３－２

問題の前に、本文中にいくつかの考えるべき点があるので、それらを確かめておく。

まず、$I=[0,1]$ という空間を考え、滑らかな向き付けがされているとする。この空間では常に接空間は $\mathbb{R}$ と一致し、したがって接空間の向きは単に $+$ の向きか $-$ の向きかの区別しかない。0 の点での助変数化は $h:[0,a)\to[0,b)$ として取らざるを得ないから、$h'(0)>0$ でなければならない。したがって 0 の点では接空間は $+$ でなければならない。中間値の定理から、この h が向きを保つ助変数化であるとすれば $[0,b)$ までの任意の点の接空間は $+$ である。そこで、$T=\{t\in[0,1]|s\in[0,t]\to\mathrm{sgn}(T_s(I))=+1\}$ と定義する。T が開、閉、非空であることは簡単にわかるから、$T=I$ でなければならない。しかし 1 の点での助変数化は $[0,c)$ から $(d,1]$ への写像として取らざるを得ないから、1 の点での向きが $+$ であれば助変数化は向きは保ち得ない。これは矛盾である。結局、I は本文中のやり方では向き付け不可能ということになってしまう。

この問題は、H^1 という空間があまりにも融通が利かないという事実に依存している。そこで助変数化の定義を拡張し、$-H^k$ の開集合を定義域とする X の開集合への微分同相写像も助変数化と呼ぶことにする。$-H^k$ と H^k は微分同相であるから、この拡張によって境界のある多様体の定義はまったく変更されない。

これによって第 2 章のほとんどの結論はまったく同様に保たれる。ただし、外向き法線ベクトルの定義が変わる。第 2 章第 1 節の問題 7 で上半空間を定義したときには $dh_u(H^k)$ としたが、今回は h の定義域が H^1 に所属するか、$-H^1$ に所属するかに応じて $dh_u(H^1)$ か $dh_u(-H^1)$ かを選択しなければならない。この上半空間の定義が助変数化の取り方に依らないことを示すのは極めて簡単であるから省略する。上半空間の定義がきちんとされていれば、外向き単位法線ベクトル場についての結論はそのまま成り立つことは明白である。

次に、この節で出たいくつかの結論が、上の拡張に対してもきちんと成り立っているかどうかを確認しなければならない。最初に記号の準備として、A が線形空間 V と W の線形同型写像、$\alpha=(v_1,...,v_k)$ が V の順序基底としたとき、$A(\alpha)=(Av_1,...,Av_k)$ という形で W 上の順序基底を表すと約束しておく。また、$\alpha\times 0$ という記号は $((v_1,0),...,(v_k,0))$ を表すと約束しておく。したがって α が V の順序基底であり、β が W の順序基底であるとき、$(\alpha\times 0,0\times\beta)$ は $V\times W$ の順序基底になる。

まず補題として、f が H^k の開集合あるいは $-H^k$ の開集合である U から H^k の開集合または $-H^k$ の開集合である V への微分同相写像であるとき、f が u の近くで向きを

保つことと df_u の行列式が正であることが同値であることを確かめる。まず根本的に、$\mathbb{R}^k$ から $\mathbb{R}^k$ への線形同型写像が標準的な向きに関して向きを保つことは、その写像を行列表現したときに行列式が正である、という事実と同値であることに注意しよう。実際、$\alpha = (e_1, ..., e_k)$ として $A\alpha = (v_1, ..., v_k)$ としたとき、$A\alpha$ が正の符号を持つというのは定義から単に $\det(v_1, ..., v_k) > 0$ という意味に過ぎない。

さて、補題の証明に移る。条件を満たす f について $df_{f(u)}^{-1} \circ df_u = I$ であるから、df_u が正則であることは直ちにわかる。上で書いたように行列式が正であることは df_u が u の点で向きを保つことと同値であるが、行列式の連続性から主張の結果を得る。

また、さらにひとつ補題を付け加える。まず、V は線形空間とする。T は V 上の線形な自己同型写像であるとし、$\mathbb{R}^k$ から V への線形同型写像 A を任意に取る。ここで T の行列式を、$A^{-1} \circ T \circ A$ の行列式として定義する。この定義が A の取り方に依らないことを示すために、B を同じ条件を満たす写像とする。計算すると、

$$B^{-1} \circ T \circ B = (B^{-1} \circ A) \circ (A^{-1} \circ T \circ A) \circ (A^{-1} \circ B)$$

であるから、行列式は同じであることがわかった。したがって行列式は矛盾なく定義されている。特に、T が向きを保つのは T の行列式が正のとき、またそのときに限る。

次に X が向き付け可能かつ連結であるとき、X にふたつの向きが存在することを確認する。助変数化 h が滑らかに向きを固定するなら h の定義域の最初の座標をひっくり返したものは滑らかに向きを逆転させるはずであるから、最低でもふたつの向きが存在することはわかる。次に向きをふたつ取ってきて、そのふたつの向きが一致する点の集合と一致しない点の集合がともに開集合であることが示せれば、連結性によってそのうちのどちらかが空であることがわかり、証明が終わる。そこで $x \in X$ とし、h は第一の向きを、h' は第二の向きを保つ x のまわりの助変数化とする。一般性を失うことなく $h(u) = x = h'(u)$ としてよい。さらにおたがいの値域を共通部分に縮めることで、値域が一致すると仮定してよい。このとき、$h^{-1} \circ h'$ は微分同相写像であり、さきほど確認した事実からそれが u のまわりで向きを保つか逆にするかは単に $d(h^{-1} \circ h')_u$ の行列式の符号によってのみ決まる。$h' = h \circ h^{-1} \circ h'$ であるから、x の近傍でふたつの向きが一致するか逆転するかは単に $d(h^{-1} \circ h')_u$ の行列式のみに依存して定まることになる。これが主張を示していることは明らかである。

次に X と Y が有向であり、そのうち少なくともひとつに境界がないとき、$X \times Y$ への積の向きが代表基底 $\alpha = (v_1, ..., v_k)$ と $\beta = (w_1, ..., w_l)$ の取り方に依らない滑らか

な向き付けであることを確かめよう。まず代表基底に依らないことを確かめるために、$(x,y) \in X \times Y$ をひとつ取り、x のまわりの向きを保つ助変数化を φ、y のまわりの向きを保つ助変数化を ψ とする。$\varphi(u) = x, \psi(v) = y$ として、$\varphi \times \psi$ が (x,y) のまわりの助変数化になるのであった。ここで $v_i' = d\varphi_u(e_i)$、$w_i' = d\psi_v(e_i)$ と定義すればこれは各接空間の正に有向な基底である。そこで $(v_i', 0)$ と $(0, w_i')$ の基底が正になるように向きを導入しておく。すると $d(\varphi \times \psi)_{(u,v)}$ は向きを保つ。そこで、$\alpha = (v_1, ..., v_k)$ と $\beta = (w_1, ..., w_l)$ を取れば、$v_i = d\varphi_u(h_i)$、$w_i = d\psi_u(k_i)$ となる h_i と k_i を取ると、$(v_i, 0)$ と $(0, w_i)$ を合併した基底の向きは単に (h_i) の行列式と (k_i) の行列式の符号の積となり、それらは α の向きと β の向きの積に等しい。つまり、上の積の向きは $\varphi \times \psi$ が向きを保つように定義されているのである。ここから直ちに、積の向きが基底に依らない滑らかな向きであることがわかる。

次に境界の向きが特定の β に依存せず定まる滑らかな向き付けであることを確かめる。$x \in \partial X$ としよう。向きを保つ助変数化 h を取り、$h(u) = x$ とする。$\beta = (v_1, ..., v_{k-1})$ を順序基底としよう。このとき $dh_u(u_i) = v_i$ となる u_i が存在して、その第 k 座標は 0 に等しい。また外向き単位法線ベクトル n_x に対して、$dh_u(u_k) = n_x$ となる u_k の第 k 座標は、h の定義域が H^k であれば負であり、$-H^k$ であれば正である。余因子展開すれば、β の符号は単に (u_i) の最初の $k-1$ 行を取った行列の行列式の符号と、h の定義域、それから次元 k によってのみ定まる。特に $dh_u(e_i) = w_i$ とすればこの順序は h の定義域が正であれば $(-1)^k$、負であれば $(-1)^{k-1}$ である。

さて、f を $\mathbb{R}^{k-1}$ から $\mathbb{R}^k$ への標準的はめ込みとする。∂X の助変数化は $h \circ f$ で与えられるのであった。導関数に移行すれば、$d(h \circ f)_u(v) = dh_{(u,0)}(v, 0)$ であることがわかる。順序基底 β に対応する $\mathbb{R}^{k-1}$ の順序基底 (u_i) の符号は (u_i) の行列式の符号に等しいから、先ほどまでの推論と総合して、$h \circ f$ が向きを保つか逆にするかは単に h の定義域と k にのみ依存することがわかる。故に、境界の向きは特定の β の取り方に依らない。また、$h \circ f$ がある一点で向きを保つ場合には定義域の全体で向きを保つこと、およびその逆は、向きを保つか逆にするかが u の位置に依存していないことから明白である。したがって境界の向きは滑らかである。

$f : X \to Y$ を局所微分同相写像としたとき、助変数化を用いてユークリッド空間に引き戻せば、df_x が向きを保つか逆にするかは単に行列式の正負に帰着することがわかる。したがって f が x で向きを保つならば、x の近くで向きを保つことがわかる。次に f は微分同相写像とし、$U \subset X$ は連結とする。このとき f が $x \in U$ で向きを保つか逆にする

かに応じて、U 全体でも同じことが成り立つことを示せる。証明のために、$z \in U$ と、x と z をつなぐ弧 c を取る。関数 g は、$t \in [0,1]$ に対して $c(t)$ で f が向きを保つなら 1、逆にするなら -1 を返す関数とする。この段落前半の議論は g が局所的に定数であることを示すので、それは連続である。したがってその像は連結でなければならず、よって g は全体で定数である。ここからただちに主張したかった結果を得る。

さて、X はコンパクト有向一次元多様体とする。分類定理から、X は S^1 か I に微分同相な連結成分の有限和集合である。U は I と微分同相な X の連結成分であり、f は微分同相写像とする。このとき前段落の結論から f は全域で向きを保つか逆にする。したがって、境界点での向きはそれぞれ符号が異なり、したがってその和は 0 になる。ここから、境界のあるコンパクト有向一次元多様体の境界における向き数の和は 0 になることがわかる。

次に直和の向きが特定の順序基底の選び方に依存しないことを確かめる。α_1, β_1 は V_1 の基底、α_2, β_2 は V_2 の基底とする。また α_1 と α_2 は正に有向とする。ここで $A(e_1, ..., e_k) = \alpha_1$ となる線形写像 A、$B(e_1, ..., e_l) = \alpha_2$ となる線形写像 B を取る。A と B がそれぞれ向きを保つことは明らかである。さらに $\beta_1 = A(v_1, ..., v_k)$ かつ $\beta_2 = B(w_1, ..., w_l)$ とする。したがって、β_1 と β_2 の符号は (v_i) の行列式と (w_i) の行列式の積の符号に等しい。さて、$A \times B$ は $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ で定義され、積の向きと α_1, α_2 を基準とした直和の向きに関して向きを保つ。一方、$A \times B$ で引き戻した $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ における α から β への基底変換の行列は (v_i) を左上、(w_i) を右下に持ち、残りがすべて 0 になるから、α_1, α_2 を基準とした直和の向きに関する β の符号は (v_i) の行列式の符号と (w_i) の行列式の符号の積、つまり、β_1, β_2 を基準とした直和の向きに等しい。β_1, β_2 は任意であるから、これは直和の向きが基準とする順序基底の取り方に依存しないという事実を意味する。

後で示す問題２８を仮定して、今度は逆像の向きがきちんと定義された滑らかな向きであることを確認する。まず $x \in f^{-1}(Z)$ かつ $x \notin \partial X$ としよう。x のまわりの向きを保つ助変数化 φ を選び、$\varphi(u) = x$ とする。また、Y における $y = f(x)$ の近傍 V 上で定義され、$g^{-1}(0) = V \cap Z$ となるしずめこみ g を取る。φ の定義域 U を十分小さく取ることで、それは $\mathbb{R}^k$ の開集合であり、また $g \circ f \circ \varphi$ は全域で定義されていると仮定してよい。横断性の仮定から $g \circ f$ は x でしずめ込みである。

局所しずめ込み定理の証明を思い出すことから始めよう。値域 $\mathbb{R}^l$ の助変数化は恒等変換を考えればよい。$h = g \circ f \circ \varphi$ とすると dh_u は全射であるから、列基本変形によっ

て $(I_l|0)$ という行列に変えることができる。つまり、ある k 次の正則行列 A に対して、$dh_u \circ A = (I_l|0)$ となることがわかる。$W = A^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}^k$ の開集合であり、

$$G(a) = (h(Aa), a_{l+1}, ..., a_k)$$

は $w = A^{-1}u$ で導関数が単位行列となるような W から $\mathbb{R}^k$ への写像である。そこで W を十分小さく取れば、これは微分同相写像となる。このとき $h \circ A \circ G^{-1}$ は標準的しずめ込みであることがわかる。また、$\psi = \varphi \circ A \circ G^{-1}$ が W を定義域とする x のまわりの助変数化であることもわかる。h の定義から、$\psi((h \circ A \circ G^{-1})^{-1}(0)) = \psi(\{0\} \times \mathbb{R}^{k-l})$ は $\psi(W) \cap S$ と一致するので、$(0, v) = G(w)$ として、$\mathbb{R}^{k-l}$ における v の近傍で定義された写像 $\chi : v' \mapsto \psi(0, v')$ が S における x のまわりの助変数化になる。

さて、仮定から φ は向きを保つ助変数化である。また G は w において導関数が単位行列であるから、w の近傍で向きを保つ。よって G^{-1} も同じ条件を満たす。したがって ψ が向きを保つか逆にするかは単に A の行列式のみに依存して定まる。

そこで、いよいよ逆像の向きについて考えよう。$w_i = d\psi_{(0,v)}(e_i)$ とする。$i > l$ のとき $w_i = d\chi_v(e_{i-l})$ である。また、H を $w_1, ..., w_l$ の張る空間としておく。このとき基底 $\beta = (w_{l+1}, ..., w_k)$ の符号が知りたい。Φ を y の Z における向きを保つ助変数化、Ψ を Y における向きを保つ助変数化とし、$v^i = d\Phi_{\Phi^{-1}(y)}(e_i)$ として、$\gamma = (v^i)$ という正の順序基底を取っておく。問題２８から、β の符号は A の行列式と $\alpha = (w_1, ..., w_l)$ の符号の積であり、α の符号は (α, γ) の符号に等しい。ところがこれは、

$$d\Psi_{\Psi^{-1}(y)}(\alpha, \gamma)$$

の行列式の符号に等しいので、v のある近傍上でこの符号は変動しない。したがって β の符号は v の十分近くでは一定である。これは χ が v の近傍で向きを保つか逆にするかが一定しているということであるから、逆像の向きは $S \setminus \partial S$ 上では滑らかであることが示されたことになる。

