４－２

１：このとき、ある v_i について

$$v_i = \sum_{j \neq i} c_j v_j$$

と書ける。多重線形性より、

$$T(v_1, ..., v_p) = \sum_{j \neq i} c_j T(v_1, ..., v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, ..., v_p)$$

である。ところが、交代性から

$$T(v_1, ..., v_j, ..., v_j, ..., v_p) = -T(v_1, ..., v_j, ..., v_j, ..., v_p)$$

であるから、これは 0 でなければならない。したがって $T(v_1, ..., v_p) = 0$ である。

２：外積は分配的でスカラー積を保つから、ある $i \neq j$ について $\phi_i = \phi_j$ であるときに主張が正しいことを確認するだけでよい。さらに結合法則から、結局証明すべきは $\phi_i \wedge \phi_i = 0$ だけである。しかし反可換性から $\phi_i \wedge \phi_i = -\phi_i \wedge \phi_i$ であり、よってこの両辺は 0 以外ではあり得ない。

３：$\phi_1, ..., \phi_k$ が線形従属であれば明らかに両辺は 0 になるから主張は正しい。次に $\phi_1, ..., \phi_k$ が線形独立であると仮定する。まず、右辺は明らかに交代テンソルであって、左辺は $\Lambda^k(V^*)$ の元であるから、右辺は左辺の定数倍である。そこでその定数が 1 であることを示せばよい。このためには、ある $v_1, ..., v_k$ について両辺の値が一致することを確かめればよいことがわかる。しかしこれは、$v_1, ..., v_k$ として $\phi_i(v_j) = \delta_i^j$ となるもの（δ_i^j はクロネッカーのデルタ）を取ればただちに正しいことがわかる。

４：これはヒントの通りでよい。

６：(a)A を基底 $(v_1, ..., v_k)$ から $(v'_1, ..., v'_k)$ への取り替え写像であると仮定する。このとき、

$$T(v'_1, ..., v'_k) = A^* T(v_1, ..., v_k) = (\det A) T(v_1, ..., v_k)$$

であるから、このふたつの符号は $\det A$ だけ異なる。

(b)$S=aT$ なら $S(v_1,...,v_k)=aT(v_1,...,v_k)$ であるから、明白。
(c)T を正に有向な元として $T(v_1,...,v_k)$ の符号を $(v_1,...,v_k)$ の符号とすればよい。

７：明らか。

８：$\det(I)=\det(A)\det(A^*)=\det(A)^2$。

９：(a) を仮定すれば、$Av_i\cdot Av_j=v_i\cdot v_j$ から (b) が成り立つ。
(b) を仮定する。$(v_1,...,v_k)$ は正規直交基底として、

$$Av_i=c_{1i}v_1+...+c_{ki}v_k$$

としよう。$(Av_1,...,Av_k)$ は正規直交基底であるから、内積を取れば

$$\|c_i\|^2=1$$

$$c_i\cdot c_j=0$$

がわかる。よって (c) が示せた。
(c) を仮定する。$(v_1,...,v_k)$ を V の正規直交基底としよう。$v=a_{11}v_1+...+a_{1k}v_k, w=a_{21}v_1+...+a_{2k}v_k$ とすれば、$C^*a_j=b_j$ として、$Av=b_{11}v_1+...+b_{1k}v_k, Aw=b_{21}v_1+...+b_{2k}v_k$ である。したがって

$$Av\cdot Aw=b_1\cdot b_2=C^*a_1\cdot C^*a_2=a_1\cdot a_2=v\cdot w$$

によって (a) が示せる。

１０：(a) まず、正に有向な正規直交基底 $(v_1,...,v_k)$ と非零な $T\in\Lambda^k(V^*)$ をひとつ取る。問題３から $T(v_1,...,v_k)\neq 0$ なので、必要ならばこれに適当な係数を乗じることで $T(v_1,...,v_k)=\frac{1}{k!}$ とすることができる。
つぎに $(w_1,...,w_k)$ はべつの正に有向な正規直交基底とし、A は $(v_1,...,v_k)$ から $(w_1,...,w_k)$ への取り替え写像であるとする。このとき、

