２－１

　補題をいくつか用意しておく。補題１、２の証明は第１章のファイルで示したいくつかの命題の証明とほとんど同様であるため、省略する。

補題１：$A : X \to Y$ は線形写像の X 上への制限として書けるとする。このとき、dA_x はおなじ線形写像の $T_x(X)$ 上への制限である。

補題２：(a)$T_{(x,y)}(X \times Y) = T_x(X) \times T_y(Y)$
(b)$d(f \times g)_{(x,y)} = df_x \times dg_y$

補題３：$X \subset \mathbb{R}^N$ は任意の集合とし、各 $x \in X$ に対して V_x はそれぞれ k 次元の $\mathbb{R}^N$ の部分空間とする。各 $z \in X$ に対して $v_1^z(x), ..., v_k^z(x)$ はそれぞれ z の X における近傍 U_z 上で定義された滑らかな $\mathbb{R}^N$ への関数であり、しかも各 $x \in U_z$ について $v_1^z(x), ..., v_k^z(x)$ は V_x の基底であると仮定する。このとき、$\mathbb{R}^N$ から V_x への射影を P_x とすると、関数 $(x, v) \mapsto P_x(v)$ は滑らかである。

証明：$z \in X$ をひとつ固定する。$(x, v) \in U_z \times \mathbb{R}^N$ に対して、

$$g(a) = \|a_1 v_1^z(x) + ... + a_k v_k^z(x) - v\|^2$$

と定義する。$a^*(x, v)$ が $g(a)$ の最小解を与えるとき、$a_1^*(x, v)v_1^z(x) + ... + a_k^*(x, v)v_k^z(x) = P_x(v)$ となるのが射影の定義であった。解が一意に決定することは閉凸集合の最短距離定理からわかる。$v_i^z(x)$ と $v_j^z(x)$ の内積を $c_{ij}^z(x)$ と書き、また $v_i^z(x)$ と v の内積を $b_i^z(x, v)$ と書こう。すると c_{ij}^z、b_i^z はともに (x, v) に関して滑らかである。次に一階の条件を計算すると、

$$a_1 c_{ij}^z(x) + ... + a_k c_{ij}^z(x) = b_i^z(x, v)$$

となる。最小解 $a^*(x, v)$ は一階の条件を当然満たす。$a \neq a^*(x, v)$ がおなじ線形方程式を満たしたと仮定してみよう。このとき、$h(t) = g(a^*(x, v) + t(a - a^*(x, v)))$ とすれば、$h'(t) = 0$ であるから h は定数であり、したがって $h(0) = h(1)$ である。これは a が g の最小解であることを意味し、最短距離定理から出た結果と矛盾している。よってこのような a は存在せず、g の最小化問題は一階の条件と同値であることがわかる。また同時に、

一階の条件を満たす a は一意であるから、これは係数行列 $C^z(x)=(c^z_{ij}(x))$ が正則であるということも意味している。

したがって、$a^*(x,v)=(C^z(x))^{-1}b^z(x,v)$ が求まる。右辺の形状から、左辺は (x,v) について滑らかである。$P_x(v)$ は $U_z\times\mathbb{R}^N$ 上で a^* と $v^z_1,...,v^z_k$ の積で表せるので、滑らかである。$X\times\mathbb{R}^N$ は $U_z\times\mathbb{R}^N$ という形の集合で埋め尽くせるので、$P_x(v)$ は大域的に滑らかである。以上で証明が完成した。

１：存在したと仮定すれば逆写像は U から $\mathbb{R}^k$ へのしずめ込みであるから、第 1 章第４節の問題 1 から像 V は $\mathbb{R}^k$ の開集合になるがこれは矛盾である。

２：まず $x\in\partial X$ とするとき、$f(x)\in\partial Y$ を示す。このために、x のまわりの助変数化 φ と $f(x)$ のまわりの助変数化 ψ を取る。もし $f(x)\notin\partial Y$ であるならば、ψ の定義域 V は $\mathbb{R}^k$ の開集合であるとしてよい。このとき $\varphi^{-1}\circ f^{-1}\circ\psi$ は十分に V を小さくすれば微分同相写像になるが、これは問題 1 に矛盾している。よってこのようなことはあり得ず、$f(x)\in\partial Y$ である。同様の理由によって、$y\in\partial Y$ なら $f^{-1}(y)\in\partial X$ である。そこで、∂f は ∂X から ∂Y への全単射であることがわかった。

さて、∂X から X への包含写像を i とすれば、$\partial f=f\circ i$ なので、$d(\partial f)_x=df_x\circ di_x$ である。補題 1 から包含写像の導関数は包含写像に等しいので、∂f ははめ込みである。第 1 章第 3 節の問題 6 (d) で、おなじ次元のはめ込みは局所微分同相写像であることがわかっている。よって ∂f は微分同相写像である。

３：多様体だと仮定すれば二次元であることは明らかである。そこで φ は $(0,0)$ のまわりの助変数化であるとする。このとき x 軸上の点および y 軸上の点は φ^{-1} によって x 軸に移されなければならない。なぜなら、もしそうでないとすれば φ の定義域を適当に縮めてやることによって問題 1 への反例が作れ、それは不合理だからである。

さて、$\varphi^{-1}(0,0)$ のまわりの φ の無限回微分可能な拡張を Φ と書けば、その微分はきちんと定義され、全単射でなければならない。ここで、先ほど見たように φ^{-1} は x 軸の点および y 軸の点を常に x 軸に移す。そこで $(0,0)$ のまわりでの φ^{-1} の無限回微分可能な拡張を Ψ と書くことにすれば、$\Psi\circ\Phi$ は無限回微分可能で、しかも H^k の開集合上での恒等変換 I の拡張になっているため、その導関数は I に等しい。ところが Ψ の第二座標の $(0,0)$ における偏微分は x についても y についても 0 になるから、これは矛盾である。

７：φ, ψ はいずれも x のまわりの助変数化とする。このとき、

$$\psi = \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$$

と局所的に書けるから、連鎖律を用いれば、

$$d\psi_0(H^k) = d\varphi_0(d(\varphi^{-1} \circ \psi)_0(H^k))$$

である。そこで証明すべきは、H^k から H^k への任意の微分同相写像 h が与えられたときに、$dh_0(H^k) = H^k$ となることである。

さらにもう一段階進める。$I = h \circ h^{-1}$ である。そこで連鎖律から、

$$I = dh_0 \circ dh_0^{-1}$$

がわかる。よって、もし任意の h について $dh_0(H^k) \subset H^k$ であることが示せたならば、特に h^{-1} にそれを用いることで、

$$H^k = I(H^k) = dh_0(dh_0^{-1}(H^k)) \subset dh_0(H^k)$$

となり、目的は達成される。そこで証明の目標は $dh_0(H^k) \subset H^k$ になる。

背理法の仮定として、$v \in H^k$ かつ $(dh_0(v))_k < 0$ としよう。ここで下付文字の k は k 座標目を表す。このとき、h_k の v 方向への方向微分の値は負になるので、

$$g = h_k(tv)$$

は 0 の近傍で単調減少でなければならない。よって十分小さな任意の $t > 0$ に対して

$$h_k(tv) \notin H^k$$

となるが、これは h が 0 の近傍で定義された H^k への写像であるという仮定に反する。以上で証明が完成した。

８：φ を $x \in \partial X$ のまわりの（X における）助変数化とする。このとき、$h : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ は標準的はめ込みとして、$\partial\varphi \circ h$ が x の ∂X における助変数化であった。h は線形であるから、$dh_0 = h$ に注意しておく。

さて、$v_i(x) = d\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(e_i)$ とすれば、$v_1(x), ..., v_{k-1}(x)$ は $T_x(\partial X)$ の基底を成す。また、これは明らかに x について滑らかである。$v \in \mathbb{R}^N$ の $T_x(\partial X)$ への射影を $P_x(v)$ と書くことにすると、補題３から $x \mapsto P_x(v_k(x))$ は滑らかである。このとき、

$$\vec{n}(x) = \frac{-v_k(x) + P_x(v_k(x))}{\|v_k(x) - P_x(v_k(x))\|}$$

が外向きの単位法線ベクトルである。（単位法線であることは明白である。外向きであることを知るためには、$P_x(v_k(x))$ の $d\varphi_x^{-1}$ による像が ∂H^k に含まれることを利用して、最後の座標を調べればよい。）これが x について滑らかであることは明白である。