次に $x \in \partial S$ である場合を考える。まったく同じように、x のまわりの S の助変数化を特定することから始めなければならない。まず、g および φ は上と同じとし、$h = g \circ f \circ \varphi$ と置く。ただし、φ は向きを保つとは仮定せず、ただその定義域は H^k の連結開集合であると仮定する。ここから φ は向きを保つか逆にするかが一定であることがわかる。これは H^k の開集合上で定義されたしずめ込みである。次に $\tilde{h}$ を h の u のまわりの局所的に何度でも微分可能な拡張としよう。$d\tilde{h}_u = dh_u$ なので $\tilde{h}$ も u でしずめ込みである。そこで上で取った A と G の組について、まったく同じように $\tilde{h} \circ A \circ G^{-1}$ は標準的しずめ込みになる。このとき v に対して $(A \circ G^{-1})(0, v)$ を与える写像は $T = \tilde{h}^{-1}(0)$ において u のまわりの助変数化になっている。

次に、π を最後の座標関数として、$h^{-1}(0) = \{t \in T|\pi(t) \geq 0\}$ の助変数化を具体的に表示したい。すでに第 2 章第 1 節で、0 が π の正則値であることは示しているから、$\rho = \pi \circ A \circ G^{-1}$ も同じ条件を満たす。つまり、$d\rho_v$ は全射でなければならない。したがって、ある行列 B が存在して、$d\rho_v \circ B = (0, ..., 0, 1)$ である。そこで、

$$H(a) = (a_1, ..., a_{k-l-1}, \rho(Ba))$$

の導関数は I に等しく、逆関数定理によって局所的には微分同相写像である。このとき、$\rho \circ B \circ H^{-1}$ は最後の座標関数になる。その定義域と H^{k-l} の共通部分を W と置き、$A \circ G^{-1} \circ B \circ H^{-1}(w) = u$ となる w を取る。このとき W は w の H^{k-l} における開近傍である。さらに、取り方から $w' \in W$ ならば $A \circ G^{-1} \circ B \circ H^{-1} \in H^k$ であることもわかる。そこで、

$$\psi = \varphi \circ A \circ G^{-1} \circ B \circ H^{-1}|_W$$

と置けばこれが x のまわりの S の助変数化を与える。この写像が向きを保つかどうかは A と B の行列式の積の符号、そして φ が向きを保つか逆にするかにのみ依存する。

そこで先ほどとおなじように Φ, Ψ と α, β, γ を取る。まったく同じ議論によって、β の符号は A, B の行列式と $d\Psi_{\Psi^{-1}(y)}(\alpha, \gamma)$、そして φ にのみ依存している。これらは局所的には不変であるから、ψ が向きを保つか変えるかはやはり局所的に不変である。よって逆像の向きはやはり滑らかである。以上で証明が完全に完成した。

最後に、後に示す問題２７と２８を仮定して、本文中で示されている命題

$$\partial(f^{-1}(Z)) = (-1)^l(\partial f)^{-1}(Z)$$

を示そう。まず、前と同様に $f^{-1}(Z) = S$ とする。$\partial S \subset \partial X$ であるから $T_x(\partial S) \subset T_x(\partial X)$ がわかる。また、我々はすでに第 2 章第 1 節で S が多様体であることを示す際に、$T_x(S)$ が $T_x(\partial X)$ には含まれないということを示している。さらに、前の段落で見たとおり、x の S における助変数化はある関数 g と X における助変数化 φ を用いて $\varphi \circ g$ と表せるのであった。ここで φ は H^k の連結開集合 U で定義された助変数化であり、g は H^{k-l} の開集合から U への関数であって、$g(\partial H^{k-l}) = (\partial H^k \cap U)$ を満たす。そこで、$dg_w(H^{k-l}) \subset H^k$ が示せる。証明は背理法による。$v \in H^{k-l}$ とし、$dg_w(v)_k < 0$ を仮定する。このとき、g_k の v 方向への方向微分が負であるから、v 方向に単調減少であり、したがって十分小さな t に対して $g(w + tv) \notin H^k$ となるがこれは矛盾である。そこで特に、n_x を x における S の外向き単位法線ベクトルとすれば、n_x は X の外向きベクトル

でもある。したがって問題２７を用いれば、β を $T_x(\partial X)$ の基底としたとき、β の符号は (n_x, β) の符号に等しいことがわかる。

次に H を $T_x(\partial S)$ の $T_x(\partial X)$ における補空間としよう。$T_x(S)$ は $T_x(\partial X)$ に含まれないから、H は $T_x(S)$ の $T_x(X)$ における補空間でもある。$H \subset T_x(\partial X)$ であるから H 上で $df_x = d(\partial f)_x$ である。よって $df_x(H)$ への直和の向きと $d(\partial f)(H)$ への直和の向きは H におなじ向きを定義する。そこで γ を正の向きの H の基底としよう。

そこで α を $T_x(\partial S)$ の基底とすれば、S の境界の向きとしての α の符号は (n_x, α) の符号に等しいが、問題２８からそれは (γ, n_x, α) の符号に等しい。。一方、∂f による Z の逆像としての α の符号はやはり問題２８から (γ, α) に等しいのだが、それは (n_x, γ, α) の符号に等しい。(γ, n_x, α) と (n_x, γ, α) を取り替えるには基底の順序を単に $\dim H = l$ 個ずらせばよいので、行列式の性質を考えれば $(-1)^l$ 倍だけ異なる。以上で証明が完成した。

１：単に行列式の積公式を適用すれば推移律が示せる。後は自明である。

２：これらは行列式の性質に過ぎない。

４：問題２の (b) を繰り返し適用するだけである。

５：これは上ですでに示した。

６：$n_x = (0, ..., 0, -1)$ であることを勘案すれば明らかである。

７：少し一般的に確かめておきたいので、B^{k+1} の境界としての S^k の向きを最初に考えることにする。

$x \in S^k$ とし、$x_i \neq 0$ としよう。このとき、B^{k+1} のうち y_i の符号が x_i と同じであるようなものの全体を A とすれば、明らかに A は B^{k+1} の開集合である。ここで、

$$\Phi(y) = (y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_{k+1}, 1 - \|y\|)$$

として Φ を定義する。これは集合 $H = \{y \in \mathbb{R}^{k+1} | x_i y_i > 0\}$ 内で単射である。また導関数を計算すれば正則である。したがってそれは H から $\Phi(H)$ への微分同相写像である。

次に $\Phi(y) \in H^{k+1}$ とすれば $\|y\| \leq 1$ なので $y \in B^{k+1}$ であり、y_i の符号は H 上では x_i と等しいので、$y \in A$ がわかる。逆に $y \in A$ ならば $\Phi(y) \in H^{k+1}$ も明らかであろう。よってこれは $U = \Phi(A) = \Phi(H) \cap H^{k+1}$ を意味し、したがって U は H^{k+1} の開集合である。

Φ の U 上での逆写像を φ とする。具体的に φ を計算すると、

$$\varphi(z) = (z_1, ..., z_{i-1}, \frac{x_i}{|x_i|}\left((1-z_{k+1})^2 - \sum_{j \neq k+1} z_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, z_i, ..., z_k)$$

という形になる。この φ が A の助変数化となる。

さて、上の助変数化 φ を用いて $T_x(S^k)$ を計算してみよう。まず $u = \Phi(x)$ として、

$$d\varphi_u = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ -\frac{x_1}{x_i} & & -\frac{x_{i-1}}{x_i} & -\frac{x_{i+1}}{x_i} & & -\frac{x_{k+1}}{x_i} & -\frac{1}{x_i} \\ 0 & & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。この最初の k 列が張る空間が $T_x(S)$ である。見てすぐにわかる通り、x はこの空間と直交している。次に $d\varphi_u(v) = x$ とすると、$j < i$ ならば $v_j = x_j$、$i \leq j < k+1$ なら $v_j = x_{j+1}$ であるから、計算すれば $v_{k+1} = -1$ が示せる。したがって x が外向きの単位法線であることがわかった。

さて、$k = 2$ の場合にもどろう。i の値によって場合分けをする。

場合１：$i = 1$。

このとき $(-x_2, x_1, 0)$ と $(-x_3, 0, x_1)$ が $T_x(S^2)$ を張る。この向きを計算すれば、$x_1\|x\|^2$ の符号になる。よってもし $x_1 > 0$ ならこれが正に有向な基底である。$x_1 < 0$ ならば単に順序を逆にすればよい。

場合２：$i = 2$。

このとき $(x_2, -x_1, 0)$ と $(0, -x_3, x_2)$ が $T_x(S^2)$ を張る。向きを計算すれば、$-x_2\|x\|^2$ の符号になる。よって $x_2 < 0$ ならこれが正に有向な基底である。$x_2 > 0$ なら順序を逆にすればよい。

場合３：$i=3$。$(x_3,0,-x_1)$ と $(0,x_3,-x_2)$ が $T_x(S^2)$ を張る。この向きは、$x_3\|x\|^2$ の符号と等しい。つまり、もし $x_3>0$ ならこれが正に有向な基底である。$x_3<0$ なら順序を逆にすればよい。

８：この節最後の命題を用いてもよいが、ここでは逆像の向きを直接求めることを考えよう。これも問題７と同様に一般的な k から解く。まず、

$$g(x)=((1-t^2)^{\frac{1}{2}}x_1,...,(1-t^2)^{\frac{1}{2}}x_k,t)$$

とするとこれは S^{k-1} から $f^{-1}(t)$ への写像である。これが微分同相写像であることは明白であろう。これは線形写像 $x\mapsto((1-t^2)x,0)$ と平行移動の合成を S^{k-1} 上に制限したものであるから、当然、その導関数は同じ線形写像と等しい。したがって $f^{-1}(t)$ の $y=((1-t^2)^{\frac{1}{2}}x,t)$ における接空間は $T_x(S^{k-1})\times\{0\}$ に等しい。

さて、$y\in f^{-1}(t)$ としよう。$T_y(S^k)$ は問題７ですでに求めた。$y_i\neq0$ とすれば、$v=(0,...,0,-\frac{t}{y_i},0,...,0,1)\in T_y(S^k)$ である。f の導関数は同じ座標関数であるから、$df_y(v)=1$ である。問題２８によって、β が $T_x(S^{k-1})\times\{0\}$ の基底であるとき、β の f による逆像の向きは (v,β) の向きと等しい。

さて、ここで $k=2$ の場合にもどる。$x\in S^1$ のとき $T_x(S^1)$ は $(-x_2,x_1)$ によって張られる。よって $T_y(f^{-1}(t))$ は $w=(-x_2,x_1,0)$ によって張られる。以下、場合分けをして考えよう。

場合１：$x_1\neq0$。

このとき、$x_1v=(-t,0,x_1)$ である。$x_1>0$ のときは (w,x_1v) が正に有向であり、$x_1<0$ のときは逆であることを示した。よって (v,w) は常に負に有向であり、ゆえに w は負の向きである。

場合２：$x_2\neq0$。

このとき、$x_2v=(0,-t,x_2)$ である。(w,x_2v) は $x_2>0$ のとき正に有向であり、$x_2<0$ のときは負に有向であるから、やはり (v,w) は常に負に有向であり、w は負の向きである。

したがってどちらの場合も w は負の向きになる。以上で証明が完成した。

９：問題７の途中で、x における S^k の B^{k+1} 内における外向きの単位法線が x であるこ

とを示した。次に g を微分すれば $dg_x = 2x$ であることがわかる。したがって x の張る直線上で x は正に有向であり、これを用いて $T_x(S^k)$ の基底 β の向きを (x, β) の向きとして定めるのが逆像の向きである。これは B^{k+1} における S^k の境界の向きの定義とまったく同一である。

１０：$T_{(x,y)}$ は $v = (1, f'(x))$ によって張られるから、直交ベクトル $w = (f'(x), -1)$ の向きが v の向きになる。しかし $dF_{(x,y)}(w) = (f'(x))^2 + 1 > 0$ なのでこれは正である。

１１：ヒントにあるように v_1, v_2, n を取る。(n, v_1, v_2) は正に有向であるから、(v_1, v_2) の符号は n の符号と一致する。しかし $dF_{(x,y,z)}(n) > 0$ であるからこれは正である。

１２：一次元多様体の境界の向き数の和が 0 であることを示すときにすでに示した。

１３：Jordan-Brouwer の分離定理と第 2 章第 1 節の問題 8 を見れば、これが問題１８の特殊ケースに過ぎないことが分かる。

１４：自明。

１５：問題 4 から直ちに結論を得る。

１６：まず、$X \cap Z = S$ とする。$x \in S$ とすると、横断性の仮定から $T_x(X) + T_z(Z) = T_x(Y)$ である。ここで $X \cap Z$ としての S の向きは、$N_x(S; X) \oplus T_x(Z) = T_x(Y)$ によって向き付けした $N_x(S; X)$ の向きによって、$N_x(S; X) \oplus T_x(S) = T_x(X)$ を通じて表される。そこでこれについて正の向きを持つ $N_x(S; X)$ の順序基底 α を取ろう。同様に、$N_x(S; Z) \oplus T_x(X) = T_x(Y)$ から導出される $N_x(S; Z)$ の向きについての $N_x(S; Z)$ の正の順序基底 β を取る。ところで $T_x(Z) = N_x(S; Z) \oplus T_x(S)$ かつ $T_x(Y) = N_x(S; X) \oplus T_x(Z)$ であったから、$T_x(Y) = (N_x(S; X) \oplus N_x(S; Z)) \oplus T_x(S)$ である。γ を $Z \cap X$ としての S の向きについての $T_x(S)$ の正の順序基底とすると、(β, γ) は定義から $T_x(Z)$ の向きについて正で、したがって (α, β, γ) は $T_x(Y)$ の向きについて正

である。すると (β,α,γ) は $T_x(Y)$ の向きとしては $(-1)^{(\mathrm{codim}X)(\mathrm{codim}Z)}$ の符号を持つことになるが、$X\cap Z$ としての S の向きについての γ の符号は (β,α,γ) の符号と一致するので、結論が成り立たなければならない。