$$T(w_1,...,w_k)=A^*T(v_1,...,v_k)=(\det A)T(v_1,...,v_k)=\frac{(\det A)}{k!}$$

であるが、問題８と９から $(\det A)$ は $+1$ か -1 である。さらに問題６ (a) から $(\det A) = 1$ がわかるので、$T(w_1, ..., w_k) = \frac{1}{k!}$ が示せた。

　一意性は $\dim \Lambda^k(V^*) = 1$ を考えれば自明である。

(b) 明らか。

１１：v_1, v_2 に対して、v_1, v_2 が一次従属なら 0 を、そうでないならば v_1, v_2 の符号に $0, v_1, v_2$ を三頂点として持つ平行四辺形の面積を掛けたものを返す写像を f とすれば、$f \in \Lambda^2(\mathbf{R}^{2*})$ であるから、それは T の定数倍である。e_1, e_2 を代入してやれば、定数が $\frac{1}{2}$ であることがわかる。

　$\mathbf{R}^3$ についても同様である。

１２：(a)Riesz の表現定理そのものである。

(b)$u \times v = -v \times u$ は T の交代性から自明。次に (v_1, v_2, v_3) は正に有向な正規直交基底であるとすれば、交代性と問題１０ (a) から

$$(v_i \times v_j) \cdot v_i = 0$$

$$(v_i \times v_j) \cdot v_k = 1$$

がわかる。この性質からただちに $v_i \times v_j = v_k$ が示せる。

4－4

本文中に若干気になる点がある。それは、

$$\int \omega = \sum_i \int \rho_i \omega$$

という定義をしたときの右辺の収束である。

ω の台がひとつの助変数化の像に含まれているときには、この右辺の収束は明らかである。これは実際、DCT の系に過ぎない。しかし ω の台が単にコンパクトであることしか仮定されていないとしたときに、この右辺が収束するのかどうか、本分では曖昧である。故にきっちりと確認しておきたい。

まず、ω の台を被覆する (U_α) と (V_β) というふたつの座標近傍の族について、これに従属する一の分割 (ρ_i) と (ρ'_j) を取る。このとき、$\rho_i\omega$ はひとつの座標近傍に台を持つ。したがって

$$\int \rho_i \omega = \sum_j \int \rho'_j \rho_i \omega$$

は上の推論から正しい。同じように、

$$\int \rho'_j \omega = \sum_i \int \rho_i \rho'_j \omega$$

も正しい。問題は、上の式の和、つまりたとえば最初の式の i についての和や次の式の j についての和が収束しない可能性があるか否かである。

まず、(U_α) が有限族であり、かつ U_α と微分同相な $\mathbb{R}^k$ の開近傍 W_α と助変数化 $\varphi : W_\alpha \to U_\alpha$ について、$\varphi^*\omega = f dx_1 \wedge ... \wedge dx_k$ としたときに f が有界である、という特殊ケースについて考えよう。このときは、U_α をひとつ固定して、その中に台を持つ ρ_i の i を集めた集合を I_α と置き、順番にやっていって $\mathbb{N}$ の分割 (I_α) を作っておく。このとき、$\nu = |f| dx_1 \wedge ... \wedge dx_k$ とすれば、$|f|$ が有界なので、

$$\sum_{i \in I_\alpha} \left| \int \varphi^* \rho_i \omega \right| < \infty$$

が言える。α が有限個しかないため、

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \left| \int \rho_i \omega \right| < \infty$$