９：(a)$x_n \in \partial X$ が $x \in X$ に収束しているとする。$\varphi : U \to X$ は x のまわりの助変数化とすれば、仮定から十分大きな n については $x_n \in \varphi(U)$ となる。そこで $u_n = \varphi^{-1}(x_n)$ とする。すでに ∂X が多様体であることを示すときに示したことであるが、このとき $u_n \in \partial H^k$ でなければならない。u_n は $\varphi^{-1}(x)$ に収束しており、∂H^k は閉集合であるから、$\varphi^{-1}(x) \in \partial H^k$、つまり $x \in \partial X$ でなければならない。以上で証明が完成した。

(b)H^1 は最も簡単な例である。

１０：座標関数の最後の座標を取ればよい。（導関数の符号が異なるが、これは誤植と思われる。）

１１：問題１０と同様に、任意の $x \in X$ の近傍上で座標関数を取り、これを 1 の分割を用いて足し合わせればよい。正則性は、問題１０ですでに導関数写像の値が 0 でないベクトルの存在が示せているので、明らかである。

2 − 2

2 ：$f(t) = -\dfrac{(t-1)^2}{2} + 1$ は $[-1,1]$ 上では $-1,1$ しか不動点を持たない。

4 ：開球体は $\mathbb{R}^n$ と微分同相である。しかし $\mathbb{R}^n$ 上では明らかに、$f(x) = x + (1,1,...,1)$ が不動点を持たない。

5 ：中間値の定理から、$f(x) - x$ はどこかで 0 にならねばならない。

6 ：f は連続で、不動点を持たないと仮定する。すると、関数

$$g(x) = \|f(x) - x\|$$

は最小値 $2\delta > 0$ を持つ。$p(x)$ を、$\|p - f\| < \delta$ となる多項式とすれば、

$$\|p(x) - x\| \geq \|f(x) - x\| - \|f(x) - p(x)\| > \delta$$

となって p は不動点を持たなくなる。矛盾。

7 ：A が正則でなければ 0 が固有値となる。次に A は正則とする。すると $x \in S^{n-1}$ ならば $Ax \neq 0$ である。そこで

$$g(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|}$$

と置けば、これは S^{n-1} 上できちんと定義された関数になる。A の各座標は正であるから、x が非負のとき $g(x)$ も非負である。つまり、$g(x)$ は $Q = S^{n-1} \cap \mathbb{R}^n_+$ の元を Q へ移す。

次に、

$$h(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{n-1})$$

は Q から $R = B^{n-1} \cap \mathbb{R}^{n-1}_+$ への位相同型写像である。さらに、$x \in B^{n-1}$ に対して、それに最も近い R 上の点を対応させる写像を k と置く。R は閉凸なので、最短距離定理によって k はきちんと定義された連続関数であることがわかる。このとき、$f = h \circ g \circ h^{-1} \circ k$ は B^{n-1} からそれ自身への連続写像と見なせ、従って問題 6 によって不動点 v を持つ。このとき、$v \in h(Q) = R$ であるから、$k(v) = v$ であり、よって $g(h^{-1}(v)) = h^{-1}(v)$ でな

ければならない。すると、

$$Ah^{-1}(v) = \|Ah^{-1}(v)\|h^{-1}(v)$$

でなけれなばらない。$\|Ah^{-1}(v)\| \geq 0$ なので、以上で証明が完成した。

８：g を (a,b) から L への微分同相写像とする。$p \in \bar{L} \setminus L$ としよう。

φ は p のまわりの助変数化とし、その定義域を $(c,d) \cap H^1$ と置く。$\varphi(u) = p$ とする。p は L の元の極限点であるから、p に収束する L の点列 (p_n) を取れば、(c,u) あるいは (u,d) のいずれかは $(\varphi^{-1}(p_n))$ を無限個含む。一般性を失うことなく (u,d) がそうであると仮定し、必要があれば部分列を取って、$\varphi^{-1}(p_n) \in (c,d)$ がすべての n について成立しているとする。特に $x = \varphi^{-1}(p_1)$ としよう。すると、ある $t \in (a,b)$ について $\varphi(x) = g(t)$ である。そこで $h(z) = \varphi(zx + (1-z)u)$ と置き、$J = h([0,1])$ とする。h は明らかに、$[0,1]$ 区間から X のコンパクト部分集合への微分同相写像である。

ここで、集合 $S = (a,t) \cap g^{-1}(J)$ を考えよう。J はコンパクトであるから、S は (a,t) の部分集合として閉集合である。また、$s \in S$ とすれば、$g(s) = h(v)$ となる $v \in [0,1]$ が存在する。$h(0) = p \notin L$ なので $v \neq 0$ である。また、$h(1) = g(t)$ で、g は単射だから $g(t) \neq g(s)$ であり、よって $v \neq 1$ である。よって $v \in (0,1)$ である。$h((0,1))$ は X の開集合なので、その g による逆像 U も開集合であり、s はそれに所属する。そこで s の近傍も U に所属しているが、$h((0,1)) \subset h([0,1]) = J$ なので、$U \subset S$ である。以上の考察から、S は (a,t) の開集合であることがわかった。これは、$S = \emptyset$ あるいは $S = (a,t)$ のいずれかであることを意味する。

$T = (t,b) \cap g^{-1}(J)$ も S と同様である。p は L の極限点であるから、T と S の双方が空になることはあり得ない。よって J は $g((a,t))$ あるいは $g((t,b))$ のいずれかを含む。

ここで $g((a,t)) \subset J$ と仮定する。すると $h^{-1} \circ g$ は (a,t) から $[0,1]$ への滑らかな単射である。滑らかであるから、その像が開区間であることは直ちにわかる。また $(h^{-1} \circ g)(t) = 1$ であることもわかっている。さらに、$h^{-1} \circ g$ は滑らかな単射であるから、単調増加か単調減少のどちらかでなければならない。単調減少であると仮定すれば右端点で 1 に収束することに矛盾するから、これは単調増加でなければならない。そこで、

$$\lim_{s \to a} h^{-1} \circ g(s) = \alpha$$

は必ず存在し、さらに α はこの関数の (a,t) 内での下限を与える。$\alpha = 0$ であることを示すために、$\alpha > 0$ と仮定して考えてみよう。$h(0) = p$ であり、$h^{-1}(p_n) \to 0$ だから、$0 < v < \alpha$ となる v で $h(v) \in L$ となるものが存在する。ここで $h^{-1} \circ g$ は単調増加だか

ら、$g^{-1} \circ h$ も単調増加であり、$(g^{-1} \circ h)(v) < a$ がわかる。しかし g^{-1} の値域にそんな値はないため、矛盾である。そこで $\alpha = 0$ となる。h は微分同相であるから、

$$\lim_{s \to a} g(s) = p$$

がわかった。

同様に、$g((t, b)) \subset J$ であるときは

$$\lim_{s \to b} g(s) = p$$

が示せる。この性質から直ちに、p の条件を満たすような点は高々 2 点しかないことがわかる。以上で証明が完成した。

２－３

１：まず、Y の座標近傍はユークリッド空間の開集合と微分同相であるが、ユークリッド空間の開集合はその内部に含まれる閉球の和集合として書ける。さらに、それらの閉球の内部である開球の和集合としても書ける。Y はこれらの座標近傍の族で完全に覆えるから、次の事実がわかったことになる。Y のコンパクト集合族 $(V_\alpha)_\alpha$ で、その内部 $(U_\alpha)_\alpha$ が Y の開被覆であるようなものが取れる。V_α はコンパクトであるから、ある $\varepsilon_\alpha > 0$ が存在して、$\|w-y\| < \varepsilon_\alpha$ となる $y \in V_\alpha$ が存在すれば必ず $w \in \tilde{U}$ であるようにできる。

そこで $(U_\alpha)_\alpha$ に従属する１の分割 $(\theta_i)_i$ を取り、それぞれ対応する U_i と ε_i を取っておいて、

$$\varepsilon(y) = \sum_i \theta_i \varepsilon_i$$

と置く。これが滑らかであることは明らかである。一方、もしある $y \in Y$ について $\|w-y\| < \varepsilon(y)$ であるならば、$\theta_i(y) > 0$ となる i のなかで ε_i が最大になるような i を取れば、$y \in U_i$ かつ $\|w-y\| < \varepsilon_i$ なので、$w \in \tilde{U}$ である。よって、$Y^\varepsilon \subset \tilde{U}$。以上で証明が完成した。なお、$Y$ がコンパクトであれば、$\varepsilon(y)$ は Y 上で最小値 $\varepsilon > 0$ を持ち、$\varepsilon(y)$ を ε で取り替えればコンパクトのときの主張を得る。