１８：(c)⇔(d) については第２章第３節の問題２０で示した。

次に (b)⇔(c) を示す。まず (b) を仮定する。このとき $(z,t)\in Z\times\mathbb{R}$ に対して、

$$\varphi(z,t)=(z,-t\vec{n}(z))$$

とすると、φ は $N(Z;Y)$ への滑らかな全単射になる。さらにその導関数は明らかに単射であり、同じ次元どうしのはめ込みであるから局所微分同相で、したがって微分同相写像である。逆写像を Φ と置けば (c) が示せたことになる。次に (c) を仮定する。このとき、写像

$$g(z)=(z,\vec{n}(z))=\Phi^{-1}(z,1)$$

は滑らかである。$\vec{n}(z)$ は g と標準的しずめ込みの合成だから滑らかであり、また $\|\vec{n}(z)\|\neq 0$ である。これが法線ベクトル場となる。

最後に (a)⇔(b) を示す。まず (a) を仮定する。φ を Z における y のまわりの向きを保つ助変数化、ψ を Y における y のまわりの向きを保つ助変数化とする。局所はめ込み定理によって ψ を変形して、$\psi^{-1}\circ\varphi$ が標準的はめ込みであるようにする。このとき ψ の定義域を十分小さくとれば、それは連結であるようにできる。ψ は微分同相写像なので、問題１２によってこれは全域で向きを保つか逆にする。そこで必要ならば定義域の最後の座標を -1 倍して、ψ は向きを保つと仮定してよい。

さて、$\psi(u)=\varphi(v)=y$ であるとする。ここで $v_i=d\varphi_v(e_i)$ とすればこれらは $T_y(Z)$ の基底であり、y について滑らかに動く。よって第２章の冒頭で示した補題３から、$\mathbb{R}^M$ から $T_y(Z)$ への射影を P_y としたとき、写像

$$\vec{n}:y\mapsto\frac{d\psi_u(e_k)-P_y(d\psi_u(e_k))}{\|d\psi_u(e_k)-P_y(d\psi_u(e_k))\|}$$

は y の近傍で滑らかな法線ベクトル場であることがわかる。$P_y(d\psi_u(e_k))\in T_y(Z)$ であるから、$\vec{n}(v)\in d\psi_u(H^k)$ もわかる。$d\psi_u(\partial H^k)=T_y(Z)$ だから、$-\vec{n}(v)\notin d\psi_u(H^k)$ もわかる。

問題は、これが φ と ψ の値域の共通部分でしか定義されていないということである。これを大域的に定義できれば (b) が示せたことになり、証明が終わる。そこで、Φ と Ψ

を上とおなじ条件を満たす y のまわりの助変数化として、$\Psi(w)=y$ かつ $w_i=d\Psi_w(e_i)$ とするとき、

$$\vec{n}(y)=\frac{w_k-P_y(w_k)}{\|w_k-P_y(w_k)\|}$$

であるとすれば、$\vec{n}$ の定義は特定の助変数化の取り方に依存しないことになるので、このような Φ と Ψ をひとつ選んで対応する $\vec{n}(y)$ を与える関数が矛盾なく定義され、これが滑らかな法線ベクトル場となる。ところで、Z の余次元は 1 であるから単位法線はふたつしか存在せず、したがって確かめるべきは、

１）$w_k\in d\psi_u(H^k)$ である。
２）$v\in d\psi_u(H^k)$ ならば、$\frac{v-P_y(v)}{\|v-P_y(v)\|}\in d\psi_u(H^k)$ である。

というふたつに帰着する。２）のほうは、$P_y(v)\in T_y(Z)$ であることに注意すれば明らかである。１）のほうを示すのだが、まず $w_k\notin T_y(Z)=d\psi_u(\partial H^k)$ に注意しておく。$d\psi_y^{-1}(w_k)=h$ としよう。このとき、基底 $e_1,...,e_{k-1},h$ の向きは h_k の符号と一致する。ψ は向きを保つから、h_k の符号が正であることを示すためには、$v_1,...,v_{k-1},w_k$ が正に有向であることを示せればよい。Ψ は向きを保つから、$d\Psi_y^{-1}(v_1),...,d\Psi_y^{-1}(v_{k-1}),e_k$ の行列式が正であればよいことがわかる。

さて、$w_1,...,w_{k-1}$ は $T_y(Z)$ の基底であるから、$i<k$ のとき、$v_i=a_{i1}w_1+...+a_{i,k-1}w_{k-1}$ となる a_i が存在する。両辺に $d\Phi_y^{-1}$ を作用させれば、

$$d\Phi_y^{-1}(v_i)=a_i$$

がわかる。このとき、$d\Psi_y^{-1}(v_i)=(a_i,0)$ である。したがって示すべき目標は行列 (a_i) の行列式が正であることである。しかし、$a_i=d\Phi_y^{-1}(d\varphi_v(e_i))$ であり、Φ と φ はともに向きを保つから、その主張は正しい。

次に (b) を仮定する。このとき、$T_y(Z)$ の基底 β に対し、β の向きを $(\vec{n}(y),\beta)$ の向きとして定める。これが滑らかであることを確かめよう。まず、φ は y のまわりの Z の助変数化とし、ψ は Y の助変数化として、$\psi(v)=\varphi(u)=y$ かつ $\psi^{-1}\circ\varphi$ は標準的しずめ込みとする。前と同様に一般性を失うことなく、ψ は向きを保つと仮定してよい。$\beta_w=(d\varphi_w(e_1),...,d\varphi_w(e_{k-1}))$ としたとき、β_w の符号が u の近くで一定であればよい。ところが $\psi^{-1}\circ\varphi$ が標準的しずめ込みであるから、この符号は $h_w=d\psi_{\varphi(w)}^{-1}(\vec{n}(\varphi(w)))$ の第 k 座標の符号に $(-1)^{k-1}$ を掛けたものに等しい。そこで、h_w の第 k 座標の符号が局所的に一定であればよいのだが、これは扱っている関数がそれぞれ滑らかであるから、明らかである。以上で証明が完成した。

１９：z のまわりの Z の向きを保つ助変数化 φ と Y の向きを保つ助変数化 ψ を取る。このとき、$v_k(y) = d\psi_y^{-1}(\vec{n}(y))$ は z のまわりで滑らかであり、また $v_i(y) = d\psi_y^{-1}(d\varphi_{\varphi^{-1}(y)}(e_i))$ も z のまわりで滑らかである。φ と ψ は向きを保つので、行列 $(v_k(y), v_1(y), ..., v_{k-1}(y))$ の行列式が z の近傍で正であれば、これを $d\psi_{\psi^{-1}(y)}$ で移すことによって、z の近傍上で $N_y(Z;Y)$ と $T_y(Z)$ の直和の向きと $T_y(Y)$ の向きは一致することがわかる。しかし行列式の連続性からこれは明らかである。次に y は Z において z とおなじ連結成分に含まれているとし、y と z を結ぶ弧を c とする。このとき t に対して $c(t)$ の点で上の直和の向きと全体の向きが一致するときに 1、そうでないときに -1 を返す関数を g と置けば、$g(1) = 1$ であり、また c は局所的に定数なので連続であり、したがって c は恒等的に 1 に等しい。よって z を含む連結成分全体でこれらの向きは一致することがわかる。

問題１８から、滑らかな法線ベクトル場 $\vec{n}$ の存在は言える。これは 0 にならないベクトル場であるから、必要ならば $\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ を代わりに用いることで、これが単位法線ベクトル場であると仮定してよい。次に、$z \in Z$ をひとつ取り、z を含む Z の連結成分を U と置く。このとき、$\vec{n}$ か $-\vec{n}$ のいずれかは U 上でふたつの向きを一致させる法線ベクトル場である。$\vec{n}$ のときには $h(z) = 1$、$-\vec{n}$ のときは $h(z) = -1$ とすれば、U は Z の開集合である（Z が多様体であるから、これは常に言える。）から h は滑らかである。そこで $\tilde{n} = h\vec{n}$ と置けば、これがふたつの向きを常に一致させる法線ベクトル場になる。$\tilde{n}$ の一意性は、z で向きを一致させる単位法線がひとつしかないことから自然にわかる。境界の向きについての主張は定義から明らかである。

２２：β は V の基底とする。β が正の基底であれば、$\beta \times 0, 0 \times \beta$ は正である。β が負の場合も同様である。

２３：おそらく正しくない主張である。たとえば $X = \{0, 1\}$ とする。$0, 1$ の向きをともに $+1$ とすれば $(0, 1) \in X \times X$ の積の向きは $+1$ だが、0 の向きと 1 の向きが異なれば $(0, 1)$ の積の向きは -1 になる。（X が連結だったりすれば話は変わるかもしれない。）

２４：Z が向き付け可能ならば、Z の任意の開部分集合 U も向き付け可能である。さて、第 1 章第 1 節の問題４ (b) から $\mathbb{R}^l$ と微分同相な Y の開集合 V が存在する。$X \times V$ は $X \times Y$ の開集合であるから、$X \times V$ が向き付け不可能であれば $X \times Y$ も向き付け不可

能である。ところがこれは $X\times\mathbb{R}^l$ に微分同相であるから、結局は $X\times\mathbb{R}^l$ が向き付け不可能であることを示せばよいことになる。

そこで、向き付け可能であったと仮定する。ここで $T_x(X)$ の向きを、

$$T_x(X)\times\{0\}\oplus\{0\}\times\mathbb{R}^l=T_x(X)\times\mathbb{R}^l$$

の定める直和の向きとして定義する。これが滑らかであることを示そう。まず φ を $x\in X$ における定義域 U が連結な助変数化とする。また、$\varphi(u)=x$ としよう。このとき、$(x,v)\in X\times\mathbb{R}^l$ のまわりの助変数化として $\Phi(z,w)=(\varphi(z),w)$ を選ぶ。これは $U\times\mathbb{R}^l$ を定義域とする微分同相写像であり、定義域は連結であるから、Φ が向きを変えるか一致させるかは定義域全体で不変である。そこで必要ならば φ の定義域の最初の座標を反転させることで、Φ が向きを保つ写像であるとすることができる。$(d\Phi_{(z,w)}(e_i))$ は正の向きであるが、$i\leq k$ なら $d\Phi_{(z,w)}(e_i)=(d\varphi_z(e_i),0)$ であり、$i>k$ なら $d\Phi_{(z,w)}(e_i)=(0,e_{i-k})$ であるから、φ は u の付近で向きを保つことがただちにわかる。したがって X は向き付け可能であり、仮定に矛盾する。以上で証明が完成した。

２５：$\varphi_x:U_x\to V_x$ を x のまわりの助変数化とし、その定義域 U_x は連結であると仮定する。さらに U_x の取り方を工夫して、U_x は φ_x の「本来の定義域」のコンパクト部分集合の内部とすることができる。次に $\Phi_x=\phi_x\times\varphi_x$ と定義する。第１章第８節の問題１３によって、$(V_x\times V_x)$ の局所有限な細分である Δ の開被覆 W_α が存在する。細分の定義から、W_α を値域に含む Φ_x が存在するので、それを $A_x=\Phi_x^{-1}(W_x)$ 上に制限したものを Φ_α と定義する。ここで $W=\cup_\alpha W_\alpha$ は Δ の開近傍である。W の点 (y,z) で、もし $(y,z)\in W_\alpha\cap W_\beta$ であれば必ず $d(\Phi_\alpha)^{-1}_{(y,z)}\circ d(\Phi_\beta)_{\Phi_\beta^{-1}(y,z)}$ が向きを保つ点の全体を V と置く。この V 上で、$d(\Phi_\alpha)_{\Phi_\alpha^{-1}(y,z)}$ が向きを保つように $T_y(X)\times T_z(X)$ の向きを付ければ、これは α の取り方に依らず矛盾なく定義され、しかも V 上で Φ_α は向きを保つ。後は、V が Δ の開近傍を含むことを示せばよい。

V が Δ を含むことは問題２２から明らかである。次に、U は (x,x) の近傍であり、U と交わる W_α を $W_1,...,W_n$ とする。(x,x) が W_i の閉包に含まれていなければ十分小さな U を取ることによって W_i をリストから排除できるので、最初から各 W_i は閉包に (x,x) を含むと仮定できる。また、(x,x) はどれかの W_i に所属しているので、番号をうまく取って $(x,x)\in W_1$ とする。

ここで、ある i に対して、$W_1\cap W_i$ に所属しかつ $d(\Phi_1)^{-1}_{(y_n,z_n)}\circ d(\Phi_i)_{\Phi_i^{-1}(y_n,z_n)}$ が向きを逆転させるような (x,x) に収束する (y_n,z_n) の存在を仮定する。$\varphi_i^{-1}(y_n)=$

$u_n, \varphi_i^{-1}(z_n) = v_n$ としよう。最初に U_i を取った取り方から、φ_i の「本来の定義域」は u_n, v_n を含むあるコンパクト集合を含む。そこで部分列を取って、u_n, v_n は共に φ_i の定義される点 u, v 収束すると仮定してよい。$\varphi(u_n)$ と $\varphi(v_n)$ は共に x に収束しているので $u = v = \varphi_i^{-1}(x)$ である。また符号の条件は $d(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_i)_{u_n}$ と $d(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_i)_{v_n}$ の符号が常に異なることを意味する。ところが u_n と v_n は同じ点に収束しているのだからこれは矛盾である。したがって、ある (x, x) の近傍上で $d(\Phi_1)^{-1}_{(y,z)} \circ d(\Phi_i)_{\Phi_i^{-1}(y,z)}$ は向きを保つ。これらの近傍をすべての i について共通部分を取れば、連鎖律を考えることによってその集合は V に所属する (x, x) の近傍であることがわかる。以上で証明が完成した。

２７：境界の向きが滑らかであることを確かめるために n_x の性質として要求したのは、$d\varphi_x^{-1}(n_x)$ の最後の座標の符号が外向きであるという事実だけである。したがって h_x がおなじ性質を満たせば明らかに同じ向きが定義される。

２８：H が $T_x(S)$ と補次元で横断的な線形空間とする。H から逆像の向きを定義できるのは明らかであるから、このふたつの逆像の向きが一致していることを確かめる必要がある。

まず β を $T_x(S)$ の（直交補空間を取った際の）正の向きを与える基底、γ を $T_y(Z)$ の正の向きを与える基底とする。β の H を使った際の向きが正であることを知りたい。まず、α を直交補空間の正に有向な基底とするとき、$(df_x(\alpha), \gamma)$ は正に有向であり、また (α, β) は正に有向である。次に (δ, β) が正に有向であるような H の基底 δ を取る。このとき $(df_x(\delta), \gamma)$ が正に有向であることを示すことが証明の目標である。