であり、したがって級数

$$\sum_i \int \rho_i \omega$$

は絶対収束することがわかる。

これを踏まえると、少なくとも

$$\int \rho_i \omega = \sum_j \int \rho'_j \rho_i \omega$$

の両辺を i について加えることはできて、

$$\sum_i \int \rho_i \omega = \sum_i \sum_j \int \rho'_j \rho_i \omega$$

であることがわかる。さらに推論を繰り返すことで、右辺の収束も絶対収束であることが示せる。ということは $\mathbb{N}^2$ に数え上げ測度（1 点に 1 を置く測度）を入れた積分と見なして Fubini の定理を適用できて、上の足し算の i と j は取り替えられる。つまり、

$$\sum_i \sum_j \int \rho'_j \rho_i \omega = \sum_j \sum_i \int \rho_i \rho'_j \omega = \sum_j \int \rho'_j \omega$$

となる。したがって後者の級数も収束する。

あとはこのような都合のよい (U_α) が存在することを示すことだが、これは難しくないので省略する。以上で懸案は解決した。

１：これはむしろ定義と考えるべき主張である。

２：この場合、X 上の恒等変換を I と置いて、

$$\int_{-X} \omega = \int_X I^* \omega$$

であることに気が付けば、結局は以下の補題に帰着する。

補題：$f : Y \to X$ が向きを逆転させる微分同相写像であるとき、X 上のコンパクト台を持つ滑らかな $k-$ 形式 ω に対して

$$\int_X \omega = -\int_Y f^* \omega$$

が成り立つ。

証明：X と Y がユークリッド空間の開集合であるときは、主張は通常の変数変換定理からただちに導かれる。次に、ω の台がひとつの向きを保つ助変数化 $h : U \to X$ による座標近傍の内部に入っていると仮定する。$g : V \to U$ は第 k 座標に関する反転写像であるとすれば、

$$f^{-1} \circ h \circ g$$

は向きを保つ Y の助変数化であり、値域は $f^*\omega$ の台を含む。したがってこれらを用いて計算すると、

$$\begin{aligned}\int_X \omega &= \int_U h^*\omega \\ &= -\int_V g^*h^*\omega \\ &= -\int_V g^*h^*(f^{-1})^*f^*\omega \\ &= -\int_Y f^*\omega\end{aligned}$$

であるから主張は正しい。これを一般の場合に拡張するのは容易である。

３：$g = f \circ c$ と置けば $dg = c^*df$ だから、本質的にこの問題は新しい積分の定義が従来の閉区間上での積分の定義と一致することを確かめる問題である。自明と言ってもいい命題ではあるが、いちおう確認だけしておく。

そこで f は $[a, b]$ 上の関数と仮定し、形式 fdt の積分が通常の f の積分になることを確認する。まず、f が b の近くで恒等的に 0 であるとすれば、次の助変数化

$$h(x) = x + a$$

による $[0, b-a)$ の像に fdt の台が含まれる。したがってこのとき、

$$\int_{[a,b]} fdt = \int_0^{b-a} f \circ hdx$$

であるが、変数変換公式から

$$\int_0^{b-a} f \circ hdx = \int_a^b fdt$$

なので、主張は確かめられた。f が a の近くで恒等的に 0 の場合も同様である。

次に f が一般の場合を考えるのだが、このために助変数化

$$k(y) = y + b$$

と平行移動関数

$$l(x) = x + a - b$$

を考える。また、$0 < c < d < b - a$ とし、$\rho_1 : [a, b] \to [0, 1]$ は $[a, c]$ 内で 1、$[d, b]$ 内で 0 を満たす滑らかな関数、$\rho_2 = 1 - \rho_1$ とする。$(0, b - a)$ 内で $h = k \circ l$ であることに注意しておく。定義と通常の変数変換公式から、