２：$z \in Y$ に対して $\|w-z\|$ を対応させる写像は連続であり、Y はコンパクトなので、最小値を持つ。それに対応する点を y と置けば、そこが最短距離の点である。次に、$v \in T_y(Y)$ とする。第１章第２節の問題１２から、ある関数 $c : \mathbb{R} \to Y$ が存在して $c(0) = y$ かつ $c'(0) = v$ となっている。関数 $\|w - c(t)\|^2$ は０で最小値を取るから、微分したら０でなければならない。計算すると、v と $w-y$ が直交していることがわかる。

３：（ここで示される主張は本来問題３の企図する主張より弱く、「十分小さな $\varepsilon > 0$ について」のみ示してある。そうでなくとも示せるかどうかはよくわからない。）

ヒントにあるように、ε-近傍定理の証明で出てきた、$N(Y)$ における $Y \times \{0\}$ の近傍から Y^ε への微分同相写像 $h : (y, w) \mapsto y + w$ を取る。また、議論の明確化のために h^{-1} を k と書くことにする。このとき π は y に対して k の第一座標を返す関数であった。

$k(Y^\varepsilon)$ はコンパクト集合 $Y \times \{0\}$ の近傍であるから、ある $\delta > 0$ について $Z = (Y \times \{0\})^\delta$ を含んでいなければならない。k の作り方からこの内部で h は単射であり、$h(Z)$ は Y の近傍なので、ある $\hat{\varepsilon} > 0$ について $Y^{\hat{\varepsilon}}$ を含む。そこで最初から Y^ε の代わりに $Y^{\hat{\varepsilon}}$ に k の定義域を制限しておくことにする。

さて、$w \in Y^{\hat{\varepsilon}}$ としよう。$z \in Y$ を w から最短距離の Y 上の点とすれば、問題２によって $(z, w-z) \in N(Y)$ となる。また $\pi(w) = y$ と置けば、定義から $k(w) = (y, w-y)$ である。$\|w-y\| < \delta$ であるから、$\|w-z\| < \delta$ でもあるが、h は Z 上で単射でなければならないので、$z = y$ でなければならない。つまり、y は w から最短距離の Y 上の点であり、さらに最短距離の点は y しかない。

４：$F : X \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を $F(x, a) = x + a$ と定義すればこれは明らかにしずめ込みであり、また ∂F も同様である。よって F も ∂F も Y と横断的に交わる。後は横断性定理を適用すればよい。

５：（問題５と問題６の X は境界を持たないと考えて議論する。おそらく X だけが境界を持つ場合にも拡張できるであろうとは思う）

横断性ホモトピー定理を証明する際に取った F をふたたび取る。すなわち、S は $\mathbb{R}^M$ の単位球とし、

$$F(x, s) = \pi(x + \delta(x)s)$$

と定義する。（ここで $\delta(x)$ は Y^δ 上で π が定義されているような正値関数である。）F がしずめ込みであることは本文中の通りであり、故に横断性定理によってほとんどすべての s について f_s は Z と横断的である。次元を考えれば、これは $f_s(X)$ が Z と交わらないことを意味する。$f_0 = i$ は埋め込みであり、第１章第６節の問題１１から、$\|s\|$ が十分小さいときには f_s は埋め込みでなければならない。よって $f_s(X)$ は多様体である。ここで

$$g(s) = \max_{x \in X} \|x - f_s(x)\|$$

と置けば、Berge の最大値定理からこれは連続になり、さらに $g(0) = 0$ を満たす。そこで $\|s\|$ が十分小さければ、常に $g(s) < \varepsilon$ となる。以上の条件をすべて満たす s を取ってきて、

$$i_t = f_{st}$$

という変位を選べばよい。

６：F は問題５と同様とする。U および $Y \setminus Z$ は X の開被覆を成すので、それに従属する１の分割 $(\theta_i)_i$ を取る。このうち、$(\theta_i)_i$ の台が U に含まれる i の全体を I と置き、$\eta = \sum_{i \in I} \theta_i$ と定義し、

$$G(x, s) = F(x, \eta(x)s)$$

と置く。

$\eta(x)=0$ となるとき、$G(x,s)=x$ である。$x\in Z$ ならば $\eta(x)=1$ なので、$\eta(x)=0$ ならば $G(x,s)\notin Z$ である。対偶を取れば、$G(x,s)\in Z$ ならば $\eta(x)\neq 0$ がわかる。そこで、F や ∂F がしずめ込みであることを証明したのとおなじ手法によって、G が Z に横断的であることがわかる。後は問題5と同様にすればよい。$x\notin U$ ならば $G(x,s)=x$ なので、これで目標は達成できている。

７：（おそらく X が 0 を通らない、あるいは V が線形空間ではなくその平行移動を含むなどの追加条件が必要である。ここでは X が 0 を通らないとして主張を示す。）

S はヒントにあるとおりの集合として、$g:(\mathbb{R}^l\setminus\{0\})\times S\to\mathbb{R}^N$ を

$$g(w,v_1,...,v_l)=w_1v_1+...+w_lv_l$$

と定義する。任意の $(w,v_1,...,v_l)\in(\mathbb{R}^l\setminus\{0\})\times S$ に対して、少なくともひとつの w_i は 0 でない。このとき、写像 $v\mapsto g(w,v_1,...,v_{i-1},v,v_{i+1},...,v_l)$ は v_i の点で微分可能であり、その導関数は w_iI に等しい。従ってこれはしずめ込みである。部分多様体に制限してしずめ込みである写像はしずめ込みであるから、g もしずめ込みである。そこで横断性定理から、ほとんどすべての $s=(v_1,...,v_l)$ について $g_s(w)$ は X と横断的でなければならない。ところが、g_s の導関数の像は s によって貼られる空間、つまり V に等しい。そこから直ちに主張を得る。

８：

$$F(x,A)=df_x+A$$

は $\mathbb{R}^n\times M(n)$ から $M(n)$ へのしずめ込みであり、従って $\{0\}$ と横断的である。故にほとんどすべての A について F_A は $\{0\}$ と横断的であるが、$n>1$ のときには $M(n)$ の次元は n より常に大きいので、横断性の条件は単に $df_x+A\neq 0$ がすべての $x\in X$ に対して成り立つことを意味する。そこで $f_A(x)=f(x)+Ax$ と置けばこの導関数は決して 0 にならない。A の作用素ノルムを十分小さく取っておけばノルムの条件は当然に満たされる。（そのような小さい作用素ノルムで $\{0\}$ と F_A が横断的になるような A は無数にある。）

$n=1$ の場合、$f(x)=\cos(x)$ を $[0,2\pi]$ 内で考えてみたときに、$\varepsilon<\frac{1}{2}$ とすると、$\|g-f\|<\varepsilon$ ならば $g(0)>\frac{1}{2}$、$g(\pi)<-\frac{1}{2}$、$g(2\pi)>\frac{1}{2}$ となるため、g のこの区間内の最小点は内点に存在する。よって、この区間内のどこかで g は微分して 0 になる。

９：第１章第７節の本文ですでに示してあることの繰り返しであるが、いちおう記しておく。

$$g_a(x) = g(x,a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1} + a_1, ..., \frac{\partial f}{\partial x_k} + a_k)$$

と置くとこれは明らかにしずめ込みであり、従って横断性定理からほとんどすべての a について $g_a(x)$ は $\{0\}$ と横断的である。ここから直ちに主張の結果を得る。

１０：まず、$y = x^2$ のグラフの助変数化として、

$$\varphi(t) = (t, t^2)$$

を考える。グラフを零点として持つ関数としては、

$$g(x,y) = x^2 - y$$

とする。$dg^t_{(x,y)}(s) = (2x, -1)s$ である。すると法バンドルの助変数化は、

$$\psi(t,s) = (t, t^2, 2ts, -s)$$

である。そこで、

$$h(\psi(t,s)) = (t + 2ts, t^2 - s)$$

となる。

$$\det(d(h \circ \psi)_{(t,s)}) = -1 - 2s - 4t^2$$

となるので、臨界点の集合は、

$$s = \frac{-4t^2 - 1}{2}$$

で表現できる。従って臨界値の集合としては、

$$(-4t^3, 3t^2 + \frac{1}{2})$$

となる。

１１：まずこのとき、X の $p = (0,0)$ のまわりの助変数化を $\varphi : U \to X$ と置く。ただし $\varphi(0) = p$ である。このとき、$\varphi'(0) = (v, 0)$ となる v が存在するが、φ は微分同相写像なので、$v \neq 0$ でなければならない。一般性を失うことなく $v > 0$ とすれば、φ の第一座標 φ_1 は 0 の近傍で増加的であり、φ_1^{-1} が定義できる。よって、$f(x) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x))$ と置け