まず (α, β) を (δ, β) へ変換する作用素の行列表現が知りたい。これは、$(\alpha, \beta) = (v_1, ..., v_k)$、$\delta = (w_1, ..., w_l)$ として、$w_i = a_{i1}v_1 + ... + a_{ik}v_k$ だとすれば、$i \leq l$ ならば a_i を、$i > l$ ならば e_i を i 列目に持つ行列である。また $df_x(w_i) = a_{i1}df_x(v_1) + ... + a_{ik}df_x(v_k)$ である。しかし $df_x(T_x(S)) \subset T_z(Z)$ であることを考えれば、$a_{i,l+1}df_x(v_{l+1}) + ... + a_{ik}df_x(v_k) \in T_z(Z)$ がわかる。そこで、$(df_x(\alpha), \gamma)$ を $(df_x(\delta), \gamma)$ へ変換する作用素を行列で表現すると、最初の l 列の l 行目までには a_{ij} が並び、その後の列は e_i が並ぶことになる。したがってこのふたつの行列表現はまったく同じ行列式を持つ。前者は正であることを仮定してあるから、後者も正である。これで証明が完成した。

３－３

１：まず、定義域が連結で微分同相写像であるから、f は大域的に向きを保つか逆にすることには注意しておかなければならない。任意の $y \in Y$ は正則値であり、f は単射であるから、$\deg(f)$ は任意の x について df_x が向きを保つか逆にするかに応じて $+1$ か -1 でなければならない。

２：(a) 第 1 章ですでに一度計算したが、もう一度示す。北極で df_x を計算すればこれは $-I$ の制限に等しく、よって k が奇数であれば向きは逆転する。しかし外向き単位法線も逆転しているからこのとき df_x は向きを保つ写像であることがわかる。逆に k が偶数なら $-I$ によって向きは保たれ、したがって df_x は向きを逆転する。よって $\deg(f) = (-1)^{k+1}$ である。

(b) 必要であることは (a) からただちに分かる。十分であることは、第 1 章第 6 節の問題 7 を見るか、Hopf の写像度定理による。

(c) 第 1 章第 8 節の問題 7 と問題 8 そのままである。

(d)mod_2 写像度では $+1$ と -1 が区別できない。

３：このとき、$p(z)$ は半径 r の円盤上で 0 にならず、またこの円盤上で $p(z)/|p(z)|$ と $z^m/|z^m|$ はホモトープである。したがって $\frac{p(z)}{|p(z)|}$ は写像度 m を持ち、よって内部にひとつは根を持つ。

４：(a) このとき、

$$\frac{f(z)}{|f(z)|} = \frac{|z|}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|} = \frac{\bar{z}}{r}$$

である。この写像の導関数は $1/r$ 倍して y 軸を -1 倍する線形写像の制限であるから、$(1,0)$ の点で計算すれば、向きをひっくり返すことがわかる。よって写像度は -1 に等しい。

(b) そもそも $1/z$ は 0 で定義されていないから、根がないことで上の写像が全域に拡張できるとは言えない。

５：実数の半径 r の開球の端点の集合は連結でない。

６：$|t| \leq 1$ のとき S^1 上で $z^2 - te^{-|z|^2}$ は 0 にならない。そこで

$$\frac{z^2 - te^{-|z|^2}}{|z^2 - te^{-|z|^2}|}$$

はホモトピーであるから、$t = 1$ のときの写像度は 2 に等しい。したがってこの写像は B^2 上に拡張できない。これは分母が B^2 のどこかで 0 になることを意味する。

７：問題１０から、$m = 1$ のときのみ示せばよいことがわかる。が、これは問題４の (a) ですでに計算した。

８：第２章第４節の問題８の場合分けをもう一度見直して、それぞれの場合に数え合わせればよい。まず、

$$df_x(-x_2, x_1) = g'(t)(-f_2(x), f_1(x))$$

であるから、向きを逆転させるか一致させるかは単に $g'(t)$ の符号に依存しているということに注意する。次に $f(\cos s, \sin s)$ の値および g の値が同じ $s_{i_1}, ..., s_{i_k}$ に対して、j が奇数か偶数かに応じて $g'(s_{i_j})$ は入れ替わるのであったから、その水準の写像度に対する寄与分は偶数のときは 0 であり、奇数のときはちょうど $g'(s_{i_1})$ の符号と等しい。結局、$g'(t) > 0$ のときは合計すると $q+1$、$g'(t) < 0$ のときは合計すると $q-1$ になるので、後は $s_0 = t$ と $s_n = t + 2\pi q$ が円周上で重なるので、どちらかの寄与分を取り除いてやれば、どの場合にも写像度が q と一致することがわかる。

９：f_0 と f_1 の写像度が等しいと仮定する。このとき、対応する g_0, g_1 を取る。ここで $g_s = sg_1 + (1-s)g_0$ とすればこれはホモトピーであり、しかも $g_s(t + 2\pi) = g_s(t) + 2\pi q$ である。ここで

$$f_s(\cos t, \sin t) = (\cos g_s(t), \sin g_s(t))$$

と置く。これが矛盾なく定義された S^1 から S^1 への写像であり、(t, s) について滑らかであることは明白である。したがってこれが f_0 と f_1 のホモトピーになる。

１０：まず z を g の正則値とし、$W = g^{-1}(z) = \{y_1, ..., y_n\}$ とする。h は f とホモトー

プで W と横断的な写像とする。したがって W の各点は h の正則値である。また $g \circ h$ が $g \circ f$ とホモトープであることも明らかであろう。

したがって証明すべきは $g \circ h$ の写像度が g の写像度と h の写像度の積であるということである。そこで $h^{-1}(y_i) = \{x_i^1, ..., x_i^{m_i}\}$ としよう。このとき、

$$\deg(g \circ h) = \sum_i \mathrm{sgn}(dg_{y_i}) \sum_j \mathrm{sgn}(dh_{x_i^j})$$

である。一方、

$$\deg(h) = \sum_j \mathrm{sgn}(dh_{x_i^j})$$

であり（これは i に依存しない。）、また

$$\deg(g) = \sum_i \mathrm{sgn}(dg_{y_i})$$

であるから、両者は一致する。

１１：(f の値域は S^1 の誤りであろう。)

必要であることは明白なので、十分性だけ示す。

問題９から、f は定値写像 $g(x) = (1, 0)$ とホモトープである。ホモトピーを f_t とし、次に ρ を 0 と 1 の近くで定数である滑らかな $[0, 1]$ から $[0, 1]$ への写像で、$\rho(0) = 0$、$\rho(1) = 1$ とする。このとき、

$$h(z) = f_{\rho(2-2|z|)}(\frac{z}{|z|})$$

と置けばこれは $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1$ で定義された S^1 への f の拡張である。さらにこれは $|z| = \frac{1}{2}$ の近くではつねに $(1, 0)$ の点を取るので、$|z| < \frac{1}{2}$ のときには $h(z) = (1, 0)$ とすればこれが f の B^2 上への拡張となる。

１２：第２節の問題１５からただちに結果を得る。

１３：問題１４を仮定して議論する。

$Z = X \times Y$ とする。X の対角集合 Δ_x の包含写像 i_X とホモトープである Δ_x に横断的な写像 f と、Y の対角集合 Δ_y の包含写像 i_Y とホモトープである Δ_y に横断的な写像

g を取る。すると $\chi(X)=I(f,\Delta_x)$ であり、$\chi(Y)=I(g,\Delta_y)$ である。一方、$Z\times Z$ は取り替え写像

$$h(x,y,z,w)=(x,z,y,w)$$

によって $X\times X\times Y\times Y$ と微分同相であり、さらに $h(\Delta_z)=\Delta_x\times\Delta_y$ も言える。h は微分同相写像であり、また $f\times g$ は $h(\Delta_z)$ の包含写像 $i_X\times i_Y$ とホモトープである。したがって問題１４から、

$$I(\Delta_z,\Delta_z)=I(h^{-1}\circ(i_X\times i_Y)\circ h,h^{-1}(\Delta_x\times\Delta_y))=I((f\times g)\circ h,\Delta_x\times\Delta_y)$$

となる。定義から $(f\times g)\circ h(x,y,x,y)\in\Delta_x\times\Delta_y$ ならば $f(x,x)\in\Delta_x$、$g(y,y)\in\Delta_y$ であり、$(x,x)\in f^{-1}(\Delta_x)$ かつ $(y,y)\in g^{-1}(\Delta_y)$ ならば $(f\times g)\circ h(x,y,x,y)\in\Delta_x\times\Delta_y$ であるから、$((f\times g)\circ h)^{-1}(\Delta_x\times\Delta_y)=f^{-1}(\Delta_x)\times g^{-1}(\Delta_y)$ が言える。h は微分同相写像なので、$(f\times g)\circ h$ と $\Delta_x\times\Delta_y$ が横断的であることもすぐにわかる。

そこで、$(x,x)\in f^{-1}(\Delta_x)$ をひとつ固定し、$\alpha=((v_1,v_1),...,(v_k,v_k))$ を $T_{(x,x)}(\Delta_x)$ の正に有向な基底とする。また $(y,y)\in g^{-1}(\Delta_y)$ として、$\beta=((w_1,w_1),...,(w_l,w_l))$ を $T_{(y,y)}(\Delta_y)$ の正に有向な基底とする。次に $z=(x,y)$ とする。$\gamma=((v_1,0,v_1,0),...,(v_k,0,v_k,0),(0,w_1,0,w_1),...,(0,w_l,0,w_l))$ は $T_{(z,z)}(\Delta_z)$ の正に有向な基底である。$d(f\times g)_{(x,x,y,y)}\circ dh_{(z,z)}(\gamma)=(df_{(x,x)}(\alpha)\times 0,0\times dg_{(y,y)}(\beta))$ であるから、これと $(\alpha\times 0,0\times\beta)$ を加えてできた $T_{(x,x,y,y)}(X^2\times Y^2)$ の基底が正の向きか負の向きかに応じて (x,y) に $+1$ か -1 を付与し、それを (x,y) について足し合わせればよいことになる。ところがその符号は明らかに $df_{(x,x)}$ の符号と $dg_{(y,y)}$ の符号の積に一致する。x を固定して y について足し合わせ、次に x について足し合わせれば、求めたかった結果を得る。

問題１４：（X と Y は有向であるとあらかじめ仮定しておく）まず、g と $f^{-1}(Z)$ が交差理論にふさわしいというのは、

1) W はコンパクト、有向。
2) X は有向。
3) $f^{-1}(Z)$ は W に補次元な有向閉多様体。

という三つの条件が成り立つことを言う。一方、$f\circ g$ と Z が交差理論にふさわしいというのは、

a) W はコンパクト、有向。

b) Y は有向。
c) Z は W に補次元な有向閉多様体。

という条件が成り立つことを言う。1) と a) は完全に同じであり、2) と b) は仮定されている。そして c) が成り立てば、横断性の仮定から 3) が成り立つ。こうして $f \circ g$ と Z が交差理論にふさわしいならば、g と $f^{-1}(Z)$ もそうであることがわかった。

次に $f \circ g$ と Z が交差理論にふさわしいとする。g を $f^{-1}(Z)$ と横断的になるようにホモトピーで変えれば、$f \circ g$ も対応してホモトピーで変わり、また第1章第5節の問題7からこれは Z と横断的である。したがって、最初からこのような g であると仮定してよい。$(f \circ g)^{-1}(Z) = g^{-1}(f^{-1}(Z))$ であるから、後は逆像の各点 w で向きを確認すればよい。そこで $g(w) = x$、$f(x) = y$ としておく。

まず、$T_w(W)$、$T_x(f^{-1}(Z))$、$T_y(Z)$ のそれぞれ正に有向な基底 α, β, γ を取る。$dg_w(\alpha) = \delta$ としよう。もし (δ, β) が正に有向であったとすれば、δ が張る空間を H として第2節の問題28を適用し、$\eta = df_x(\delta)$ としたとき、(η, γ) も正に有向である。(δ, β) が負に有向であるときも、同様にして (η, γ) は負に有向になる。$\eta = d(f \circ g)_w(\alpha)$ であるから、これは w において dg_w が向きを保つかひっくり返すかが $d(f \circ g)_w$ が向きを保つかひっくり返すかと一致していることを意味する。以上で証明が完成した。

１５：$f^{-1}(Z) = \{x_1, ..., x_N\}$ とする。横断性は $x \in f^{-1}(Z)$ において $df_x T_x(X) + T_{f(x)}(Z) = T_{f(x)}(Y)$ であることを意味し、次元を考えれば、これは df_x が単射であることを意味する。したがって f は x_i のまわりではめ込みである。このとき、x_i の十分小さな近傍 U_i を取れば、f は U_i から Y の部分多様体 $V_i = f(U_i)$ への微分同相写像である。これは標準的はめ込みについては自明であり、そうでないものについては局所はめ込み定理から正しい。$f(X) \cap Z$ は有限集合であるから、十分小さく U_i を取っておけば、$V_i \cap Z = \{f(x_i)\}$ とすることができる。

ここで、f が U_i から V_i の写像として向きを保つように V_i を向き付けする。U_i は X の開集合なので、これはつまり α が $T_{x_i}(X)$ の正に有向な基底であったときに、$\beta = df_{x_i}(\alpha)$ を V_i の正に有向な基底とすると言っているのである。ところで γ を $T_{f(x_i)}(Z)$ の正に有向な基底としたとき、x_i における向きの数は、(β, γ) が $T_{f(x_i)}(Y)$ の正に有向な基底であるときに $+1$、負に有向な基底であるときに -1 となる。ところがこれは V_i と Z の交差数と等しい。したがって主張は正しい。

１６：ヒントの通りに計算すれば、Z の次元が偶数であるときに主張は正しい。奇数であるときは、左辺が 0 になるので、右辺も 0 であり、したがって主張は正しい。

１７：$\chi(X)$ は $Y = X \times X$ の対角集合 Z の自己交差数である。問題１６からそれは $Z \times Z$ と $Y \times Y$ の対角集合 Δ の交差数に等しい。そこで $\alpha = (v_1, ..., v_k)$ を X の x における接空間の基底としよう。このとき $w_i = (v_i, v_i)$ とすれば $\beta = (w_1, ..., w_k)$ が Z の (x, x) における接空間の基底であり、したがって $\gamma = (\beta \times 0, 0 \times \beta)$ は $Z \times Z$ の (x, x, x, x) における接空間の基底である。このとき α にどんな向きを入れようと、γ は正に有向であることに注意する。一方で、Y の (x, x) における接空間の基底としては $\delta = (\alpha \times 0, 0 \times \alpha)$ がある。これも α の向きに関係なく正に有向であり、したがって対角集合の基底としては $\varepsilon = ((v_1, 0, v_1, 0), ..., (v_k, 0, v_k, 0), (0, v_1, 0, v_1), ..., (0, v_k, 0, v_k))$ が正に有向である。最後に、$\zeta = ((v_1, 0, 0, 0), ..., (0, 0, 0, v_k))$ は $Y \times Y$ の基底であり、α の向きに関係なく、正に有向である。