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} f dt &= \int_{[0,b-a)} (\rho_1 \circ h)(f \circ h) dx + \int_{(a-b,0]} (\rho_2 \circ k)(f \circ k) dy \\
&= \int_{[0,b-a)} (\rho_1 \circ h)(f \circ h) dx + \int_{(0,b-a]} (\rho_2 \circ k \circ l)(f \circ k \circ l) dx \\
&= \int_0^d (\rho_1 \circ h)(f \circ h) dx + \int_c^{b-a} (\rho_2 \circ k \circ l)(f \circ k \circ l) dx \\
&= \int_0^c (f \circ h) dx + \int_c^d (\rho_1 \circ h + \rho_2 \circ h) f \circ h dx + \int_d^{b-a} (f \circ h) dx \\
&= \int_0^{b-a} (f \circ h) dx \\
&= \int_a^b f dt
\end{aligned}$$

となる。以上で証明が完成した。

４：（f が微分同相写像と仮定されていない点だけには注意が必要である。これは後々に再三使う。）

$(c \circ f)^* = f^* c^*$ である。$c^* \omega = g dt$ としたとき、G を g の原始関数とすれば、まず

$$\int_a^b c^* \omega = G(b) - G(a)$$

である。一方で、$f^* c^* \omega = g \circ f df = (g \circ f) f' dt$ であるが、$(g \circ f) f'$ の原始関数は $G \circ f$ なので、

$$\int_{a_1}^{b_1} (c \circ f)^* \omega = G(f(b_1)) - G(f(a_1))$$

となって主張は正しいことがわかる。

（なお、逆に $f(b_1)=a, f(a_1)=b$ であったときは、左辺は右辺の (-1) 倍になることに注意しておく。これは問題４の主張自体ではないが、後に用いる。）

５：$\omega=\sum_i f_i dx_i$ であり、かつ $c(t)=\gamma(\cos t,\sin t)$ のとき、$c^*\omega=\sum_i f_i\circ\gamma dc=\sum_i f_i\circ\gamma c_i' dt$ であり、また

$$\int \gamma^*\omega=\int_{-\pi}^{\pi} c^*\omega=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_i f_i c_i' dt$$

である。ここで最初の等号の証明はされていないが、問題６の計算と同様である。

６：（以下の問題で、$h(t)=(\cos t,\sin t)$ は定義を一々断らずに使用する場合がある。）h は $(\pi/2,2\pi]$ から S^1 への写像、および $[0,3\pi/2)$ から S^1 への写像として見たときに、助変数化としての役割を果たす（厳密には前者は平行移動と合成する必要がある）ので、$\rho_1:\mathbb{R}\to[0,1]$ を $[0,3\pi/4]$ 上で 1、$[5\pi/4,2\pi]$ 上で 0 になる滑らかな関数、$\rho_2=1-\rho_1$ として、

$$\int_{S^1}\omega=\int_0^{3\pi/2}\rho_1 h^*\omega+\int_{\pi/2}^{2\pi}\rho_2 h^*\omega=\int_0^{2\pi}h^*\omega$$

である。

７：

$$\oint_\gamma df=\int_{S^1}\gamma^* df=\int_0^{2\pi}(\gamma\circ h)^* df=\int_0^{2\pi}d(f\circ\gamma\circ h)$$

であるから、問題は周期 2π を持つ関数 g について

$$\int_0^{2\pi}dg=0$$

を示すことに帰着する。しかしこれは問題３から明らかである。

８：(a) 関数

$$f(x,y)=(rx,ry)$$

は S^1 から C への向きを保つ微分同相写像である。そこで、

$$\int_C\omega=\int_{S^1}f^*\omega=\int_{S^1}-ydx+xdy=\int_0^{2\pi}dt=2\pi$$

であることがわかる。

(b)$f(x,y) = \arctan(y/x)$ とすれば $\omega = df$ である。

(c) 問題 7 と (a) を比較すればわかる。

９：必要条件は問題 7 からわかるので、十分条件を示す。まず

$$g(t) = \int_0^t h^*\omega$$

とする。このとき、$f(h(t)) = g(t)$ として f を定義すればこの f は矛盾なく定義された S^1 上の滑らかな写像である。そこで連鎖律によって

$$df_{h(t)}h'(t) = g'(t)$$

である。$h^*\omega = kdt$ とすれば $g'(t) = k(t)$ であるから、あとは $k(t) = \omega(h(t))(h'(t))$ であることだけが示せればよい。しかしこの主張は $kdt = h^*\omega$ と同値であり、よって主張は正しい。