ば、$|x|$ と $|y|$ が共に十分小さい場合に限定すれば、$(x,y)\in X$ は $y=f(x)$ と同値になる。実際、x が φ_1^{-1} の定義域に属するとき、$y=f(x)$ ならば、$u=\varphi_1^{-1}(x)$ としたときに $\varphi(u)=(x,y)$ なので $(x,y)\in X$ である。また十分 $|x|$ と $|y|$ が小さい範囲では x に対して $(x,y)\in X$ となる y は一意に定まる（これは包含写像 $i:X\to\mathbb{R}^2$ に局所はめ込み定理を使えば容易にわかる)。よって主張は正しい。明らかに $f(0)=0$ かつ $f'(0)=0$ である。

さて、$p=0$ の近くの点 x において $T_x(X)$ は明らかに $(1,f'(x))$ で張られる。よってその直交補空間は $(-f'(x),1)$ で張られる。したがって $N(X)$ の助変数化として $\psi(x,z)=(x,f(x),-f'(x)z,z)$ が定まる。このとき問題１０と同じように $\det(d(h\circ\psi)_{(x,z)})$ を計算すれば、$1-f''(x)z+(f'(x))^2$ が出てくる。したがって $x=0$ とし $z=\frac{1}{\kappa(p)}$ とすればこれが $h\circ\psi$ の臨界点である。ψ は微分同相写像なので、$\psi((0,\frac{1}{\kappa(p)}))=(0,0,0,\frac{1}{\kappa(p)})$ が h の臨界点であることになるが、そのときの臨界値は $(0,\frac{1}{\kappa(p)})$ である。これで証明が完了した。

１２：第 1 章第 4 節の問題 4 で g を取ったときのやり方を思い出すことから始める。$z\in Z$ の Z における近傍 U の助変数化 φ、Y における近傍 V の助変数化 ψ、$\mathbb{R}^M$ における近傍 W の助変数化 χ を取る。ψ と χ を適切に変形し、対応して U と V を適度に縮めてやれば、$\psi^{-1}\circ\varphi$ と $\chi^{-1}\circ\psi$ が共に標準的はめ込みになるのだった。このときの χ^{-1} の後ろの l 座標を g と置き、後ろの $l-k$ 座標を h と置けば、$U=\{x|g(x)=0\}$ であり、$V=\{x|h(x)=0\}$ であることがわかる（Z の次元は $M-l$ で、Y の次元は $M-l+k$ である)。

$T_x(Z)\subset T_x(Y)$ であるから $N_x(Y)\subset N_x(Z)$ である。よって $N_x(Z)$ は $T_x(Y)$ と横断的に交わり、ゆえに $W_x=N_x(Z)\cap T_x(Y)$ は k 次元の線形空間である。$v_i=d\psi_x(e_i)$ とすればこれらは $T_x(Y)$ の基底を成すが、$i\le M-l$ であれば、$d\psi_x(e_i)=d\varphi_x(e_i)$ であるから、$v_1,...,v_{M-l}$ は $T_x(Z)$ の基底を成す。次に、P_x を $\mathbb{R}^M$ から $T_x(Z)$ への射影とする。第一節の冒頭で示した補題 3 を用いれば、写像 $(x,w)\mapsto P_x(w)$ は滑らかである。そこで、$i>M-l$ に対して $w_{i-M+l}=v_i-P_x(v_i)$ と置けば、それらはすべて x について滑らかに定まる。

W_x の $N_x(Z)$ における直交補空間は明らかに $N_x(Y)$ を含むが、$N_x(Y)\subset N_x(Z)$ であるから、次元を考えればそれらは一致しなければならない。ここで、

$$c_1w_1+...+c_kw_k=0$$

であるとすれば

$$c_1v_{M-l+1}+...+c_kv_{M-l+k}=P_x(c_1v_{M-l+1}+...+c_kv_{M-l+k})\in T_x(Z)$$

であるが、v_i はそれぞれ一次独立であったから、$c_1=...=c_k=0$ でなければならない。よって $w_1,...,w_k$ は W_x の基底であることがわかった。

さて、$V_x=dg_x^t(\mathbb{R}^k\times\{0\})$ とする。転置写像の性質を考えれば V_x は k 次元の $N_x(Z)$ の部分空間であるが、g の取り方から、これはまた $N_x(Y)$ の補空間でなければならないことがわかる。$\mathbb{R}^M$ における W_x への正射影を R_x とすれば、先ほどと同様に写像 $(x,w)\mapsto R_x(w)$ は x,w について滑らかでなければならない。さらに $v\in V_x$ とすれば、

$$R_x(v)=0\Rightarrow v=v-R_x(v)\in N_x(Y)\Rightarrow v=0$$

であるから、R_x は V_x と W_x の間の線形同型写像を与える。

そこで、

$$F(u,v)=(\varphi(u),R_{\varphi(u)}\circ dg_{\varphi(u)}^t((v,0)))$$

と置けば、これは $\varphi^{-1}(U)\times\mathbb{R}^k$ から $N(U;Y)$ への写像である。これが u と v について滑らかな全単射であることも明白である。次に導関数を調べる。$dF_{(u,v)}(h,w)=0$ とする。まず、最初の行に注目すれば $h=0$ がわかる。これは $R_{\varphi(u)}\circ dg_{\varphi(u)}^t((w,0))=0$ を意味するので、$w=0$ である。よって導関数は単射であることがわかった。

次に $N(U;Y)$ を $U\times\mathbb{R}^M$ の部分集合と見なす。後者は多様体であり、F の値域と考えることができる。$U\times\mathbb{R}^M$ のコンパクト集合 C を取る。すると $B=\{x\in U|\exists w,(x,w)\in C\}$ は C の射影による像であるので、射影作用素の連続性から B もまたコンパクトである。

$A=F^{-1}(C)$ と置く。A が閉集合であるのは明らかである。次に $(u_n,v_n)_n$ を A の点列とする。このとき $F(u_n,v_n)=(x_n,w_n)$ は C の点列であるから、収束部分列 $(x_{k(n)},w_{k(n)})_n$ を持つ。収束先を (x^*,w^*) と置く。$x^*\in U$ なので $\varphi(u^*)=x^*$ となる u^* が存在するが、φ は同相写像なので u^* は $u_{k(n)}$ の収束先である。次に $w^*\in W_{x^*}$ を示す。このために、先ほど取った x について滑らかに変わる基底 $w_1(x),...,w_k(x)$ を取り、

$$f(x)=\min_{a\in S^{k-1}}\|a_1w_1(x)+...+a_kw_k(x)\|$$

とすれば Berge の定理からこれは連続であり、したがって B 内で最小値 $m>0$ を持つ。また w_n は有界であるから、その上限を $S>0$ としておく。すると $x_n\in B$ であるから、

$$w_n=c_{1n}w_1(x_n)+...+c_{kn}w_k(x_n)$$

と置けば $\|c_n\| \leq \frac{S}{m}$ であり、したがって $c_{k(n)}$ は収束部分列 $c_{l(n)}$ を持つ。そこで両辺の収束先を取れば、

$$w^* = c_1^* w_1(x^*) + ... + c_k^* w_k(x^*)$$

となる。したがって $(x^*, w^*) \in N(Z;Y)$ である。よって $F(u^*, v^*) = (x^*, w^*)$ となるような v^* が存在する。

ここで $R_x(v) = c_1 w_1(x) + ... + c_k w_k(x)$ と表示されるときの $(c_1, ..., c_k)$ を $S_x(v)$ と書こう。明らかに $S_x(v)$ は (x, v) について連続であり、また S_x は W_x と $\mathbf{R}^k$ の間の線形同型作用素である。したがって $Q_x(c) = (S_x \circ dg_x^t)^{-1}(c)$ も (x, c) について連続である。ところで $Q_{x_{l(n)}}(c_{l(n)}) = v_{l(n)}$ であり、$Q_{x^*}(c^*) = v^*$ であるから、$v_{l(n)} \to v^*$ でなければならない。故に、(u_n, v_n) は $F^{-1}(C)$ 内の点 (u^*, v^*) への収束部分列を持つ。これは F が固有であることを意味する。

したがって F は $U \times \mathbb{R}^M$ への埋め込みであるから、像 $N(U;Y)$ への微分同相写像でなければならない。つまり F は助変数化である。したがって $N(Z;Y)$ は多様体である。以上で証明が完成した。

１３：

$$c(t) = \frac{p + (0, ..., 0, t)}{\|p + (0, ..., 0, t)\|}$$

と置けば、c は $\mathbb{R}$ 上で定義されて $c(0) = p$ となる直線である。$c'(0) = (0, ..., 0, 1)$ であるので、第 1 章第 2 節の問題１２から $(0, ..., 0, 1) \in T_p(S^k)$ がわかる。次に、埋め込み写像は線形写像の制限であるから、その導関数もおなじ線形写像の制限であり、従って $S^{k-1} \times \{0\}$ の接空間は $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ 内に入る。従って $(0, ..., 0, 1)$ はこれと直交している。直交補空間が 1 次元であることは明白であるから、それは $(0, ..., 0, 1)$ で張られる。後の主張は明白である。