容易にわかるように、(γ, ε) は $Y \times Y$ の基底とはならない。したがって修正の必要がある。f は $Z \times Z$ から $Y \times Y$ への包含写像 i とホモトープな Δ に横断的な写像とする。このとき、$(x, x, y, y) \in f^{-1}(\Delta)$ においての向きの数は、$(df_{(x,x,y,y)}(\gamma), \varepsilon)$ が正に有向なときに $+1$、負に有向なときに -1 である。しかしこれは $\gamma, \varepsilon, \zeta$ のどの向きも α の向きとは独立に求まるため、この向きの数も α の向きとは関係がない。したがってオイラー標数 $\chi(X)$ は α の向きに依存しない。

１８：まず、X が Z と横断的であるときを考えよう。このとき、$X \cap Z$ は有限集合であり、よって向き数 $I(X, Z)$ は問題なく通常のやり方で定義できる。この交差数が小さな変位で変わらないことを示すために、$i_t(x)$ は i_0 が X から Y への包含写像であるような $[0, 1] \times X$ から Y への写像とする。このとき第 1 章第 6 節の結果から、十分小さな $t > 0$ に対して i_t は Z と横断的な埋め込みであり、また $X_t = i_t(X)$ としたとき、$X_t \cap Z \in U$ が保たれる。そのような t をひとつ取り、$G(s, x) = i_{st}(x)$ と置くとこれは i_0 と i_t をつなぐホモトピーになる。この写像 G は Z に横断的であり、よって、その Z の逆像は一次元多様体である。後は通常の議論で、$I(X, Z)$ と $I(X_t, Z)$ の交差数は変わらないことがわかる。

これを一般の場合に拡張するときには、X から Y への包含写像 i に対して、横断性ホモトピー定理の証明で用いた F を作る。このとき第 1 章第 6 節の問題１１から、十分 $\|s\|$ が小さい場合に f_s は埋め込みである。またやはり十分 $\|s\|$ が小さければ $f_s(X) \cap Z \subset U$

である。サードの定理からそのような s で f_s が Z と横断的になるものが存在し、$X_s = f_s(X)$ として、$I(X_s, Z)$ を $I(X, Z)$ として定義できる。この場合、別の s' についての $I(X_{s'}, Z)$ は $I(X_s, Z)$ と変わらない。なぜなら、$\|(1-t)s' + ts\| \leq \max\{\|s'\|, \|s\|\}$ だから、$f_{(1-t)s'+ts}$ は埋め込みであり、かつ $X_{(1-t)s'+ts} \cap Z \subset U$ であり、よって先ほどと同じように通常の議論から $I(X_{s'}, Z) = I(X_s, Z)$ となるからである。このとき f_s は包含写像とホモトープであるから、先ほどと同じ条件を満たす i_t を取れば、そのような i_t は f_s とホモトープであり、よってやはり十分小さな t について $I(i_t(X), Z) = I(X, Z)$ が保たれる。以上で証明が完成した。

１９：Y の対角集合 Δ について、$Z \times Z \cap \Delta$ 上の点はすべて $Z \times Z$ の対角集合上の点である。第２節の問題２５から、$Z \times Z$ の対角集合の近傍 U 上での自然な向きが存在する。同様に、Δ の近傍 V 上での自然な向きが存在する。一般性を失うことなく、$V \cap Z \times Z = U$ を仮定してよい。したがって $V \cap Z \times Z, V \cap \Delta, V$ はすべて向き付け可能である。そこで問題１８から $I(Z \times Z, \Delta)$ が定義できるので、これを $I(Z, Z)$ として定義すればよい。Z の小さな変位で変わらないことは問題１８による。

２０：Euler 標数は対角集合の自己交差数なのでこれは問題１９の特殊ケースである。したがって微分同相不変量であることだけを証明すればよい。明らかに、証明は X が連結であるときだけに限って行えばよい（なぜなら、連結でないがコンパクトな多様体 X の連結成分は有限個の X の開集合であり、オイラー標数はそれらのオイラー標数の和に等しいからである）。そこで $f : X \to Y$ を微分同相写像としよう。すると $g(x, y) = (f(x), f(y))$ は $X \times X$ から $Y \times Y$ への微分同相写像である。$X \times X$ の対角集合 Δ_X と $Y \times Y$ の対角集合 Δ_Y は当然ながら $g(\Delta_X) = \Delta_Y$ という関係を満たすが、一方で第２節の問題２５から、Δ_X の近傍 U と Δ_Y の近傍 V に自然な向きを定められる。一般性を失うことなく U と V は連結で $g(U) = V$ と仮定してよい。このとき、g は向きを保つ：これは対角集合上では明らかであり、U は連結なので全体で向きを保つことになる。そこで問題１９でやったようにしてオイラー標数を計算すれば、明らかにこれは一致する。

3 − 4
1 ：順番を多少変える。

(a) 反転写像は向きを変えるので、E が向きを変えるときは、いったん反転写像と合成して作った F に定理を適用して F_t を持ってきて、ふたたび反転写像と合成して E_t を作ればよい。

(c)$(tE+(1-t))$ がホモトピーになる。

(d)E_t がどこかで同型でなくなったと仮定する。このとき $t\in(0,1)$ である。そこで、

$$tI+(1-t)E=(1-t)[E-\frac{-t}{1-t}I]$$

であるから、$\frac{-t}{1-t}$ は E の実固有値であるがこれは矛盾である。

(b)(e)$k=1$ のときはすでに示した。$k=2$ で複素固有値のみを持つ場合についてもすでに示してある。

次に、$k>1$ であり、E が実固有値を持つ場合を扱う。帰納法の仮定として、$k-1$ までは実固有値を持たない場合も含めて証明は終わっていると仮定する。このとき、実数 $a\neq 0$ に対して $Ev=av$ となる v が存在する。まず $a>0$ と仮定しよう。v を第一要素に含む $\mathbb{R}^k$ の基底を $v,v_2,...,v_k$ とし、行列 $V=(v,v_2,...,v_k)$ を考える。このとき、$F=V^{-1}EV$ と定義すれば、

$$F(e_1)=V^{-1}EV(e_1)=V^{-1}Ev=ae_1$$

となる。ただし e_i は第 i 単位ベクトルである。したがって F の行列表現の、二行目から下の一列目はすべて 0 である。帰納法の仮定から、F の二行二列目から下の行列には恒等変換へのホモトピーが存在する。そこで、F の第一行の一列目を $ta+(1-t)$ に置き換え、一行二列目以降を t 倍し、二行二列目から下には上で存在を示したホモトピーを適用したものを F_t と置けば、

$$E_t=\frac{a}{|a|}VF_tV^{-1}$$

は滑らかなホモトピーであり、行列式は常に 0 にならない。E_0 は I に等しいから、この場合はこれで証明が終わった。$a<0$ のときはおなじようにしてやれば、対角要素の最初のふたつが -1 で、残りがすべて 1 であるような行列を得る。このとき、以下の手順でホモトピーを構成する。まず、二行一列に t、一行二列に $-t$ を持つホモトピーを用いて、一

行目が $(-1,-1,0,...,0)$ で二行目が $(1,-1,0,...,0)$ となるようにする。次に対角線の -1 を $t-(1-t)$ で置き換えて一行目が $(1,-1,0,...,0)$ で二行目が $(1,1,0,...,0)$ であるようにする。最後に、対角要素以外の点を t 倍してやって変位させれば、恒等変換にたどり着く。このようなホモトピーで正則性が失われることがないことは行列式を計算すればただちにわかる。また、ホモトピーをつなげるためには単に第 1 章第 6 節の問題 1 で用いた ρ を繰り返し適用すればよい。

この時点で $k=2$ の場合は完了したことがわかる。最後に、$k>2$ で、E が複素固有値のみを持つ場合を考える。ふたたび帰納法によって、$k-1$ までは証明が終わったと仮定する。$Ev=cv$ となる v を取る。このとき、

$$c=a+bi$$

$$v=v_1+iv_2$$

とする。$\bar{c}=d, \bar{v}=w$ と置く。$Ev=cv$ の両辺の共役を取れば、E は実なので $Ew=dw$ である。$2v_1=v+w$、$2iv_2=v-w$ だから、

$$Ev_1=\frac{1}{2}E(v+w)=\mathrm{Re}(cv)=av_1-bv_2$$

$$Ev_2=\frac{1}{2i}E(v-w)=\mathrm{Im}(cv)=bv_1+av_2$$

が言えることに注意する。さて、v_1, v_2 を含む基底を取り、$V=(v_1,v_2,...,v_k)$ と置く。このとき $F=V^{-1}EV$ とすれば、先ほどと同様に、

$$F(e_1)=V^{-1}EV(e_1)=ae_1-be_2$$

$$F(e_2)=V^{-1}EV(e_2)=be_1+ae_2$$

である。さらに、

$$F(e_1+ie_2)=V^{-1}Ev=c(e_1+ie_2)$$

である。これは、行列

$$G=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

の固有値が c と d であることを意味する。したがって G は実固有値を持たないから、F の最初の二行二列を $tI+(1-t)G$ に変え、最初の二行の残りを t 倍し、さらに残りの行の 3 行目以降を帰納法の仮定によって存在が保証されるホモトピーで恒等写像に変えるようなホモトピーを F_t と置いて、

$$E_t=VF_tV^{-1}$$

が条件を満たす。以上で証明が完成した。

２：$A-I$ の核は線形空間であるから、孤立不動点が存在するのはそれが $\{0\}$ のときに限る。よって (a) と (b) は次元定理によって同値である。

$dA_0 = A$ なので、(b) と (c) が同値であることは明らかである。

上の推論から、(c) を仮定すれば 0 は唯一の不動点であることがわかる。よって (d) が出る。次に (d) を仮定する。0 は線形写像の自明な不動点であるから、(c) が成り立つ。

３：$A = df_x$ として問題２の (b) と (c) と (d) を見ればよい。(a) の条件は $A-I$ が正則だということであるから、これで示せる。

４：$f_0 = f$ となるホモトピー $F : I \times X \to X$ を用意する。また、$i_t(x) = (x, f_t(x))$ とする。このとき f_t が Lefschetz 写像であることは i_t が対角集合 Δ と横断的であることと同値である。したがって f が Lefschetz 写像であれば、安定性定理から十分小さな t に対して f_t も Lefschetz 写像である。

６：$f(x) = 2x$ ならば、$f - I = I$ なので、これは向きを保つ。

逆に $f(x) = x/2$ ならば、$f - I = -(1/2)I$ なので、向きを $(-1)^k$ 回逆転させる。

７：北極 $(0, ..., 0, 1)$ からの立体射影 $p : S^k \to \mathbb{R}^k$ を取り、

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x = (0, ..., 0, 1) \\ p^{-1}(p(x)/2) & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する。この f の不動点は $(0, ..., 0, 1)$ と $(0, ..., 0, -1)$ である。この写像が恒等写像とホモトープであることは非常に容易に示すことができるため、$\chi(S^k)$ は $L(f)$ と等しい。よって後は、北極の局所 Lefschetz 数が $+1$ であること、南極の局所 Lefschetz 数が $(-1)^k$ であることを示せば証明は完了する。

最初に南極から示そう。まず p^{-1} は南極のまわりの S^k の局所助変数化であることに注意する。したがって定義から、$L_{(0,...,0,-1)}(f) = L_0(p \circ f \circ p^{-1}) = L_0(x/2) = (-1)^k$ である。

次に北極を示す。このために、$q : S^k \to \mathbb{R}^k$ を南極 $(0, ..., 0, -1)$ からの立体射影とす

る。上と同様に $L_{(0,...,0,-1)}(f) = L_0(q \circ f \circ q^{-1})$ であるので、後は $q \circ f \circ q^{-1}$ がなんであるかがわかればよい。

ところで、第1章第1節の問題１３でやったように、

$$p(x) = \frac{1}{1 - x_{k+1}}(x_1, ..., x_k)$$

$$p^{-1}(y) = \frac{1}{\|y\|^2 + 1}(2y_1, ..., 2y_k, \|y\|^2 - 1)$$

である。同様にして、

$$q(x) = \frac{1}{1 + x_{k+1}}(x_1, ..., x_k)$$

$$q^{-1}(y) = \frac{1}{\|y\|^2 + 1}(2y_1, ..., 2y_k, 1 - \|y\|^2)$$

である。よって計算により、$y \neq 0$ のときには、

$$q \circ p^{-1}(y) = p \circ q^{-1}(y) = (\frac{y_1}{\|y\|^2}, ..., \frac{y_k}{\|y\|^2})$$

であることがわかる。したがって $y \neq 0$ ならば、

$$q \circ f \circ q^{-1}(y) = q \circ p^{-1}(p \circ q^{-1}(y)/2) = 2y$$

と計算できる。当然ながら $y = 0$ ならば $q \circ f \circ q^{-1}(y) = 0 = 2y$ である。よって $L_0(q \circ f \circ q^{-1}) = 1$ である。以上で証明が完成した。

８：f を X 上の恒等変換にホモトープな Lefschetz 写像、g を Y 上の恒等変換にホモトープな Lefschetz 写像とする。このとき $\chi(X) = L(f)$ であり、$\chi(Y) = L(g)$ である。一方で、$f \times g$ の導関数は $df_x \times dg_y$ であるため、(x, y) が $f \times g$ の不動点でかつ df_x と dg_y が固有値 1 を持たなければ、当然 $d(f \times g)_{(x,y)}$ も固有値 1 を持たない。故に、$f \times g$ は Lefschetz 写像であり、特に $L(f \times g) = L(f)L(g) = \chi(X)\chi(Y)$ である。しかし一方で $f \times g$ は $X \times Y$ 上の恒等変換とホモトープなので、$\chi(X \times Y) = L(f \times g)$ を得る。よって主張は正しい。

９：$\mathbb{R}^k$ は可縮であるから、すべての写像がホモトープである。特に写像 $y \mapsto y + b$ は $b \neq 0$ ならば不動点を持たないので、もし局所 Lefschetz 数の和がホモトピー不変量なら