１０：積分が線形であることと問題 9 からわかる。

１１：$d : [0.1] \to X$ はおなじ条件を満たすもうひとつの関数とする。また ρ は $[0, \frac{1}{3}]$ 内で常に 0、$[\frac{2}{3}, \pi]$ 内で常に 1 であるような $[0, \pi]$ から $[0, 1]$ への滑らかな写像とする。ここで、

$$g(t) = \begin{cases} c(\rho(t)) & \text{if } t \leq \pi \\ d(1 - \rho(t - \pi)) & \text{if } t > \pi \end{cases}$$

とすれば、g は $[0, 2\pi]$ から X への写像である。次に自然な方法（つまり、$g(t+2\pi) = g(t)$ と定義すること）によって g は $\mathbf{R}$ を定義域とする周期関数と見なせる。このとき、

$f(h(t))=g(t)$ とする。すると問題 6 と問題 4 を用いることで、

$$\begin{aligned}0&=\oint_f \omega\\ &=\int_{S^1} f^*\omega\\ &=\int_0^{2\pi} g^*\omega\\ &=\int_0^{\pi} g^*\omega+\int_{\pi}^{2\pi} g^*\omega\\ &=\int_0^1 c^*\omega-\int_0^1 d^*\omega\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\int_0^1 c^*\omega=\int_0^1 d^*\omega$$

が示せた。

１２：多様体の連結成分は開集合であるから、一般性を失うことなく X は連結だと仮定してよい。そこで $p\in X$ を任意に取り、

$$f(x)=\int_p^x \omega$$

と定義する。我々の目標は、$df=\omega$ を示すことである。

まず、任意の $p'\in X$ について、$f(x)=f(p')+\int_{p'}^x\omega$ であることを示そう。このために、p から p' への曲線 c と p' から x への曲線 d を取る。また、ρ を $\frac{1}{2}$ の付近で常に 1 であり、$\rho(0)=0,\rho(1)=2$ を満たす滑らかな関数として、

$$h(t)=\begin{cases}c(\rho(t)) & \text{if } t\leq\frac{1}{2}\\ d(\rho(t)-1) & \text{otherwise}\end{cases}$$

とすればこれは p から x への曲線である。したがって

$$\int_p^x\omega=\int_0^1 h^*\omega=\int_0^1 c^*\omega+\int_0^1 d^*\omega=f(p')+\int_{p'}^x\omega$$

となって証明が終わる。

次に、$x\in X$ の近傍の向きを保つ助変数化 $\phi:V\to U$ をひとつ取る。ただし、V は凸集合であり、$\phi(u)=x$ であるとする。$g=f\circ\phi$ とすれば $df_x(h)=dg_u\circ d\phi_x^{-1}(h)=$

$(\phi^{-1})^* dg_u(h)$ であるから、示すべき目標は $\phi^*\omega = dg$ ということになる。そこで $v \in V$ を任意に取って $\phi(v) = y$、$c(t) = u + t(v-u)$、$d(t) = \phi(c(t))$ とすれば、

$$\int_u^v \phi^*\omega = \int_0^1 c^*\phi^*\omega = \int_0^1 d^*\omega = \int_x^y \omega = f(y) - f(x) = g(v) - g(u)$$

がわかるので、

$$\phi^*\omega(u)(v-u) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\int_u^{c(t)} \phi^*\omega}{t} = \frac{g(c(t)) - g(c(0))}{t} = dg_u(v-u)$$

となる。以上で証明が完成した。

１３：そのままの結果は出なかったが、本文中で定義されている関数 h で引き戻せば、$h^*dA = \|\vec{n}\| dx_1 \wedge dx_2$ を得る。（ここでの $\vec{n}$ は本文中のほうのもの。問題文の $\vec{n}$ は本文では $\vec{u}$ である）