１４：この写像は線形写像の制限であるから、導関数も同じ写像の制限が出る。それが全射であることは明らかである。逆像は $\{z\} \times N_z(Z) \cap T_z(Y)$ である。

１５：滑らかな単射であることは明らかである。次にこれは線形写像の制限として書ける写像であるから、導関数も同じ写像であり、従ってそれは単射である。また C が $N(Z;Y)$ のコンパクト集合であるとし、その逆像を A と置く。$(z_n)_n$ を A 内の点列とすれば、

$(z_n, 0) \in C$ なのでこれは収束部分列を持つ。収束先を $(z^*, 0)$ とすれば z^* は z_n の部分列の収束先である。A は閉集合の逆像なので閉であり、よって z^* は A に属する。したがって A はコンパクトである。ゆえにこの写像は埋め込みである。

１６：π と h は ε 近傍定理と同じ写像とし、ただし h の定義域はあらかじめ $N(Z;Y)$ に制限しておく。h は連続であるから、$W = h^{-1}(Y^\varepsilon)$ は $N(Z;Y)$ の開集合である。さらに、明らかにそれは $Z \times \{0\}$ を含む。

h は線形写像の制限であるため、その導関数はおなじ写像の接空間への制限である。そこで $(z, 0)$ における $N(Z;Y)$ の接空間を計算してみよう。$Z \times \{0\}$ と $\{z\} \times (N_z(Z) \cap T_z(Y))$ は $N(Z;Y)$ に含まれて $(z, 0)$ を含むふたつの部分多様体である。従って $N(Z;Y)$ の接空間はそれらの接空間を含む。つまりそれは $T_z(Z) \times \{0\}$ と $\{0\} \times (N_z(Z) \cap T_z(Y))$ を含む。次元を考えれば、$(z, 0)$ の $N(Z;Y)$ における接空間が $T_z(Z) \times (N_z(Z) \cap T_z(Y))$ と一致することがわかる。

$$dh_{(z,0)}(k, v) = dh_{(z,0)}(l, w)$$

であるとすれば $k + v = l + w$ であるから、$k - l = w - v$ であり、$k - l \in T_z(Z)$ かつ $w - v \in N_z(Z)$ であるから、$(k, v) = (l, w)$ でなければならない。これは $dh_{(z,0)}$ が単射であることを意味する。次元を比較すれば、その像は $T_z(Y)$ と一致していなければならない。一方、π は Y 上で恒等写像であるから、$d\pi_z$ も $T_z(Y)$ 上で恒等写像でなければならない。したがって $d(\pi \circ h)_{(z,0)}$ は線形同型写像である。

$(\pi \circ h)(z, v) = z$ であるから、$\pi \circ h$ は $Z \times \{0\}$ に制限すると極めて自明な Z 上への微分同相写像になる。さらに $Z \times \{0\}$ 上でそれが局所微分同相写像であることもすでに示した。ゆえに第１章第８節の問題１４によって、$\pi \circ h$ は $N(Z;Y)$ における $Z \times \{0\}$ の近傍上に制限すれば微分同相写像になる。以上で証明が完成した。なお、この写像は $(z, 0)$ を z に写すことに注意。

１７：第１章第２節の問題１０から、対角集合の接空間は接空間の対角集合であることがわかっている。よって、

$$\{(v, -v) | v \in T_x(X)\}$$

は $T_{(x,x)}(\Delta)$ の直交補空間に含まれる。次元を比較すればそれが一致していることは明白である。

１８：滑らかな全単射であることは明らかである。次にこれは線形写像の $T(X)$ 上への制限であるから、その導関数もおなじ写像の接空間への制限である。$(x,v) \mapsto ((x,x),(v,-v))$ は $\mathbb{R}^{2N}$ から $\mathbb{R}^{4N}$ への写像として単射であるから、この導関数も単射でなければならない。次元はおなじなので導関数は全射でもある。よって逆関数定理により、この写像は局所微分同相である。あとは第１章第３節の問題５を適用すればよい。

１９：問題１２の F に対して、

$$G(z,v) = F(\varphi^{-1}(z),v)$$

とし、この逆写像を取ればよい。

２０：まず、$N(Z;Y)$ が自明であるとし、対応する Φ を取る。$Z \times \mathbb{R}^k$ から $\mathbb{R}^k$ への射影を σ とし、$g = \sigma \circ \Phi$ とすれば、$g(z,v)=0$ は $v=0$、つまり $(z,v) \in Z \times \{0\}$ と同値である。ここで管状近傍定理によって存在が保証される埋め込み $h : V \to Y$ を取る。ただし V は $Z \times \{0\}$ の開近傍である。このとき $U = h(V)$ は Z の開近傍であり、$g \circ h^{-1}$ は U 上で定義された関数であって、この関数の零点は明らかに Z と一致する。

次に g の存在を仮定する。ここで、すべての $w \in \mathbb{R}^k$ に対して、$dg_z(v) \cdot w = v \cdot dg_z^t(w)$ となる $dg_z^t(w) \in T_z(Y)$ がただひとつ存在する。（存在自体は Riesz の表現定理から言える。一意性については、w_1 と w_2 が等しく上の条件を満たすとすれば $v \cdot (w_1 - w_2) = 0$ がすべての $v \in T_z(Y)$ について成り立つので、そこから $w_1 = w_2$ を得る。）さらにそれが w について線形であることは明白である。したがって転置写像 dg_z^t はこの場合も定義され、それは $\mathbb{R}^k$ から $T_z(Y)$ への写像である。

$v \in T_z(Z)$ とすれば $v \cdot dg_z^t(w) = dg_z(v) \cdot w = 0$ なので、$dg_z^t(\mathbb{R}^k) \subset N_z(Z)$ である。さらに $dg_z^t(w) = 0$ ならばすべての $v \in T_z(Y)$ に対して $dg_z(v) \cdot w = v \cdot dg_z^t(w) = 0$ であるが、dg_z はしずめ込みであるから、$w = 0$ である。次元を考えれば dg_z^t は $\mathbb{R}^k$ から $N_z(Z) \cap T_z(Y)$ への線形同型写像である。したがって

$$\varphi(z,w) = (z, dg_z^t(w))$$

とすればこれは $Z \times \mathbb{R}^k$ から $N(Z;Y)$ への滑らかな全単射である。これがはめ込みであることは問題１２の F に対する方法とまったく同様に行うことができる。次元が同じなので、はめ込みは局所微分同相性を意味し、したがってこれは微分同相写像である。そこで逆写像を Φ とすればよい。

2 − 4

１：$f(z)=z^7+\cos(|z|^2)(1-93z^4)$ と置く。$|z|=100$ のところで、

$$|f(z)|\geq |z|^7-93|z|^4-1>0$$

となるので、$\frac{f(z)}{|f(z)|}$ は定義される。あとは本文と同様にホモトピーを構成してやれば、これと $\frac{z^7}{|z|^7}$ はホモトープなので mod2 写像度は 1 となり、ここから直ちに主張を得る。
（別解：そもそも実数に制限するとこの式は $-\infty$ に近づくに連れて $-\infty$ に、$+\infty$ に近づくに連れて $+\infty$ に近づく実数値関数なので、中間値の定理から零点の存在が言える。）

２：W が閉であれば $g^{-1}(W)$ も閉である。次に f とホモトープで $g^{-1}(W)$ に横断的な写像 h を取る。第 1 章第 5 節の問題 7 から、このとき $g\circ h$ は W と横断的である。また明らかに $g\circ f$ と $g\circ h$ はホモトープである。

さて、$h^{-1}(g^{-1}(W))=(g\circ h)^{-1}(W)$ であるから、それぞれの逆像の個数は等しい。よって

$$I_2(g\circ h, W)=I_2(h, g^{-1}(W))$$

が成り立つのは明らかである。なお、X の次元と $g^{-1}(W)$ の次元が足して Y の次元になることと、X の次元と W の次元が足して Z の次元になることは、余次元の公式から明らかに同値である。