ばすべての写像はその和が 0 にならなければならない。しかし $f(x)=2x$ はそうなっていない。

１０：(a)$f(z)-z=z^m$ であり、局所 Lefschetz 数はこの写像の原点を中心とした十分小さな半径の円での写像度なので、それは m である。

(b) 分裂命題の証明で、十分 $\|c\|$ が小さいときにこの写像が Lefschetz 不動点のみを持つことを示した。しかしこの写像の不動点は $z^m=-c$ を満たす点であり、これは明らかに m 個ある。

(c) これは $z \mapsto z+z^{-m}$ であるから、(a) と同じロジックで示せる。

3 − 5

1：問題を解く前に、本文中の命題の誤りを正しておかねばならない。命題では、f_0 が恒等変換であり、時刻零で $\vec{v}$ に接する、任意の t について原点が孤立不動点になるような族 $f_t(x)$ について、$t \neq 0$ のときに $L_0(f_t)$ と $\vec{v}$ の指数が等しいと主張されていた。しかし、実はこれは正しくない。というのも、証明中で $t < 0$ のときには正負が逆転する箇所があるためである。このため、$t < 0$ のときは $L_0(f_t)$ は $-\vec{v}$ の指数に等しい。ただし、次元が偶数のときは $\vec{v}$ の指数と $-\vec{v}$ の指数が一致するために、問題 1 と問題 2 においては不具合は生じない。

さて、h_t は $t = 1$ のときに恒等変換になる。$h_t(z)$ を t で微分すれば $z = \vec{v}(z)$ が出るので、h_t は任意の時刻で $\vec{v}$ に接する。$\vec{v}$ の指数は、S^1 上で $\frac{\vec{v}(z)}{\|\vec{v}(z)\|} = z$ であるから、1 である。一方 $t > 1$ のときには 0 は h_t の孤立不動点であり、S^1 上で

$$\frac{h_t(z) - z}{\|h_t(z) - z\|} = z$$

になるから、局所 Lefschetz 数は 1 になる。$t < 1$ のときには

$$\frac{h_t(z) - z}{\|h_t(z) - z\|} = -z$$

になるから、局所 Lefschetz 数はやはり 1 である。

2：$t = 0$ のときに $h_t(z)$ を t で微分すればたしかに $\vec{v}(z)$ になっているので、この写像は時刻零で $\vec{v}$ に接する。また、$t = 0$ のとき $h_0(z)$ は恒等変換である。$]0, 2\pi[$ 内の任意の t について、h_t は原点のみに不動点を持ち、その他の点には不動点を持たない。したがってこのような t について、命題は $\mathrm{ind}_0(\vec{v}) = L_0(h_t)$ を含意するはずである。そこで計算してみると、まず $\vec{v}$ の指数はふたたび S^1 上で計算すれば、これは単なる角度 $\frac{\pi}{2}$ の回転写像であるから、写像度は 1 に等しい。よって $\mathrm{ind}_0(\vec{v}) = 1$ である。一方、S^1 上で

$$\frac{h_t(z) - z}{\|h_t(z) - z\|} = h_{\frac{t+\pi}{2}}(z)$$

である（これは図を書けば明らかである）から、$L_0(h_t) = 1$ である。よって確かに命題の通りになる。

3：まず、$\varphi : U \to V$ は微分同相写像、ただし $\varphi(0) = x$ であり、U は $\mathbb{R}^N$ における 0 の近傍、V は $\mathbb{R}^N$ における x の近傍で、ただし $\varphi(u) \in X$ と u の最後の $N - k$ 座標が

0 であることが同値であるとする。このような微分同相写像は局所はめ込み定理によって存在することが示せる。このとき、ψ を $V = U \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ 上への φ の制限とすればこれは V から X における x の近傍への微分同相写像である。そこで $\vec{w} = \psi^* \vec{v}$ とすればこれは V 上で定義されたベクトル場である。V の接空間は常に $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ なので、$\vec{w}(u) \in (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ となる。よって $D\vec{w}_0$ は $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ の元を $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ に写す。ところで

$$\vec{v}(y) = D\psi_{\psi^{-1}(y)}\vec{w}(\psi^{-1}(y)) = D\varphi_{\psi^{-1}(y)}(\vec{w}(\psi^{-1}(y)), 0)$$

である。$\vec{w}(0) = 0$ であることを勘案してかけ算の微分の公式を適用すれば、

$$D\vec{v}_x = D\psi_0 D\vec{w}_0 D\psi_x^{-1}$$

となっている。$D\psi_x^{-1}$ が $T_x(X)$ から $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ への写像であること、および $D\psi_0$ が $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ から $T_x(X)$ への写像であることから、$D\vec{v}_x$ は $T_x(X)$ から $T_x(X)$ への写像であることを得る。以上で証明が完成した。

４：おそらく $I + td\vec{v}_x$ の書き間違いと思われる。なお、この主張は、$d\pi_x$ が $T_x(X)$ 上では恒等変換であることから明らかである。

５：これも、「$t > 0$ である」という条件をつけなければならない。このとき本文中にあるように、x が $\vec{v}$ の零点である必要十分条件は f_t の不動点であることである。次に $d(f_t)_x - I = td\vec{v}_x$ なので、$\vec{v}$ が x で非退化である必要十分条件は x が f_t の Lefschetz 不動点であることである。

Lefschetz 不動点が常に孤立していることは本文中では示されていないが、これは次のようにして示せる。まず x が f の Lefschetz 不動点であるとする。ここで、X の対角集合 Δ は (x, x) の近傍では、とあるしずめ込み φ の零点集合と一致する（第 1 章第 4 節の部分的な逆２）。そのときに $y \to (y, f(y))$ と φ の合成写像について 0 が正則値である、というのが、graph(f) と Δ が横断的である、というのと同値であるのは、第 1 章第 5 節で示したのと同じようにして証明できる。したがって graph(f) と Δ の交点は (x, x) の近傍では 0 次元の多様体であることになるが、これは x が孤立不動点であることを意味する。

したがって $\vec{v}$ の非退化零点も孤立している。後の主張は第 4 節の命題から導かれる。

６：(a)$f_{\vec{v}}$ が単射なはめ込みであることはほぼ自明であるので、固有であることだけを

チェックすればよい。しかしこれは、有界集合の逆像が自明に有界になることから明白である。

(b)$d\vec{v}_x$ のグラフに等しい。

(c) まず、$T_{(x,0)}(T(X)) = T_x(X) \times T_x(X)$ であることを指摘しておこう。これは、x のまわりの助変数化 φ を取って、$d\varphi : (u,v) \mapsto (\varphi(u), d\varphi_u(v))$ が $T(X)$ における $(x,0)$ のまわりの助変数化であったこと、したがって $d(d\varphi)_{(\varphi^{-1}(x),0)}$ の像が $T_{(x,0)}(T(X))$ であることに気がつけば明らかである。

そこで x が $\vec{v}$ の非退化零点だとすれば、任意の $(v,w) \in T_{(x,0)}(T(X))$ に対して $w = d\vec{v}_x z$ となる $z \in T_x(X)$ が存在する。このとき、$d\vec{v}_x$ のグラフには (z,w) が所属している。一方で $T_{(x,0)}(X_0)$ には $(v-z,0)$ が所属しているので、横断性の条件が満たされることになる。逆に非退化でないとすれば、同様の推論によって横断性の条件が満たされないことが確認できる。

(d) 問題 5 によれば、非退化零点 x については $\mathrm{ind}_x(\vec{v})$ は単に $d\vec{v}_x$ が向きを保つかひっくり返すかを反映しているにすぎない。そこで次に、$\alpha = (v_1,...,v_k)$ は X の正の向きの基底としよう。このとき $\beta = d\vec{v}_x\alpha = (w_1,...,w_k)$ はやはり基底である。このとき、$((v_1,0),...,(v_k,0))$ は $T_{(x,0)}(X_0)$ の正の向きの基底であり、$((v_1,w_1),...,(v_k,w_k))$ は $T_{(x,0)}(X_{\vec{v}})$ の正の向きの基底である。結合した基底 $((v_1,0),...,(v_k,0),(v_1,w_1),...,(v_k,w_k))$ は明らかに $(\alpha \times 0, 0 \times \beta)$ と同じ向きを持つが、その向きの数は β の符号に等しい。したがってそれは $\mathrm{ind}_x(\vec{v})$ に等しい。

7：問題 3 のときと同様に $\vec{w}$ を作れば、y が $\vec{v}$ の非退化零点であるための必要十分条件は、$\varphi^{-1}(y)$ が $\vec{w}$ の非退化零点であることである。したがって、一般性を失うことなく U は $\mathbb{R}^k$ の開集合であると仮定してよい。次にヒントにあるように ρ と $\vec{v}_1$ を作る。$\rho^{-1}(]0,1[)$ の閉包はコンパクトであり、したがってその上で $\|\vec{v}\|$ は正の最小値を持つ。故に $\vec{a}$ をその最小値よりもノルムの値が小さなベクトルとして取れば、主張どおり $\vec{v}_1$ が $\rho^{-1}(1)$ の内部でのみ零点を持つようにできる。さらに $-\vec{a}$ が $\vec{v}$ の正則値であるとき、$\vec{v}_1$ の零点で $\vec{v}_1$ は正則、したがって条件を満たす。しかし $\vec{v}$ は U から $\mathbb{R}^k$ への写像であったから、このような正則値は必ず存在する。

８：まず、X_0 の近傍から対角集合 Δ の近傍への微分同相写像で、$(x,0)$ に対して常に (x,x) を対応させる写像 f を取る。取り方をきっちり理解しておくために、第２章第３節でやった議論を思い出してみよう。最初に、写像 $(x,v)\mapsto(x,x,v,-v)$ を考えると、これは $T(X)$ から $N(\Delta;X\times X)$ への微分同相写像となる。この写像に、$(x,x,v,-v)\mapsto\pi(x+v,x-v)$ を合成すると、これが $T(X)$ における X_0 の近傍から $X\times X$ における Δ の近傍への微分同相写像となるのであった。ここで π は Δ^ε から Δ への最短距離写像であり、よって Δ 上で π は恒等写像であり、したがって $D\pi_{(x,x)}$ もまた $T_{(x,x)}(\Delta)$ の元を一切動かさない写像になる。よって求めている微分同相写像は $f(x,v)=\pi(x+v,x-v)$ という具体的な形で書けているはずである。しかし今回は若干工夫して、$f(x,v)=\pi(x-v,x+v)$ という逆の形を採用しよう。これが X_0 の近傍から Δ の近傍への微分同相写像になっていることを示すには、単に最初の $T(X)$ から $N(\Delta;X\times X)$ への写像を $(x,v)\mapsto(x,x,-v,v)$ という形に取り直しておくだけでよい。

さて、$Df_{(x,0)}$ を計算してみよう。$T(X)$ の $(x,0)$ における接空間はすでに述べたように $T_x(X)\times T_x(X)$ に等しく、これは Δ の (x,x) における接空間と等しいので、$Df_{(x,0)}$ は $T_x(X)\times T_x(X)$ 上の線形な自己同型写像である。さらに $Df_{(x,0)}(w,0)=(w,w)$ であり、$Df_{(x,0)}(0,w)=(-w,w)$ であることも、連鎖律を用いて示すことができる。これを用いてやると、$\alpha=((v_1,0),...,(v_k,0),(0,v_1),...,(0,v_k))$ という $T_x(X)\times T_x(X)$ の標準的な正の向きの基底に対して、$Df_{(x,0)}\alpha=((v_1,v_1),...,(v_k,v_k),(-v_1,v_1),...,(-v_k,v_k))$ であり、これは（通常のように容易な計算により）α と同じ向きに属することがわかる。つまり、f は自己同型写像であることに加え、X_0 上で向きを保つのである。そこで、この f を使って、$T(X)$ における X_0 の近傍に、f が向きを保つ写像になるように向きを定めよう。（$T(X)$ には向きが定まっていないことを思いだそう。したがって実は、$I(X_0,X_0)$ という問題文の記号も、本来ならばまだ定義されていなかったのである。いまの形で向きをきめたことで初めてあの記号には意味ができた。注意すべきは、たとえば $I(X_0,X_{\vec{v}})$ が定義できるとき、この交差数の計算で数える向きの数は問題６の (d) で計算したものと同一になっていることである）

さて、X_0 の包含写像 i と X_0 に横断的な $i_1:X_0\to T(X)$ をつなぐホモトピー $H(t,x)$ で、その値が常に f の定義域に含まれるものを取る。このようなものは必ず存在する：これは横断性ホモトピー定理の証明を繰り返せばよい。このとき $I(X_0,X_0)$ は $I(i_1,X_0)$ に等しいが、g を f^{-1} の Δ 上への制限とすれば、$h_1=f\circ i_1\circ g$ は $f\circ i_0\circ g$、つまり対角集合 Δ 上の恒等変換にホモトープである。よって $I(\Delta,\Delta)=I(h_1,\Delta)$ である。

後は $I(i_1,X_0)=I(h_1,\Delta)$ を示せれば証明が終わる。いま、$i_1(x,0)=(y,0)$ であるとしよう。このとき $h_1(x,x)=(y,y)$ である。逆に $h_1(x,x)=(y,y)$ であるとすれば、f^{-1}

を作用させることで $i_1(x,0)=(y,0)$ を得る。よって $i_1(x,0)\in X_0$ と $h_1(x,x)\in\Delta$ は同値である。

次に $i_1(x,0)=(y,0)$ としよう。i_1 は X_0 と横断的であるから、

$$D(i_1)_{(x,0)}T_{(x,0)}(X_0)+T_{(y,0)}(X_0)=T_{(y,0)}(T(X))$$

が成り立つ。ところで $T_{(x,0)}(X_0)=T_x(X)\times\{0\}$ および $T_{(y,0)}(X_0)=T_y(X)\times\{0\}$ であり、また $T_{(y,0)}(T(X))=T_y(X)\times T_y(X)$ である。そこで $\alpha=(v_1,...,v_k)$ を $T_x(X)$ の正の順序の基底とし、また $\beta=(w_1,...,w_k)$ を $T_y(X)$ の正の順序の基底としよう。このとき $(d(i_1)_{(x,0)}(\alpha\times 0),\beta\times 0)$ の向きが正であるか負であるかに応じて、この点における交差数への寄与がプラスかマイナスかが決まる。

