単連結である。しかし、この空間上の恒等変換は写像度が 1 であり、定値写像は写像度 0 であるから、ホモトープでない。つまり、この空間は可縮ではない。

7：k が奇数であるから、S^k は $2n=k+1$ 次元のユークリッド空間に含まれる。そこで逐次的に、次のような写像の族を構成する。まず $f_0(x)=-x$ とし、

$$f_i(x)=(x_1,...,x_{2i},-x_{2i+1},...,-x_{2n})$$

[*1] 実際、連結でないとし、A,B が分離する開集合だとする。一般性を失うことなく $0\in A$ と仮定し、$\inf B=a$ と置けば、A は開であるから $a>0$ であり、B は非空かつ開であるから $a<1$ である。しかしもし $a\in A$ なら A は開であるから a は B の下限ではなく、$a\in B$ なら B は開であるからやはり a は B の下限ではない。これは矛盾である。

とする。f_{i-1} と f_i がすべてホモトープであることが示せれば、問題２から f_0 と $f_n = I$ はホモトープであり、問題は示せたことになる。しかしこのホモトピーは

$$(x_1, ..., x_{2i-2}, \cos \pi t x_{2i-1} - \sin \pi t x_{2i}, \sin \pi t x_{2i-1} + \cos \pi t x_{2i}, -x_{2i+1}, ..., x_{2n})$$

として具体的に作れる。
（別証 : 第３章、第６節にある Hopf の写像度定理を用いる。恒等写像の写像度は明らかに１であるから、対心写像の写像度が１であることさえ示せればよい。北極は明らかに正則値であり、その逆像は南極のみになる。それらの接空間は一致し、さらに第２節の問題１で示した補題を用いることで、対心写像の導関数は $-I$ であることがわかる。k が奇数であれば、これは向きを反対にする。しかし、北極と南極では外向きのベクトルも逆回転しており、よってこの導関数は向きを保つ。従って結論が成り立つ。）

８：これは問題１１の特殊ケースであるが、簡単に示しておく。

まず、f_0 は微分同相写像であるから埋め込みであり、よって十分小さな t に対して f_t は埋め込みである。X と Y は次元が同一であるので、f_t が埋め込みであればしずめ込みでもある。

Y が連結であれば、第４節の問題２ (a) によって f_t は全射であり、従って f_t は微分同相写像である。

次に、Y が連結でない場合について。最初に、任意の多様体 X と $x \in X$ について、x を含む連結成分は開集合であることを示す。x のまわりの助変数化 φ を取ってきて $\varphi(u) = x$ とし、u を中心として φ の定義域に含まれる開球 B の φ による像を考えれば、これは連結集合の像であるから連結であり、x をその内部に含む。よって連結成分は開集合であることがわかった。特に X がコンパクトであればそれらは互いに素な開被覆を為し、よって有限個の分割を与える。それらを $X_1, ..., X_N$ としよう。このとき、

$$f_0(X_i) = Y_i$$

と置けば、それが Y の連結成分であることは明らかである。

さて、F をホモトピーとし、$G^i = F|_{X_i \times I}$ を考えよう。$X_i \times I$ は連結であるから、その像も連結であり、従って Y_i に含まれる。よって G^i は X_i から Y_i へのホモトピーである。連結な場合についての結果を適用することで、t が十分に小さいとき、g_t^i はすべての i について微分同相写像であることがわかる。するとこの t について f_t が微分同相写像であることは明らかである。以上で証明が完成した。

１０：包含写像は埋め込みであるから、安定性定理から容易に結論を得る。反例は省略。

１１：安定性定理の証明をなぞってみよう。まず (b) から始める。最初に、$x \in X$ をひとつ固定したとき、$(x,0)$ を含む開集合 $U_x \subset X \times S$ をうまく選べば $(z,s) \in U_x$ のときに $d(f_s)_z$ が単射であることを示す。

$\varphi : U \to X$ を x のまわりの助変数化とし、$\varphi(u) = x$ とする。また、$f_0(x) = y$ とし、そのまわりの助変数化を $\psi : V \to Y$ とおく。$\psi(V)$ は開集合なので、その F による逆像も開集合である。そこであらかじめ S の開集合 T を取っておき、$\varphi(U) \times T$ がその逆像内に入るように U を小さくしておくことにする。すると、$s \in T$ を固定したときに、十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $\|s\| < \varepsilon$ ならば

$$h_s = \psi^{-1} \circ f_s \circ \varphi$$

の導関数が常に単射になることを示せさえすれば、$U_x = \varphi(U) \times (T \cap B_\varepsilon(0))$ として主張は成り立つことになる。しかしこれはヤコビアンの各座標が連続であることから明らかである。