３：（個々の議論は第 3 章第 3 節の本文中で行うことの繰り返しであるが、いちおう示しておく。）

まず Δ が閉集合であることを確かめるべきであるが、これは明白だから省略する。

(a)f_t がホモトピーであるとき、$f_t\times g$ もホモトピーである。g についても同様。

(b)$h:(a,b)\mapsto(b,a)$ を用いる。h は微分同相写像であるから、当然に Δ と横断的である。また h は Δ 上で恒等変換である。k は $f\times g$ とホモトープであるような Δ と横断的な写像としよう。第 1 章第 5 節の問題 7 によって、$h\circ k$ は $g\times f$ とホモトープであるような $h(\Delta)=\Delta$ と横断的な写像である。問題 2 から $I_2(h\circ k,\Delta)=I_2(k,\Delta)$ であるから、結論は正しい。

(c)f とホモトープで Z に横断的な写像 g を取る。このとき、$f\times i$ と $g\times i$ はホモトープ

である。さらに、

$$\begin{aligned} x \in g^{-1}(Z) &\Leftrightarrow g(x) \in Z \\ &\Leftrightarrow \exists z \in Z, (g \times i)(x, z) \in \Delta \\ &\Leftrightarrow \exists z \in Z, (x, z) \in (g \times i)^{-1}(\Delta) \end{aligned}$$

である。

さて、$(x, z) \in (g \times i)^{-1}(\Delta)$ としよう。これは $g(x) = z$ を意味する。第 1 節の問題のいちばん最初に記した補題を用いれば、

$$d(g \times i)_{(x,z)} = dg_x \times di_z$$

であることがわかる。$(v, w) \in T_{(z,z)}(Y \times Y) = T_z(Y) \times T_z(Y)$ としよう。g の横断性から、ある $v_1 \in T_x(X)$ と $v_2 \in T_z(Z)$ に対して $v - w = dg_x(v_1) + v_2$ であるから、

$$d(g \times i)_{(x,z)}(v_1, -v_2) + (w + v_2, w + v_2) = (v, w)$$

となる。したがって $g \times i$ は Δ と横断的である。

さて、$x \in g^{-1}(Z)$ ならば $(x, g(x)) \in (g \times i)^{-1}(\Delta)$ であり、また $(x, z) \in (g \times i)^{-1}(\Delta)$ であれば $x \in g^{-1}(Z)$ である。したがってこれらふたつの逆像の点の個数は一致しなければならない。ここからただちに欲していた結果を得る。

(d) これは (b) の特殊ケースに過ぎない。

４：$\dim X \neq 0$ であるならば、Z の次元は Y よりもひとつ以上低い。さて、f は定値写像 $g : x \mapsto y$ にホモトープである。$y \notin Z$ であるならば、明らかに交差数は 0 である。$y \in Z$ であるとしよう。局所はめ込み定理を Z から Y への包含写像に適用すれば、y と曲線で結ばれる $\bar{y} \in Y \setminus Z$ の存在がわかる。このとき、定値写像 $h : x \mapsto \bar{y}$ は明らかに g とホモトープである。よってやはり交差数は 0 である。

$X = \{x\}$ の場合、Z が $\{f(x)\}$ を含む Y の連結成分全体を含めば、mod2 交差数は 1 でなければならない。また、実はその場合に限る：なぜなら、$\dim Z = \dim Y$ ならば Z は Y の開集合でもあるからである。

５：（$Z \neq Y$ を仮定しなければ出ないと思われる。）

第 1 章第 6 節の問題 4 から、このとき f は Z に含まれない点 y への定値写像とホモトープである。よって交差数は 0 になる。

６：恒等写像 I は自明に任意の点 $\{y\}$ と横断的であるが、その交差数、すなわち写像度は 1 に等しい。よって問題５の対偶を取れば結論が成り立つ。

７：S^1 は単連結であれば可縮であるが、これは問題６と矛盾する。

８：(a)$f((1,0)) = (\cos x, \sin x)$ となる $x \in [0, 2\pi)$ をひとつ取る。$x \in [0, \frac{\pi}{2})$ ならば、$g(t) = \arcsin(f_2(\cos t, \sin t))$ が 0 を含む開区間で定義され、$g(0) = x$ で、すべての条件を満たす。ここで arcsin は逆三角関数の主値である。同様に、x がどのような場合でもそれらはなんらかの逆三角関数の定義域に属するので、それを作用させてやれば $g(t)$ は 0 の近傍では $g(0) = x$ を満たすように定義できる。こうして g は 0 を含む開区間では矛盾なく定義できた。

ふたたび $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ の場合に戻ろう。正の t の領域で、この g が初めて滑らかに定義できなくなるのは、$f_2(\cos t, \sin t)$ が arcsin の定義域の端に到達した場合である。そのような正の t が存在しなかった場合は、$g(t)$ は $[0, +\infty)$ まで定義される。存在した場合、それを t_1 として、$f(\cos t_1, \sin t_1) = (\cos x_1, \sin x_1)$ と置こう。$\sin x_1$ は 1 か -1 のどちらかであるため、$\cos x_1$ は 0 である。そこでこの t_1 の近くで $g(t) = \arccos(f_1(\cos t, \sin t))$ と定義してやればよい。ただし今度は arccos は主値とは限らず、$g(t_1) = x_1$ となるように取る。こうして g はさらに延長できる。これが $[0, 2\pi]$ まで延長できないとすれば、さらに t_2, x_2 に同じ操作を繰り返して延長すればよい。$f(\cos t, \sin t)$ の t についての微分は有界なので、この操作は高々有限回で終わり、g は $[0, 2\pi]$ 上まで拡張できる。$x \in [0, \frac{\pi}{2})$ 以外の場合も同様である。

同じように g は $[-2\pi, 0]$ 上まで拡大できる。こうして g の定義域が拡大した後は、たとえば $g(t + 2\pi) = g(t) + g(2\pi)$ などとして定義してやれば問題なく $\mathbb{R}$ 上まで拡大できる。$g(2\pi) = 2q\pi$ である。以上で証明が完成した。

(b)（第３章第３節の問題８でここの推論をもう一度使う。）

$(\cos g(t), \sin g(t))$ は f の正則値であると仮定する。ここで $n \in \mathbb{Z}$ に対して $g(s) = g(t) + 2\pi n$ であるならば $f(\cos s, \sin s) = (\cos g(t), \sin g(t))$ となるから、$(\cos s, \sin s)$ は f の正則点である。すると、

$$g'(s)(-\sin g(s), \cos g(s)) = df_{(\cos s, \sin s)}(-\sin s, \cos s) \neq 0$$

であるから、$g'(s) \neq 0$ である。したがってこのような s の集合は離散集合になる。よっ

て $[t, t+2\pi]$ 間でそのような s は有限個しかない。それらを $s_0 = t, s_1, ..., s_n = t+2\pi$ とし、$s_0 < ... < s_n$ としよう。このとき、n を 2 で割った余りが f の mod2 写像度である。

次に、数 m をひとつ固定し、$g(s_i) = g(s_j) = g(t) + 2\pi m$ となる i, j をすべて集めたものを $i_1, ..., i_k$ とし、$i_1 < ... < i_k$ とする。このとき、$g'(s_{i_j}) > 0$ だと仮定し、$g'(s_{i_{j+1}}) > 0$ とすると、中間値の定理をうまく使うことで $s_{i_j} < s < s_{i_{j+1}}$ かつ $g(s) = g(s_{i_j})$ となる s の存在が示せるが、これは矛盾である。したがって g' の符号は j が奇数か偶数かのみに依存して決定することがわかる。

以下、いくつかの場合分けを行って考える。

場合 1：$0 \leq q < m$ のとき。

仮定から $g'(s_{i_1}) > 0$ かつ $g'(s_{i_k}) < 0$ であるから、k は偶数である。

場合 2：$m < q \leq 0$ のとき。

場合 1 と同様の理由から、k は偶数である。

場合 3：$q \leq 0 < m$ のとき。

これも場合 1 と同じ理由で k は偶数である。

場合 4：$m < 0 \leq q$ のとき。

これも場合 1 と同様に k は偶数である。

場合 5：$q = m = 0$ のとき。

$i_1 = 0$ と $i_k = n$ は確実である。一般に $g'(s) = g'(s+2\pi)$ なので、このふたつの符号は一致しなければならない。そこで k は奇数である。

場合 1 から 5 までを利用することで、$q = 0$ という特殊な場合については証明ができる。まず、$m = 0$ 以外の点を取る可能性は偶数でなければならず、$m = 0$ の点は奇数個存在する。したがって s_i の総数 $n+1$ は奇数でなければならず、したがって n は偶数である。