さらに今度は、h_1 が Δ と横断的であることを示そう。このために、$\gamma=((v_1,v_1),...,(v_k,v_k))$ という $T_{(x,x)}(\Delta)$ の正の順序の基底を取る。すると $Dg_{(x,x)}\gamma=((v_1,0),...,(v_k,0))=\alpha\times 0$ である。一方で $T_{(y,y)}(\Delta)$ の正の順序の基底 $\delta=((w_1,w_1),...,(w_k,w_k))$ を取れば、$Df^{-1}_{(y,0)}\delta=((w_1,0),...,(w_k,0))=\beta\times 0$ となる。よって、h_1 が Δ と横断的であるという主張は、$(d(i_1)_{(x,0)}(\alpha\times 0),\beta\times 0)$ が $T_{(y,0)}(T(X))$ の基底であることと同値であり、これは上ですでに確かめられている。このとき、$Df_{(y,0)}$ が向きを保つため、$(D(h_1)_{(x,x)}\gamma,\delta)$ の向きが正であるか負であるかは $(d(i_1)_{(x,0)}(\alpha\times 0),\beta\times 0)$ の向きが正であるか負であるかと一致し、よってこの点における交差数の寄与がプラスかマイナスかも一致する。故に交差数も等しく、$I(i_1,X_0)=I(h_1,\Delta)$ を得る。以上で証明が完成した。

9：まず、$\vec{v}$ が非退化零点のみを持つ場合を考える。このとき、$f_{t\vec{v}}$ は滑らかなホモトピーであり、したがって $X_{\vec{v}}$ は X_0 に変位できる。さらに、$t>0$ のときに $\vec{v}$ の零点と $t\vec{v}$ の零点は同一であり、全部非退化で、さらに指数も同一である。よって証明すべきは $\chi(X)=I(X_0,X_0)=I(X_0,X_{t\vec{v}})$ が十分に小さな $t>0$ について成り立つことであるが、これは第3節の問題１８などでやったとおりであり、よってあとは問題6の (d) を使うことで Poincare-Hopf の定理の証明が終わる。

$\vec{v}$ が非退化零点以外を持つ場合は、問題7にあるような $\vec{v}_1$ を使って、$\vec{v}$ を非退化零点を持つベクトル場に変位させればよい。この変位によって指数の和が不変であることを示すのは通常のような議論でよい：いま U の、境界上で $\rho(z)=0$ となるようなコンパクト球 S を取り、$\vec{v}_1$ の零点を中心とした S の境界と重ならない球体 $S_1,...,S_l$ を取れば、$S-\cup_{i=1}^{l}S_i$ 上で $\vec{v}_1/\|\vec{v}_1\|$ の写像度は 0 に等しい。一方で S 上では $\vec{v}$ と $\vec{v}_1$ は一致するため、$\vec{v}_1/\|\vec{v}_1\|$ と $\vec{v}/\|\vec{v}\|$ の写像度、したがって v の零点の指数は等しくなる。故に $\vec{v}_1$ のこ

の領域での零点の指数の和は $\vec{v}$ の零点の指数に等しい。この操作を繰り返して $\vec{v}$ を非退化零点しか持たない $\vec{w}$ に変位させれば、$\vec{w}$ については Poincare-Hopf の定理が成り立っているので、$\vec{v}$ も同様である。

１０：リースの表現定理の特殊ケースにすぎない。

１１：$c(t) = x + tw$ と合成して微分すれば、$df_x w = d(f \circ c)_0$ となる。これと通常の微分法の公式から主張はただちに示される。

１２：おそらく正しくない。右辺の g_{ij} のところには、g_{ij} を第 (i,j) 要素として持つ行列 G の逆行列 H の第 (i,j) 要素 h_{ij} が入っているべきである。そのように修正して証明を行う。なお、逆行列があるという主張は問題１４のヒントの通りにすれば容易に示せるので、省略する。

さて、式の両辺に $d\varphi_u$ を作用させると、左辺は $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(\varphi(u))$ となり、右辺は

$$\sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i}(u) h_{ij}(u) d\varphi_u(e_j)$$

となる。問題１１の解法と同じようにして、$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(\varphi(u))$ の要件は、$w_l = d\varphi_u(e_l)$ に対して内積が $\frac{\partial f \circ \varphi}{\partial x_l}(u)$ となるような $T_x(X)$ のベクトルを与えることである。したがって、上の式がその条件を満たすことを確かめればよいが、実際に w_l を掛けてみると

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{k} h_{ij}(u) g_{jl}(u) = \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_l}$$

となって、主張が正しいことがわかる。（$T_x(X)$ のベクトルであることは、$d\varphi_u(e_j)$ の線形結合であることから明らか）

１３：$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = (\varphi^{-1})^*(\varphi^* \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f))$ なので、正しい。

１４：(a) これは 0 関数と零ベクトルが自然に対応することから明白である。

(b) まず、f の臨界点 x が非退化だというのは、$\varphi(u) = x$ となる助変数化 $\varphi : U \to X$ を

取ったときに、$f\circ\varphi$ の Hesse 行列が正則であることであった。そこでまず $f\circ\varphi$ の一回微分を計算すると、u のまわりでそれは

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)^T(\varphi(v))D\varphi_v$$

という行列表現を持っている。これの転置ベクトルの、$v=u$ における微分が Hesse 行列であるが、$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(\varphi(u))=0$ であることを考慮すれば、

$$D\varphi_u^T D\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_x D\varphi_u$$

という行列表現を持つことがわかる（行列表現として見るために、$D\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_x$ は、自然に x のまわりで $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ を拡張した滑らかな写像のヤコビアンと同一視していただきたい）。$D\varphi_u$ は $\mathbb{R}^k$ から $T_x(X)$ への全単射であり、$D\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_x$ は問題 3 でやったように $T_x(X)$ を $T_x(X)$ へ写し、容易にわかるように $D\varphi_u^T$ は $T_x(X)$ を $\mathbb{R}^k$ に全射に写す（これは $D\varphi_u^T$ の $k\times k$ の正則部分行列をうまく取り、その逆行列を左から掛けたものが全射であることを示せば容易に示せる）。よって f の臨界点 x が非退化であるという主張は、$D\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_x$ が $T_x(X)$ から $T_x(X)$ への全射であるという主張に等しい。これは x が $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ の非退化零点ということを意味する。以上で証明が完成した。

（以下、あまりにヒントガン無視なので別解）

$\varphi^*\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ の u における導関数を計算すると、やはり $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(\varphi(u))=0$ であることから、

$$D\varphi_u^{-1}D\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_x D\varphi_u$$

を持つ（ここでも、$D\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_x$ は $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ を x のまわりで拡張した滑らかな写像のヤコビアンと考えて欲しい。また、$D\varphi_u^{-1}$ も行列として表現するため、φ^{-1} の x の近くでの滑らかな拡張の x における導関数行列と同一視したい）。つまり、$\varphi^*\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ が u において非退化であるという条件は、$D\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_x$ が $T_x(X)$ を $T_x(X)$ に全射に写すことと同値である。故に、$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ が非退化だという主張は $\varphi^*\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ が非退化だという主張に還元される。

さて、問題１２でやった表現を行列的に書けば、

$$\varphi^*\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(v)=D(f\circ\varphi)_v H(v)$$

である。$D(f\circ\varphi)_u=0$ で、また $H(v)$ は対称なので、上の行列表現（正確に言えばその転置）の u における導関数は、

$$H(u)D^2(f\circ\varphi)_u$$

である。$H(u)$ は正則なので、$\varphi^*\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ が u を非退化零点として持つ必要十分条件は $D^2(f\circ\varphi)_u$ が正則であること、つまり x が f の非退化臨界点であることである。以上で証明が完成した。

１５：Morse 関数 f の勾配ベクトル場の零点はすべて非退化であり、非退化零点が孤立していることは上の問題５で示した通りである。

１６：まず、$\vec{v}$ を $\mathbb{R}^k$ 上のベクトル場で、u に非退化零点を持っているとしよう。$f_t(x)=x+t\vec{v}(x)$ とすれば $L_u(f_1)$ が $\vec{v}$ の u における指数と等しいが、これは第４節の命題から $D\vec{v}(u)$ の行列式の符号と一致する。よって、$\vec{v}$ の u における指数は単に $D\vec{v}(u)$ の行列式の符号に等しい。（問題６などでも使っている事実だが、復習のために示しておいた）

さて、本題に戻ろう。x が f の非退化臨界点であり、φ が $\varphi(u)=x$ となる助変数化のとき、問題１４の別解でやったように、$D^2(f\circ\varphi)_u$ の行列式の符号は（$H(u)$ が正定値、したがって行列式が正であることを考えれば）$\varphi^*\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ の u における導関数の符号、したがって $\varphi^*\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ の u における指数と等しい。よって定義により、それは $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ の x における指数とも等しい。

１７：おそらくなにかの書き間違いがあり、不動点が臨界点の間違いではないかと思われる。直せばこの結果は Poincare-Hopf の定理の系にすぎない。

１８：すでに問題９などで繰り返した議論にすぎない。

１９：そもそも式としての定義が写像度と変わらないので (a) も (b) も明白である。

３－６

１：第３章第４節の、局所 Lefschetz 数のふたつの定義が同一であることを示す命題の証明を変形して繰り返すだけであるが、念のために示しておく。

まず、$x = z = 0$ である場合に証明を行う。この場合、$A = df_0$ は正則である。Taylor の定理から、0 の近傍で

$$f(y) = Ay + \varepsilon(y)$$

と書ける。線形写像 A の S^{k-1} 上での最小値を c として、原点を中心とする球 B の半径 r を $\|\varepsilon(y)\| < \frac{cr}{4}$ が常に成り立つように取る（Taylor の定理から、これは r が十分小さければ常に成り立つ。）。このとき、

$$f_t(y) = Ay + t\varepsilon(y)$$

とすると、∂B 上で

$$\|f_t(y)\| \geq \|Ay\| - t\|\varepsilon(y)\| > \frac{3cr}{4} > 0$$

であるから、

$$u_t(y) = \frac{f_t(y)}{\|f_t(y)\|}$$

は ∂B から S^{k-1} への関数のホモトピーである。u_1 の写像度がいま計算している巻き数なのであるから、u_0 の写像度を計算すればよい。ところが

$$u_0 = \frac{Ay}{\|Ay\|}$$

であり、したがって第４節の問題１で証明した定理によって A を恒等変換または反転写像にホモトピーで変えることができる。恒等変換も反転写像もノルムを保つので、分母は r に等しくなる。そこで結局、A の行列式が正であれば u_0 は単なる $\frac{1}{r}$ 倍の拡大写像にホモトープであり、負であればその拡大写像と反転写像の合成にホモトープである。それらの写像度が行列式の符号と一致することは明らかである。

x, z が一般の場合には、$g(y) = f(y+x) - z$ と定義する。このとき、前段の推論によって、0 を中心とする十分小さな球面 B 上に制限した g の 0 のまわりの巻き数は $dg_0 = df_x$ の行列式の符号に等しい。したがって $W(\partial f, z) = W(\partial g, 0)$ という主張が証明の目標になる。

さて、

$$v(y) = \frac{g(y)}{\|g(y)\|}$$

$$u(y) = \frac{f(y) - z}{\|f(y) - z\|}$$

と定義する。$W(\partial g, 0)$ は $\deg(v)$ に等しく、$W(\partial f, z)$ は $\deg(u)$ に等しい。ところが B 上で定義された $h : y \to y + x$ は B を x のまわりの球面 C に向きを保ったまま移し、さらに ∂B 上で $u \circ h = v$ であるから、これらふたつの写像度が一致するのは明白である。（不安ならば、第3節の問題１０を用いてやれば、$\deg(h) = 1$ だから $\deg(v) = \deg(u)$ であることがわかる。）以上で証明が完成した。

２：これも何度も示したことのある方法を用いるだけであるが、いちおう示しておく。

f は正則であるから $f^{-1}(z)$ は 0 次元多様体であり、B はコンパクトだからそれは有限集合である。そこで $f^{-1}(z) = \{x_1, ..., x_n\}$ と仮定する。B_i を x_i のまわりの十分小さい開球とする。B_i は問題 1 のような巻き数の計算ができる程度に小さい半径に取るのであるが、必要ならばさらに小さく取り、B_i が互いに素であるようにする。$B' = B \setminus \cup_i B_i$ 上で方向写像 u は定義されるから、その境界上で u の写像度は 0 に等しい。ところが、

$$\partial B' = \partial B - (\cup_i \partial B_i)$$

であるため、∂B における u の写像度は ∂B_i における写像度の和に等しいことがわかる。後は各 ∂B_i における u の写像度に対して問題 1 を適用すればよい。

３：（直接証明することはできなかったので、問題５、問題８、問題１０に用いて支障ない形に修正して証明する。ここでは、f が B とおなじ中心を持つもっと小さな半径の円 B' の外側全体で定義され、さらに $\partial B'$ 上で f が定値写像とホモトープであると仮定している。）

最初にひとつ補題を用意する。まず、ρ は 0 の近くで常に 0 であり、1 の近くで常に 1 であるような滑らかな $[0, 1]$ から $[0, 1]$ への写像とする。仮定から ρ は 1 より前に少なくとも一度、正の傾きで対角線とぶつからなければならない。そこでそのような正の点 t の下限を t^* と置き、関数 η を $t \leq t^*$ ならば $\eta(t) = \rho(t)$、$t > t^*$ なら $\eta(t) = t$ とする。この関数は t^* の点で滑らかでない可能性があるが、これは一次元多様体の分類定理の証明に用いた補題と同じやり方で修正し、滑らかであるようにする。こうして得られた η は 0 の近くで常に 0 であり、1 の近くでは恒等写像に等しい。平行移動を用いて適当に修正すれば、a の近くで常に a であり、b の近くでは恒等写像になるような $\eta : [a, b] \to [a, b]$ の存在が示せる。

次に、B' の中心が 0、半径が 1 であると仮定して話を進める。B の半径は r とし、f_t は $\partial f = f_1$ であり、f_0 が定値写像 $f_0(x) = y$ であるようなホモトピーであるとする。ここで、$\|x\| \leq 1$ ならば

$$g(x) = f_{\rho(\|x\|)}(\frac{x}{\|x\|})$$

$$g(0) = y$$

として、$1 < \|x\| \leq r$ ならば最初に存在を示した $\eta : [1, r] \to [1, r]$ を用いて

$$g(x) = f(\eta(\|x\|)x)$$

と置く。∂B の近くで g は元の f と一致するので滑らかである。0 の近くでは g は恒等的に 0 であるから、やはり滑らかである。

あとはこれが $\partial B' = S^{k-1}$ の近くでも滑らかであれば、この g はどの点でも滑らかで、B の外側では元の f と等しいから、この g が目的を満たす。しかし ρ と η は 1 の近くで常に 1 であるから、$\|x\|$ が十分 1 に近ければ、

$$g(x) = f(\frac{x}{\|x\|})$$

と書ける。右辺は $\mathbb{R}^k$ から S^{k-1} への射影と f の合成だから滑らかであり、よって左辺も滑らかである。以上で証明が完成した。

最後に、B' の半径が s で中心が z である場合は、$g(x) = f(sx + z)$ に上の命題を適用して拡張し、$f(x) = g(\frac{1}{s}(x - z))$ と置き直せばよい。