そこで、

$$U^* = \cup_{x \in X} U_x$$

は $X \times \{0\}$ の近傍である。$X \times \{0\}$ はコンパクトであるから、U^* は十分小さな ε に対して $X \times \{0\}$ から距離 $\varepsilon > 0$ の点を含む。（なぜなら、U^* の $X \times S$ における補集合 C に対して、関数 $(x,0) \mapsto \inf_{(z,s) \in C} \|(x,0) - (z,s)\|$ は連続であり、よってコンパクト集合 $X \times \{0\}$ 上で最小値 $\varepsilon > 0$ を持つ。）よって、$\|s\| < \varepsilon$ ならば、f_s ははめ込みであることがわかった。

(a) は (b) の特殊ケースであり、(c) は (b) の文言の「単射」を「全射」に換えるだけである。

(d) について。まず、この主張は本文中に誤植があり、Z が閉多様体でなければ示せないことに注意。よって Z は閉多様体として議論を進める。Z が閉多様体であるから、$F^{-1}(Z)$ は閉集合である。そこで $x \in X$ が $f_0^{-1}(Z)$ に入っていなければ、$F^{-1}(Z)$ と互いに素である $(x,0)$ の近傍 U_x が取れる。次に $f_0(x) \in Z$ となるとき、$f_0(x)$ の近くで Z が 0 の逆像になるような関数 g を取ってきたとき、0 が $g \circ f$ の正則値であるというのが横断性の条件であった。そこで、g の定義域の F による逆像に制限して (c) についての議論を繰り返せば、$(x,0)$ の近傍 U_x で、$(z,s) \in U_x$ ならば常に f_s は z の点で横断性の条件が満たされているように U_x を取れる。これらの和集合を U^* として、(b) のときと同

様に議論すれば、$\|s\| < \varepsilon$ のときに f_s が横断的になるような $\varepsilon > 0$ が取れる。

(e) について。X がコンパクトであるから、主張は単に、f_0 が単射なはめ込みであるときに $\|s\| < \varepsilon$ ならば f_s も単射であることが示せればよいだけである。証明は背理法による。どんな n に対しても、

$$\|s_n\| < \frac{1}{n}$$

かつ

$$f_{s_n}(x_n) = f_{s_n}(y_n), x_n \neq y_n$$

となるような s_n, x_n, y_n を取ってくることができると仮定する。X のコンパクト性から x_n と y_n はともに x^*、y^* に収束するとしてよい。このとき、$F(x,s) = f_s(x)$ が連続であるから、$f_0(x^*) = f_0(y^*)$ であり、よって $x^* = y^*$ である。

さて、(b) を証明するときに用いた集合 $U_{x^*} \subset X \times S$ を思い出そう。この近傍の作り方から、x^* のまわりの助変数化 $\varphi : U \to X$ と $f_0(x^*)$ のまわりの助変数化 $\psi : V \to Y$ が存在して、$U_{x^*} \subset F^{-1}(\psi(V))$ かつ開集合 $T \subset S$ について $U_{x^*} \subset \varphi(U) \times T$ となる。よって $\varphi(u^*) = x^*$ としたとき、$U \times T$ 内の $(u^*, 0)$ の近傍で、

$$G(u,s) = \psi^{-1}(F(\varphi(u), s))$$

は矛盾なく定義された滑らかな関数である。従ってそれは $(u^*, 0)$ のまわりの無限回微分可能な拡張 $H(u,s)$ を持つ。そこで、

$$K(u,s) = (H(u,s), s)$$

と定義する。U^* の元々の定義から、この関数の $(u^*, 0)$ におけるヤコビ行列は明らかに単射である。そこで局所はめ込み定理からこの関数は $(u^*, 0)$ のある近傍上で単射であるが、十分に n が大きいとき、

$$\begin{aligned} K(\varphi^{-1}(x_n), s_n) &= (\psi^{-1}(f_{s_n}(x_n)), s_n) \\ &= (\psi^{-1}(f_{s_n}(y_n)), s_n) \\ &= K(\varphi^{-1}(y_n), s_n) \end{aligned}$$