さて、次に $|q| > 0$ の場合を考えよう。

場合 6：$0 < m < q$ のとき。

$g'(s_{i_1}) > 0$ かつ $g'(s_{i_k}) > 0$ でなければならない。よって k は奇数である。

場合 7：$0 = m < q$ のとき。

$s_{i_1} = t$ であることは明白である。一方、$q > 0$ であるから $g'(s_{i_k}) > 0$ でなければなら

ない。よって $g'(t) > 0$ のときは k は奇数であり、$g'(t) < 0$ のときは k は偶数である。

場合８：$0 < m = q$ のとき。$s_{i_k} = t + 2\pi$ である。一方、$q > 0$ であるから $g'(s_{i_1}) > 0$ でなければならない。ところが $g'(t) = g'(t + 2\pi)$ であるから、$g'(t) > 0$ のときは k は奇数であり、$g'(t) < 0$ のときは k は偶数である。

場合８までによって、$q > 0$ のときの証明が完成する。まず場合６によって、１から $q - 1$ までの m に対して対応する点の個数はすべて奇数なので、合計した個数の偶奇は $q - 1$ の偶奇と一致する。$m < 0$ と $m > q$ のときにはすべて偶数であり、場合７と８から $m = 0$ と $m = q$ の点の偶奇は一致することがわかるから、その点は無視してよい。かくして、$n + 1$ の偶奇は $q - 1$ と一致することがわかるから、主張は正しい。

場合９：$q < m < 0$ のとき。
場合６とまったく同様に、k が奇数であることがわかる。

場合１０：$q < m = 0$ のとき。
場合７と同様、$g'(t) > 0$ ならば k は偶数、$g'(t) < 0$ ならば k は奇数である。

場合１１：$q = m < 0$ のとき。
場合８と同様、$g'(t) > 0$ ならば k は偶数、$g'(t) < 0$ ならば k は奇数である。

場合９から１１を使えば、$q < 0$ についても主張が成り立つことは明らかであろう。以上ですべての場合について証明が完成した。

９：Sard の定理から $p \notin f(X) \cup Z$ となる p が存在する。p を無限遠点とする立体射影を h として、$h(Z)$ は $\mathbb{R}^k$ の閉多様体であり、$h \circ f$ は X から $\mathbb{R}^k$ への写像である。したがって問題５から $I_2(h \circ f, h(Z)) = 0$ であるが、問題２によってこれは $I_2(f, Z) = 0$ を意味する。

１０：輪環面が S^2 と微分同相であり、g を微分同相写像とする。ここで $S^1 \times \{0\}$ から輪環面上への包含写像を i と置き、また $g(\{0\} \times S^1) = Z$ と置くと、問題９から $g \circ i$ と Z との交差数は０でなければならない。問題２からこのとき $S^1 \times \{0\}$ と $\{0\} \times S^1$ の交差数も０になるがこれは矛盾である。

１１：X はコンパクトであるから $f(X)$ は閉である。よって $Y \setminus f(X)$ は開であるが、$\deg_2(f) = 1$ であるから Sard の定理によってそれは空集合以外の開集合を含めない。故に $f(X) = Y$。

１２：問題１１から、$\deg_2(f) = 1$ なら $f(X) = Y$ であり、したがって Y はコンパクトである。対偶を取れば証明が完成する。

１４：第１章第３節で、埋め込みが像の上への微分同相写像であることを示した。ここではその拡張として、X と Y が境界のある多様体であったときでも埋め込みは微分同相写像になっていること、および $\partial f(X) = f(\partial X)$ を確かめる。

まず f は埋め込みであるから、単射、固有なはめ込みである。U が X の開集合であるとき $f(U)$ が $f(X)$ の開集合であることは、f が単射、固有であることを用いて前と同様に示すことができる。さて、$x \in X$ とし、対応する助変数化 φ を取る。$x \notin \partial X$ であるときは、φ の定義域はユークリッド空間の開集合だと考えてよい。$f \circ \varphi$ は Y を包含するユークリッド空間 $\mathbb{R}^M$ の上へのはめ込みであるから、局所はめ込み定理によって、ある ψ に対して $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ は $u = \varphi^{-1}(x)$ の近傍 U で定義された標準的はめ込みである。このとき、ψ^{-1} の $f(\varphi(U))$ への制限は滑らかであり、したがって h を標準的しずめ込みとして、

$$(f \circ \varphi)^{-1} = h \circ \psi^{-1}$$

は滑らかであることがわかる。かくして、$f \circ \varphi$ は $f(\varphi(U))$ の助変数化となる。次に $x \in \partial X$ とする。$g = f \circ \varphi$ として、$\tilde{g}$ を $u = \varphi^{-1}(x)$ のまわりの g の局所的に何度でも微分可能な拡張であるとする。g は u ではめ込みであるから、$\tilde{g}$ も u ではめ込みである。したがって $\tilde{g}$ に局所はめ込み定理を適用すれば、ある ψ に対して $\psi^{-1} \circ \tilde{g}$ は u の（$\mathbb{R}^k$ における）近傍 U で定義された標準的はめ込みであることがわかる。このとき、g は $V = U \cap H^k$ 上で定義されており、$\psi^{-1} \circ g$ は V 上で定義された標準的はめ込みと一致する。逆写像を取ると、

$$g^{-1} = h \circ \psi^{-1}$$

となるので前と同じようにこれは滑らかである。したがって g は $g(V)$ の助変数化である。以上で $f(X)$ が X とおなじ次元の多様体であることがわかった。このとき、いずれの場合も局所的には

$$f^{-1} = \varphi \circ h \circ \psi^{-1}$$

であるから f^{-1} は滑らかである。したがって f は微分同相写像であることがわかる。微分同相写像で境界が移り合うことは第１節の問題２ですでに示しているから、これで確かめたかった事実はすべて示せたことになる。

さて、$i_t(x) = i(x,t)$ を変位を与えるホモトピーとして、

$$f(x,t) = (i_t(x), t)$$

と置く。$W = f(X \times I)$ はコンパクトである。また、単射であることも明らかである。さらに、f の導関数が単射であることも明らかであろう。したがって f は単射なはめ込みである。f の定義域はコンパクトだから f は埋め込みである。したがって W は多様体であり、その境界は $f(X \times \{0\}) \cup f(X \times \{1\}) = (X \times \{0\}) \cup (Z \times \{1\})$ であることがわかる。以上で証明が完成した。

１５：f はヒントの通りの写像としよう。すると境界定理から、∂f と C の mod_2 交差数は０である。次に g_1 を i_X とホモトープで C と横断的な写像、g_2 を i_Z とホモトープで C と横断的な写像とする。$h(x,0) = g_1(x)$、$h(x,1) = g_2(x)$ とすれば、h は ∂f とホモトープであるから、やはり mod_2 交差数は０である。よって、g_1 と C との mod_2 交差数は g_2 と C の mod_2 交差数と一致しなければならない。これは X と Z の C との mod_2 交差数が一致していることを意味する。

１６：$y_0, y_1 \in Y$ とし、このふたつをつなぐ弧を c とする。g を f にホモトープで $\{y_0, y_1\}$ と横断的な写像とする。$F(x,t) = (g(x), c(t))$ とすると、境界定理から ∂F と Δ の交差数は０でなければならない。これは $g(x) = y_0$ の解と $g(x) = y_1$ の解の偶奇が一致することを意味する。

１７：（境界定理に一次元多様体の分類定理を用いているため、あまり意味のある問題とは思えないが、いちおう記しておく。）

レトラクションが存在すると仮定すれば S^k 上の恒等写像の写像度は０になるがこれは矛盾である。

１８：第３節の問題１６で存在を示した微分同相写像 h を取る。また第３節の問題２０で存在を示した微分同相写像 Φ を取る。まず、$(Z \times \{0\})_t = \Phi^{-1}(Z \times \{t\})$ は $Z \times \{0\}$ の

変位である。これらは互いに素であるから、$I_2(Z \times \{0\}, Z \times \{0\}) = 0$ である。よって問題 2 から、

$$I_2(Z, Z) = I_2(h(Z \times \{0\}), h(Z \times \{0\})) = I_2(Z \times \{0\}, Z \times \{0\}) = 0$$

となって証明が終わる。

２－５

問題１：

$$U(x) = \frac{F(x) - z}{\|F(x) - z\|}$$

と置くとこれは u の D 上への拡張であり、従って第 1 章第 4 節の境界定理から $\deg_2(u) = 0$ であることがわかる。

問題２：

$$D' = D - \cup_{i=1}^{l} Int(B_i)$$

としたとき、$\partial D' = X \cup \partial B_1 \cup ... \cup \partial B_l$ である。ここで $g = F|_{\partial D'}$ とすれば問題 1 と同様にして $W_2(g, z) = 0$ であることがわかる。