４：(この系は、ホモトピーが $\mathbb{R}^{\ell+1} \setminus \{0\}$ 上にしか値を持たないように取れるという主張を含まなければならない。でないと、問題５の帰納法に用いることができない。)

$f_t = \frac{f}{t+(1-t)\|f\|}$ と置けばこれがホモトピーとなるから、f と $f/\|f\|$ はホモトープである。しかし後者は定値写像にホモトープであるから、前者もホモトープである。

５：B' を原点を中心とした $f^{-1}(0)$ を内部に含む球体とし、それをさらに含む球体を B とする。問題２から、f は $\partial B'$ 上で 0 に対する巻き数 0 を持つことがわかる。よって帰納法の仮定から、$\partial B'$ 上で f は定値写像とホモトープである。したがって問題３によって、B の外側で f と等しい $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ が存在することになる。

6：$a, b \in S^k$ は f の正則値であると仮定する。したがって $A = f^{-1}(a) \cup f^{-1}(b)$ は有限集合である。イソトピー補題を A に適用すると、$x \in f^{-1}(a)$ ならば $h(x)$ の第 k 座標は正、$x \in f^{-1}(b)$ ならば $h(x)$ の第 k 座標は負、という条件を満たす S^k から S^k への微分同相写像が存在することがわかる。$V = \{x \in S^k | x_{k+1} > 0\}$ は $\mathbb{R}^{k-1}$ の単位球の内部と微分同相であるから、第 1 章第 1 節の問題 4 (a) によってそれは $\mathbb{R}^k$ と微分同相である。そこで $U = h^{-1}(V)$ は $\mathbb{R}^k$ と微分同相な $f^{-1}(a)$ の開近傍であり、$f^{-1}(b)$ を含まない。$\alpha : \mathbb{R}^k \to U$ を対応する微分同相写像とする。

次に、やはりイソトピー補題から a を $-b$ へ移し、b を動かさない微分同相写像 h' が存在する。$S^k \setminus \{b\}$ は立体射影によって $\mathbb{R}^k$ と微分同相であるから、これを h' で引き戻せば、a を 0 に対応させる微分同相写像 $\beta : \mathbb{R}^k \to S^k \setminus \{b\}$ が存在する。

写像 $f' = \beta^{-1} \circ f \circ \alpha$ は $\mathbb{R}^k$ から $\mathbb{R}^k$ への写像である。f の写像度は 0 であるから、a の逆像の各点で行列式の符号が逆転するか一致するかは足し合わせると 0 になる。α と β^{-1} は連結な集合を定義域とする微分同相写像だから、それらが向きを保つか逆転するかは全体で保たれており、したがって f' において 0 の逆像の点の行列式の符号を足し合わせれば 0 になることがわかる。問題 5 から、あるコンパクト集合の外側で f' と等しく、しかも 0 を像に持たない g' が存在する。$h_t = tf' + (1-t)g'$ とおけばこれはホモトピーである。このとき、U 上で

$$g_t = \beta \circ h_t \circ \alpha^{-1}$$

と置き、また U の外側では

$$g_t = f$$

と置く。g' の構成法から U の境界近くでは $g_t = f$ であるから、g_t はホモトピーである。よって $g = g_0$ と $f = g_1$ はホモトープであることがわかる。構成法から $g^{-1}(a) = \emptyset$ であるから、g の値域は $S^k \setminus \{a\}$ であると見なせる。$S^k \setminus \{a\}$ は立体射影によって $\mathbb{R}^k$ と微分同相である。第 1 章第 6 節の問題 5 から $\mathbb{R}^k$ は可縮であり、よって $S^k \setminus \{a\}$ も可縮である。したがって同問題 4 から、g は定値写像とホモトープであることがわかる。以上で証明が完成した。

7：$W \subset \mathbb{R}^N$ であるとする。ε-近傍定理を ∂W に適用して写像 π を取る。このとき、

$$F(x) = f(\pi(x))$$

とすればこれは ∂W の $\mathbb{R}^N$ における近傍 U 上で定義された滑らかな f の拡張である。∂W はコンパクトである（第 2 章第 1 節の問題 9 (a) を参照）から、$\mathbb{R}^N$ の位相で閉集合

である。したがって ∂W と U の外側の距離は正であり、その距離の半分以下の点をすべて集めてきた集合を V と置けば、V は ∂W のコンパクト近傍である。V の内部を U' とし、∂W と U' の補集合に滑らかな Urysohn の補題を適用して、∂W 上で 1、V の外側で 0 であるような ρ を得る。このとき

$$G(x) = \rho(x)F(x)$$

と定義すればこれは U 上で定義され、V の外側で 0 である関数である。そこで U の外側で $G(x) = 0$ と定義すれば、これは滑らかに定義された f の拡張になる。これを W 上に制限すれば証明が完成する。

８：拡張できるならば写像度 0 であることはすでに第３節で扱ったので、ここでは逆を示す。したがって、f の写像度は 0 であると仮定しておく。

まず $\mathrm{Int}(W)$ が連結であることを示す。このために、$w \in \mathrm{Int}(W)$ をひとつ取る。X を、$c(0) = w$ で、$c(1)$ 以外の弧の点がすべて $\mathrm{Int}(W)$ に所属しているような弧 c によって w と結べる W の点の全体としよう。これが開、閉、非空であれば $X = W$ であり、したがって $\mathrm{Int}(W)$ の点はすべて w と $\mathrm{Int}(W)$ 内の弧で結ばれるから、$\mathrm{Int}(W)$ は連結である。

非空性は $w \in X$ から明らかである。次に閉集合であることを示そう。x_n は x に収束する X の点列とする。$x \in \mathrm{Int}(W)$ であれば、$\mathbb{R}^k$ の開球と微分同相な x の座標近傍内に x_n が所属することになる。したがって x と x_n は ∂W を通らない弧で結ばれる。x_n と w をつなぐ弧と接続してやれば、$x \in X$ であることがわかる。次に $x \in \partial W$ のときには、同様に開球と H^k の共通部分に微分同相な座標近傍 V を取る。$x_n \in V$ となる x_n を取ろう。ここで $c^{-1}(x_n) \subset c^{-1}(V)$ で、$c^{-1}(x_n)$ は閉、$c^{-1}(V)$ は開、$[0, 1]$ は連結であるから、$t \in c^{-1}(V) \setminus c^{-1}(x_n)$ が存在することがわかる。$c(1) = x_n$ であるから $t \neq 1$ であり、したがって $z = c(t) \in X \cap \mathrm{Int}(W)$ であることがわかる。z と x が ∂W を通らない弧で結ばれるのは V の作り方から明白であるから、あとはこれと z と w をつなぐ弧を接続すれば $x \in X$ がわかる。以上で、どちらの場合にも $x \in X$ が示され、よって X は閉であることがわかった。

最後に X が開であることを示す。$x \in X$ とする。$x \in \mathrm{Int}(W)$ のときには、十分小さく座標近傍を取れば連結でかつ ∂W を含まないようにできる。これらが X に所属するのは明白である。次に $x \in \partial W$ であると仮定する。やはり十分小さく座標近傍 V を取って、それが H^k と開球の共通部分と微分同相であるようにする。$x \in X$ であるから、x と w をつなぎ上の条件を満たす弧 c が存在する。前段落のときと同様の推論によって、ある $t \in c^{-1}(V) \setminus c^{-1}(x)$ が存在し、$z = c(t)$ とすれば $z \in \mathrm{Int}(W) \cap X$ となる。後は助変数

化の空間にもどり、z と V の各点を直線で結べば、これが z と座標近傍の各点を結ぶ弧になり、しかも $\mathrm{Int}(W)$ のみを通る。したがって X はこの座標近傍のすべての点を含む。ゆえに X は開集合である。以上で証明が完成した。

次に本題にもどり、f を問題 7 を用いて $F : W \to \mathbb{R}^{k+1}$ に拡張する。f は 0 を値域に持たないので $\{0\}$ と横断的であり、よって第 2 章第 3 節の拡張定理により、F は $\{0\}$ と横断的であると仮定してよい。すると逆像 $F^{-1}(0)$ は有限集合である。W の内部の点をひとつ取り、そのまわりの助変数化 φ を取る。第 1 章第 1 節の問題 4 (b) から、この φ の定義域は $\mathbb{R}^k$ であるとしてよい。値域を V として、イソトピー補題を $\mathrm{Int}(W)$ に適用して $F^{-1}(0)$ の点を V 内に移す微分同相写像 h を取り、$U = h^{-1}(V)$ と置けば、U は $\mathbb{R}^{k+1}$ と微分同相な $\mathrm{Int}(W)$ における $F^{-1}(0)$ の開近傍である。微分同相写像を $\alpha : \mathbb{R}^{k+1} \to U$ として、原点を中心として $\alpha^{-1}(F^{-1}(0))$ を内部に含む球体を B' と置く。$B = \alpha(B')$ としたとき、∂B 上で F は原点について巻き数 0 を持つことを示そう。実際、B の外側で F は 0 にならないから、

$$U = \frac{F}{\|F\|}$$

は $W \setminus \mathrm{Int}(B)$ 上で滑らかな写像であり、したがってその境界上で写像度 0 を持つ。これは ∂W 上での F の 0 に関する巻き数と ∂B 上でのそれが一致することを示しているが、∂W 上で $U = f$ であるから、巻き数は 0 になる。

第 3 章第 3 節の問題１０から、$\partial B'$ 上で $F' = F \circ \alpha$ は巻き数 0 を持つ。したがって特別な場合の系を利用して、$\partial B'$ 上で F' は定値写像にホモトープである。B'' を B' より大きな半径の球として問題 3 を用いれば、B'' の外側で F' に等しい $G' : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ が存在する。そこで F を U 内で

$$F(x) = G' \circ \alpha^{-1}$$

と定義しなおす。$\alpha(B'')$ の外側で F は旧来の定義と一致するから、これは滑らかに定義された f の拡張である。さらに

$$U = \frac{F}{\|F\|}$$

と置くとこれが値域が S^k であるような f の W 内への拡張になっている。

９：必要であることは明白なので、十分性だけを示す。

f_0 と f_1 が与えられたとして、その写像度が同じであるとする。f を $\{0\} \times X$ 上で f_0、$\{1\} \times X$ 上で f_1 と置く。それぞれに $I \times X$ からの境界の向きを入れれば、f の写像度は

0 になる。そこで拡張定理から f は大域的に $I \times X$ 上で定義された F が存在する。これは f_0 と f_1 がホモトープであることを意味する。

１０：問題 1 と問題 2 から、$\vec{v}$ の零点をすべて含む球体 B を取れば、∂B 内に制限した $\vec{v}$ の 0 に関する巻き数が 0 になることがわかる。よってこの $\vec{v}$ は ∂B 上で定値写像とホモトープである。そこで問題 3 から、もう少し大きな球体 B' の外側では $\vec{v}$ に等しく、零点を持たないベクトル場が存在することがわかる。

１１：$X \subset \mathbb{R}^N$ とし、$T(X)$ を接バンドルとする。次に P_x は $\mathbb{R}^N$ から $T_x(X)$ への射影とする。$T_x(X)$ の基底を助変数化 φ によって $v_i = d\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(e_i)$ と取ればこれは x について局所的に定義され、滑らかであるから、第 2 章の最初に証明した補題 3 を適用して関数 $\rho : (x, v) \mapsto (x, P_x(v))$ も滑らかであることがわかる。次に $(x, v) \in X \times \mathbb{R}^N$ とし、$P_x(v) = w$ としよう。このとき (x, w) における助変数化は、x における助変数化 φ を用いて $\psi(u, p) = d\varphi(u, p) = (\varphi(u), d\varphi_u(p))$ によって成されるのであった。そこで、$\varphi \times I$ を $X \times \mathbb{R}^N$ における (x, v) のまわりの助変数化とみなす。$U \times \mathbb{R}^N$ をその定義域として、

$$f(u, v) = \psi^{-1} \circ \rho \circ (\varphi \times I)$$

とする。f がしずめ込みであれば ρ もしずめ込みである。しかし f の導関数は

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & & & \\ \vdots & & \vdots & & d\varphi_x^{-1} \circ P_x & \\ * & \cdots & * & & & \end{pmatrix}$$

という形式になっている。これがしずめ込みであるのは明らかであろう。そこで、第 2 章第 3 節の横断性定理から、ある v について $\rho_v(x) = \rho(x, v)$ は $X \times \{0\}$ と横断的になる。次元を考えれば、これは ρ_v による $X \times \{0\}$ の逆像が有限個であることを意味する。そこで ρ_v の後のほうの座標を取ればそれが有限個しか零点を持たないベクトル場になっている。

１２：問題１１によって存在が保証される $\vec{v}$ を取る。イソトピー補題により、U 内の点を

$\vec{v}^{-1}(0)$ の各点に移す微分同相写像 $h : X \to X$ の存在が示せる。$h^*\vec{v}(x) = dh_{h(x)}^{-1}\vec{v}(h(x))$ と置けばこれは X 上のベクトル場であり、しかも U 内にのみ零点を持つ。

１３：第 1 章第 1 節の問題 4 により、X の座標近傍のなかで $\mathbb{R}^k$ と微分同相なものが取れる。それを U と置けば、問題１２から U 内にのみ零点を持つベクトル場 $\vec{v}$ が存在することがわかる。X の Euler 標数は 0 だから $\vec{v}$ の指数の和は 0 でなければならない。ここで $h : \mathbb{R}^k \to U$ は微分同相写像であるとすれば、

$$f(u) = dh_{h(u)}^{-1}\vec{v}(h(u))$$

は引き戻しベクトル場であり、その零点は $\vec{v}$ の零点の逆像に等しい。さらに指数は引き戻しによって不変であるから、f の指数の和は 0 である。したがってコンパクト集合の外側で f と等しく、零点を持たないベクトル場 g が存在する。このとき、

$$\vec{w}(x) = dh_{h^{-1}(x)}g(h^{-1}(x))$$

は U の境界付近で $\vec{v}$ に等しいベクトル場であり、したがってつなぎ合わせれば大域的に定義された零点を持たないベクトル場が出来る。以上で証明が完成した。

３－７

１：多角形は線を引くことで三角形の和に再分割でき、そのときに増える辺の数は面の数と一緒である。