となって矛盾が起こる。

(f) については問題 8 の繰り返しであるのだが、I の連結性に依存した推論があるため、修正しなければならない。まず、$X_1, ..., X_N$ を X の連結成分としよう。対応して、$Y_i = f_0(X_i)$ は Y の連結成分である。

一般に、多様体の連結成分は開集合である。(任意の点についてその座標近傍はユークリッド空間の開集合と同相に取れ、従って十分小さな半径の球体の助変数化による像を含

むが、これは連結集合の連続写像による像なので連結であり、よってその点を含む連結成分に含まれる。）よって X_i や Y_i はすべて開集合である。さらに補集合が開集合であるから X_i や Y_i は閉、従ってコンパクトでもある。G^i を問題 8 と同様に F の $X_i \times S$ への制限として取ると、$(G^i)^{-1}(Y_i)$ は開集合でなければならず、しかも $X_i \times \{0\}$ を含む。X_i はコンパクトなので、それは $X_i \times \{s \in S | \|s\| < \varepsilon\}$ という形の集合を含む。故に十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して、$\|s\| < \varepsilon$ ならば $f_s(X_i) \subset Y_i$ でなければならない。後は問題 8 とまったく同様である。

１－７

１：このとき、包含写像の正則値は単に像に含まれない値に等しい。よって主張が成り立つ。

２：これは単なる Fubini の定理の直接の帰結である。

３：包含写像に局所はめ込み定理を適用してやればよい。

４：有理数は可算集合であるから、単に一点 $\{a\}$ が測度 0 を持つことを示せばよい。しかしこれは自明である。

６：$f : S^1 \to S^k$ は、Sard の定理によって、$k > 1$ のときに全射ではない。$p \notin f(S^1)$ とし、p を無限遠点とする立体射影を $\varphi : \mathbb{R}^k \to S^k$ と置く。このとき、

$$F(x,t) = \varphi(t\varphi^{-1}(f(x)))$$

と置くとこれがホモトピーになっている。

１６：f が Morse 関数であれば二項目が 0 のときはいつでも初項が 0 でない。逆も明らかである。

１７：問題１６で用いた関数とおなじものを f_t について作り、これを $h_t(x)$ と書く。$h_0(x)$ は K のある近傍 U 上で 0 にならない。そこで、この U に閉包がすっぽり含まれる K の有界な近傍を V と書き、その閉包を W と置く。ここで Berge の最大値定理を用いると、関数

$$g(t) = \min_{x \in W} h_t(x)$$

は t について連続であり、かつ、$g(0) > 0$。よって t が十分小さければ必ず h_t は W 上、従って V 上で 0 にならない。よって問題１６によって結論を得る。

１８：まず、$x \in X$ をひとつ固定する。このとき、$(x,0)$ の近傍 U_x で、その内部では

$f_t(z)$ が非退化臨界点にならないようなものがあることを示す。x のまわりの助変数化 $\varphi : U \to X$ を取ってきて、$\varphi(u) = x$ であるとする。このとき

$$h_t = f_t \circ \varphi$$

はきちんと定義されている写像のホモトープな族である。h_0 は U 内に非退化臨界点を持っていないので、$\{u\}$ に問題１７の結果を適用してやれば、U に含まれて $\{u\}$ を含む開集合 V と $\varepsilon > 0$ が存在して、$t < \varepsilon$ ならば V 上で h_t は非退化臨界点を持たない。そこで $U_x = \varphi(V) \times [0, \varepsilon)$ とすればよい。

この U_x は $X \times \{0\}$ を被覆するため、後は安定性定理の (b) などで用いた論法を適用して、$t \in [0, \varepsilon)$ ならば f_t が非退化臨界点を持たないことがわかる。

２０：(a)a に収束する点列 (a_n) について f_{a_n} はすべて退化臨界点 x_n を持つと仮定する。X はコンパクトなので、一般性を失うことなく x_n は x^* に収束するとしてよい。このとき、x^* が f_a の退化臨界点であることが示せれば、f_a が Morse 関数でないような a の集合は閉となり、従って命題は正しい。それを証明の目標としよう。

x^* のまわりの助変数化を φ とし、$\varphi(u) = x^*$ としよう。x_n は x^* に収束しているから、$\varphi(u_n) = x_n$ となる点列 (u_n) があるとしてよい。このとき、$g_n = f_{a_n} \circ \varphi$ と定義する。また、$g = f_a \circ \varphi$ とする。