さて、関数 $h = f, g, f_1, ..., f_l$ に対して、

$$u_h(x) = \frac{h(x) - z}{\|h(x) - z\|}$$

と定義しておく。これら $l + 2$ 個の関数のすべての正則値であるベクトル $v \in S^{n-1}$ を取れば、$\sharp u_g^{-1}(v) = \sharp u_f^{-1}(v) + \sharp u_{f_1}^{-1}(v) + ... + \sharp u_{f_l}^{-1}(v)$ であるから、ここから欲していた結果を得る。

問題３：まずそれぞれの y_i に対して、互いに交わらずまた境界とも交わらない閉球（正確には閉球の助変数化による像）B_i をあらかじめ選んでおく。（ここで第 1 章第 4 節の問題 7 を用いた。）

さて、y_i は正則点であるので、F は y_i の近傍を z の近傍へ微分同相に移す。この y_i の近傍を十分小さく取ることにより、それは B_i の内部に入っているとしてよい。z の近傍は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、z を中心とする十分小さな球を含む。その逆像を改めて B_i と置き直せば、これらは互いに交わらず、さらに微分同相であるから全単射であり、従って境界から球面への写像も全単射である。つまり $W_2(f_i, z) = 1$ である。そこで問題 2 によって定理の結果を得る。

問題４：$z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ をひとつ固定し、命題の主張が成り立つような点 $x \in X$ の集合を S と置く。

X はコンパクトと仮定しているので閉である。そこで z に対して X における最短距離の点 x が存在する。この x と z を結ぶ直線は明らかに $\mathbb{R}^n$ における x の任意の近傍と共通部分を持ち、その共通部分の点が題意を満たす。従って $x \in S$。これで $S \neq \emptyset$ が示せた。

次に、S 内の点列 x_p が $x \in X$ に収束しているとする。ここで x の近傍 U をひとつ取ると、ある番号の p に対して $x_p \in U$。そこで U は x_p の近傍でもあるため、X と交わらずに z と結べる点を持つ。これは $x \in S$ を意味する。つまり、S は X 内で閉集合である。

最後に、S が X の開集合であることを示す。まず $x \in S$ を任意に取る。$\mathbb{R}^n$ の中で X は余次元 1 の部分多様体であるから、第 1 章第 3 節の問題 2 によって x の $\mathbb{R}^n$ における近傍 U と、それと微分同相写像 g で結ばれる $\mathbb{R}^n$ の開集合 V が存在して、$g(X \cap U) = V \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ とできる。V は開集合なので、はじめから $g(x)$ を中心とする開球であるとしてよい。さて、U は $x \in S$ の近傍であるため、$y \in U$ が存在して y は X を経由せずに z と結ぶことができる。すると $g(y)$ の第 n 座標と符号がおなじである V の点に対応する U の点は明らかにおなじ条件を満たす。$U \cap X$ の任意の点に対して、その近傍は明らかにこのような U の点を含むから、$U \cap X \subset S$。以上で S が開集合であることが示せた。

つまり、S は非空、開、閉な X の部分集合である。よって X の連結性から $S = X$。以上で証明が完成した。

問題 5 ：問題 4 で S の開集合性を論じたときに示したように、$B \cap X \neq \emptyset$ かつ $B \setminus X$ がちょうどふたつの連結成分を持つような開集合 B が存在する。一般性を失うことなく B は球であるとしてよい。そのふたつの連結成分から代表となる点をひとつずつ取り、それぞれ z_0, z_1 とする。このとき、任意の $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ に対して B 内のどこかの点は X と交わらない曲線で結べる。そこで z_0, z_1 のどちらかはその条件を満たす。すべての点が z_0、z_1 のどちらかと弧で結ばれるのであるから、$\mathbb{R}^n \setminus X$ の連結成分は高々ふたつである。

問題 6 ：これはヒントがすでに答えになっている。

問題 7 ：

$$g(y) = \frac{y - z}{\|y - z\|}$$

と置くとき、$u = g \circ i_X$ であるから、第 1 章第 5 節の問題 7 から u と点 $\{\vec{v}\}$ が横断的で

あることは X が $g^{-1}(\vec{v})$ と横断的であることと同値である。しかし $g^{-1}(\vec{v})$ は集合としては $r \setminus \{z\}$ で、$z \notin X$ であるため、これは X が r と横断的であることと同値である。以上で証明が完成した。

問題８：ヒントから明らかであるため、省略する。

問題９：まず $x \in X$ をひとつ取る。問題７の推論と同様にして、x を始点とする半直線が $X \setminus \{x\}$ と横断的であるための必要十分条件は $u|_{X\setminus\{x\}}$ についてその半直線の傾きが正則値であることだとわかる。Sard の定理から、$T_x(X)$ に含まれない $u|_{X\setminus\{x\}}$ の正則値が存在する。それを $\vec{v}$ と置く。

さて、x を通る傾き $\vec{v}$ の直線（半直線ではなく）を考える。この直線が X と横断的であるという保証はもちろんない。ただし、次のことはわかる。まず、この直線を $\mathbb{R}^n$ の 1 次元部分多様体として見る。包含写像 i は x の点で X と横断的であるから、局所的にはこの直線は X と x のみで交わる。そこで、x に $\vec{v}$ のマイナス何倍か加えた点で、そこから x までの線分上にひとつも X の点がないような $y \in \mathbb{R}^n \setminus X$ が存在する。（これを示すためには、g を x の近傍 U 上で定義され 0 を正則値として持ち $g^{-1}(0) = U \cap X$ となる関数とし、$g(x + t\vec{v})$ の t による微分が 0 でないことを示せばよい。すると $t = 0$ の近傍で $g(x + t\vec{v}) = 0$ となるのは x しかないので、十分絶対値が小さな $t < 0$ について $y = x + t\vec{v}$ と置けばよい。）y を始点とした傾き $\vec{v}$ の半直線は X と横断的であり、なおかつ x という交点を持つ。すると、その y からの半直線上の点で、x と交差してから次に X とぶつかるまでの間にある点はすべて y とは違った巻き数を持つことになる。ここから D_0 と D_1 がともに空でないという結果を得た。後は問題５と６によって、これらふたつが互いに素な連結成分であることがわかる。

問題１０：X はコンパクトであるため、原点を中心とした大きな球 B の内部に入る。B の南極を z とすれば、$u(x)$ はつねに S^{n-1} の北半球に位置し、従って南半球の点は取らない。これは巻き数が 0 であることを意味する。明らかに B の外側の点はすべて z と連結であるため、それらはすべて D_0 に所属していなければならない。

問題１１：問題１０から、D_1 の閉包がコンパクトであることがわかる。後はこれが多様体でその境界が X であることを示せばよいが、それには X の点での局所助変数

化を定義すれば事足りる。そこで、$x \in X$ とする。問題４、５などと同様に、x の $\mathbb{R}^n$ における近傍 U で、微分同相写像 g によって $\mathbb{R}^{n-1}$ の開球体 V に対応し、さらに $g(U \cap X) = V \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ となるものを取ってくる。問題５を解いたときと同様に、$\mathbb{R}^n \setminus X$ の任意の点は $U \setminus X$ 内の z_0 または z_1 と結ぶことができる。従ってこのうちどちらかは D_1 に所属している。一般性を失うことなく $z_1 \in D_1$ とし、$g(z_1)$ の第 n 座標が正であるときは $g|_{H^n}$ が、そうでないときは $-g|_{H^n}$ を取れば、それが局所微分同相写像である。証明終わり。

問題１２：これは明らかである。

２－６

問題１：念のために、巻き数の定義をもう一度書いておく。

$$u(x)=\frac{f(x)-z}{\|f(x)-z\|}$$

としたときの u の写像度が z のまわりの f の巻き数である。

さて、Borsuk-Ulam の定理が正しいと仮定する。このとき、f が S^k への写像であるとすれば、$z=0$ に対して上の u は f と等しい。したがって Borsuk-Ulam の定理からただちに f の写像度が 1 であることがわかる。

逆に、主張が正しいとしよう。このとき、対称性条件を満たすすべての f に対して、$z=0$ のときの u は対心点を対心点に写す。よって u の写像度、したがって f の巻き数は 1 になる。

問題２：g を第４節の問題８の写像とする。

$$f(\cos t,\sin t)=(\cos g(t),\sin g(t))$$

であるから、

$$(\cos g(t+\pi),\sin g(t+\pi))=f(-\cos t,-\sin t)=-f(\cos t,\sin t)=-(\cos g(t),\sin g(t))$$

となる。これはある奇数 $m(t)$ に対して $g(t+\pi)=g(t)+\pi m(t)$ を意味するが、m は連続であるから定数である。

そこで、$g(t+2\pi)=g(t+\pi)+\pi m=g(t)+2\pi m$ がわかる。これは $m=q$ を意味する。よって q は奇数でなければならない。第４節の問題８の (b) によって証明は完成する。