明らかに、$0 = d(g_n)_{u_n}$ は dg_u に収束している。よって u が臨界点であることはわかる。また、g_n の u_n における Hesse 行列が g の u におけるそれに収束することも明らかであり、よって行列式の連続性によって、u は退化臨界点である。φ によって引き戻せば、x^* が f の退化臨界点であることがわかる。以上で証明が完成した。

(b)(a) で得た結果は X が多様体のコンパクト部分集合である場合にも明らかに同様に成り立つので、後は X が可算コンパクトであればよいことがわかる。$\mathbb{R}^N$ が第二可算公理を満たすことから X は可算個の座標近傍で覆え、各座標近傍は $\mathbb{R}^k$ の開集合と微分同相であるから、$\mathbb{R}^k$ の開集合 U が可算コンパクトであることを示せばよい。しかしこれは、有理点を中心とした半径有理数の U に含まれる閉球体をすべて持ってくれば十分である。

(c) 上の議論は当該集合が Borel-可測であることを意味する。従って Fubini の定理は使える。

１－８

１：$\mathbb{R}^k$ の接空間は常に $\mathbb{R}^k$ である。ここから直ちに結論を得る。

２：座標ごとに考える。まず、$(x,v)\mapsto x$ が滑らかであることは、これが線形写像の制限であることから明らかである。次に、$(x,v)\mapsto g(x)v$ は、$h(a,v)=av$ という明らかに滑らかである写像を用いて

$$h\circ(g\times I)$$

と書ける。よって第１節の問題１４からこれは滑らかである。

３：単なる座標の取り替え関数の制限が微分同相写像を与える。

４：$(x,y,-ay,ax)$ が $T(S^1)$ の典型的な元なので、これに (x,y,a) を対応させればこれが微分同相写像となる。

５：微分が同じ射影になる。

６：たとえば後者の定義を満たす関数に対し、$q:(x,v)\mapsto v$ を合成してやれば前者の定義を満たす関数が出てくる。逆も同様である。

７：x に対して、奇数座標とその次の偶数座標を取り替え、偶数座標を -1 倍する関数を考える。これが滑らかであることは明らかである。この値が接ベクトルであることを示すためには、値が x と直交していることさえ示せれば事足りる。しかしこれは明らかである。（別証：第６節、問題７で示した通り、k が奇数次元であるときには S^k において恒等写像は対心写像にホモトープである。よって Euler 標数は０であり、ここから第３章、第６節の定理によって結論を得る。）

８：次の写像

$$F(x,t)=\frac{x\cos\pi t+v(x)\sin\pi t}{\|x\cos\pi t+v(x)\sin\pi t\|}$$

がホモトピーになる。

（別証：第３章、第４節の問題７から、k が偶数であるとき S^k の Euler 標数は０でない。よって第６節の定理から、S^k が不動点を持たないベクトル場を持つのは k が奇数であるときに限ることがわかる。後は第６節、問題７の通りである。）

９：写像 $(x,v)\mapsto \|v\|$ について、１は明らかに正則値である。よって結論が成り立つ。

１０：本文中、X から $\mathbb{R}^{2k+1}$ への単射なはめ込みを見つけようとしたときに、単射性さえ犠牲にすれば $2k$ についてもおなじ推論が成り立つような推論をした。あとは繰り返すだけである。

１３：(U_α) に従属する１の分割 (θ_i) を取り、$V_i=\theta_i^{-1}((0,+\infty))$ と置く。(V_i) は明らかに開被覆で、(U_α) の細分であり、局所有限である。

１４：まず、任意の $z\in Z$ に対して、近傍 U_z をうまくとれば、$U_z\cap f^{-1}(f(Z))=U_z\cap Z$ となるようにできることを示す。背理法の仮定として、もしそれがうまくいかないとすれば、z へ収束する点列 $x_n\in X\setminus Z$ で、$f(x_n)\in Z$ を常に満たすものが取れる。f の連続性から $f(x_n)$ は $f(z)$ に収束するが、f は Z に制限すると微分同相なので、$f(z_n)=f(x_n)$ かつ $z_n\to z$ となる Z の点列が存在しなければならない。すると $x_n\neq z_n$ かつ $f(x_n)=f(z_n)$ が成り立たなければならない。ところが逆関数定理によって f は z の近くで単射なので、これは不合理である。

そこで、

$$U=\cup_{z\in Z}U_z$$

と置くと、これは Z の近傍であり、f を U 内に制限すれば $f^{-1}(f(Z))=Z$ が成り立つ。以下、一般性を失うことなく $X=U$ として議論を進める。

さて、逆関数定理より、各 $z\in Z$ は f が微分同相になるような近傍を持つ。それを V_z としよう。V_z は十分小さな近傍であればなんでもよいので、z のまわりの助変数化 φ を選び、$\varphi(u)=z$ としたときに、u を中心とする十分小さな閉球の像にすっぽり含まれると仮定してよい。よって V_z はすべて、X のコンパクト部分集合の部分集合であり、同時に X の開集合でもある。

$f(V_z) = W_z$ と書く。ここで (W_z) は $f(Z)$ の開被覆なので、問題１３によって (W_z) の局所有限な細分を求め、それを (W^i) と書くことにする。このとき各 W^i はどれかひとつの W_z に含まれるので、$f^{-1}(W^i) \cap V_z = V^i$ と置けば、f は V^i から W^i への微分同相写像である。その逆写像を g_i と書くことにする。

$$V = \cup_i V^i$$

とし、また

$$W = \{y \in \cup_i W^i | y \in W^i \cap W^j \Rightarrow g_i(y) = g_j(y)\}$$

とする。W 上で $g(y) = g_i(y)$ と定義するとこれは矛盾なく定義された W から V への滑らかな写像であり、$f(g(y)) = y$ で、また $x \in V \cap f^{-1}(W)$ なら $g(f(x)) = x$ でもある。

次に、W が $f(Z)$ の開近傍を含むことを示す。

まず、$y \in f(Z)$ とする。このとき、$y \in W^i$ となる i が存在する。$f(g_i(y)) = y \in f(Z)$ なので、$g_i(y) \in f^{-1}(f(Z)) = Z$ であることがわかる。もし $y \in W^j$ ならおなじ議論によって $g_j(y) \in Z$ であるが、$f(g_j(y)) = y = f(g_i(y))$ であり、f は Z 上で単射であるから、$g_j(y) = g_i(y)$ でなければならない。以上で $y \in W$ が示せた。つまり $f(Z) \subset W$ である。

次に、W が任意の $y \in f(Z)$ の近傍を含むことを示す。証明は背理法による。y に収束する $(\cup_i W^i) \setminus W$ の点列 (y_n) が存在するとしよう。(W^i) は局所有限であるから、y の近傍 W^* で $W^{i_1}, ..., W^{i_N}$ のみと交わるものが存在する。y_n は y に収束しているので、最初から W^* の点列であるとしても一般性を失わない。$y_n \notin W$ であるから、ある j, k について $g_{i_j}(y_n) \neq g_{i_k}(y_n)$ であるが、j, k の組み合わせは有限通りしかないので、少なくともどれかひとつの j, k に対して無限に多くの y_n が $g_{i_j}(y_n) \neq g_{i_k}(y_n)$ を満たすことがわかる。そこで部分列を取ることによって、$g_{i_j}(y_n) \neq g_{i_k}(y_n)$ をすべての n が満たすと考えても一般性を失わない。さらに、$g_{i_j}(y_n)$ は V^{i_j} 内の点列であり、V^{i_j} は X 内のコンパクト集合の部分集合であったのだから、$g_{i_j}(y_n)$ は X 内の点 x_j への収束部分列を持つ。同様に $g_{i_k}(y_n)$ も x_k への収束部分列を持つ。そこで一般性を失うことなくこれらは最初から収束していると仮定しよう。このとき、$f(g_{i_j}(y_n)) = y_n = f(g_{i_k}(y_n))$ であるから、f の連続性によって $f(x_j) = y = f(x_k)$ が成立しなければならない。$f(x_j) = f(x_k) \in f(Z)$ であるから $x_j, x_k \in Z$ であり、よって $x_j = x_k$ が成り立つ。そこで最初に逆関数定理を適用したときの近傍 V_{x_j} を取れば、この内部で f は単射である。これは十分大きな n に対して $g_{i_j}(y_n) = g_{i_k}(y_n)$ であることを意味するが、それは矛盾である。よってこのようなことはあり得ない。

そこで、これらの近傍を $y \in f(Z)$ について合併すれば、それが $f(Z)$ を含み W に含まれる開集合であることがわかる。その逆像と V の和集合は開集合であり、Z を含み、その内部に制限すれば f は全単射で、f および逆写像 g は滑らかである。以上で証明が完成した。

１５：$\{X \setminus A(=C), X \setminus B(=D)\}$ に従属する 1 の分割 (θ_i) を取れば、C 上でのみ正値を取る θ_i だけを足し合わせた関数が条件を満たす。