１４：ヒントの通りのことは計算で確かめられる。次に、$\vec{F}$ の $\vec{n}$ 方向への射影は $(\vec{F}\cdot\vec{n})\vec{n}$ と書ける。したがって

$$\omega(x)(u,v) = \det(\vec{F}(x), u, v) = \det((\vec{F}(x)\cdot\vec{n}(x))\vec{n}(x), u, v) = (\vec{F}(x)\cdot\vec{n}(x))dA(u,v)$$

となって証明が終わる。

4－5

1：(a)$(2z-2)dx \wedge dy \wedge dz.$

(b)$yzdx \wedge dz + xzdy \wedge dz.$

(c)$df \wedge dg.$

(d)$6y^2 dx \wedge dy \wedge dz.$

2：回転が 0 であることは計算すれば明らかである。関数の勾配として書けないことは第 4 節の問題 8 (c) で示した。

４－６：

１：

$$(g\circ f)^\sharp([\omega]) = [(g\circ f)^*\omega] = [f^*g^*\omega] = f^\sharp[g^*\omega] = f^\sharp\circ g^\sharp([\omega])$$

からわかる。

２：同値関係が well-defined であるか否かに疑問を覚えたので、$H^0(X)$ を規定する同値関係は、自分自身とだけ同値というものだと定義しておく。このため、閉形式がどういうものであるかだけを考えればよい。しかし実数値関数 f については、多様体の連結成分が弧状連結であること、および平均値の定理から、$df\equiv 0$ はこれが任意の連結成分上で定数であるということを意味する（多様体の連結成分が開集合であることに注意）ことがわかる。よって f は連結成分ごとに値を割り振る形しかあり得ず、$H^0(X)$ の次元は連結成分の個数と一致する。

３：

$$d\Phi_{(t,x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & d\phi_x & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\Phi^*\omega(t,x) = \sum_I f_I(t,\phi(x))dt\wedge\Phi^*dx_I + \sum_J g_J(t,\phi(x))\Phi^*dx_J$$

となる。したがって積分と外積の線形性から

$$P\Phi^*\omega(t,x) = \sum_I \left(\int_0^t f_I(s,\phi(x))ds\right)\Phi^*dx_I = \Phi^*P\omega(t,x)$$

である。

４：$x\in X$ に対して助変数化 $\psi: U\to V$ を取ると、$\Psi = I\times\psi$ は $\mathbf{R}\times V$ の助変数化である。そこで、

$$P\omega(t,x) = (\Psi^{-1})^*P\Psi^*\omega(t,x)$$

と定義する。V が $\mathbf{R}^k$ の開集合であれば問題3によって明らかに P は元の定義と一致する。次に ϕ が条件を満たすもうひとつの関数であったとき、$\Phi = I \times \phi$ と置けば、

$$\begin{aligned}(\Psi^{-1})^* P\Psi^*\omega(t,x) &= (\Psi^{-1})^* P\Psi^*(\Phi^{-1})^*\Phi^*\omega \\ &= (\Psi^{-1})^* P(\Phi^{-1}\circ\Psi)^*\Phi^*\omega \\ &= (\Psi^{-1})^*(\Phi^{-1}\circ\Psi)^* P\Phi^*\omega \\ &= (\Psi^{-1})^*\Psi^*(\Phi^{-1})^* P\Phi^*\omega \\ &= (\Phi^{-1})^* P\Phi^*\omega\end{aligned}$$

である。これは $P\omega$ が助変数化の取り方に依存せずに定まる形式であることを意味する。

最後に、$\phi : Y \to X$ は微分同相写像であるとし、$\Phi = I \times \phi$ であるとする。ψ は x のまわりの助変数化とすると、$\phi^{-1}\circ\psi$ は $\phi^{-1}(x)$ のまわりの助変数化である。そこで $\Psi = I \times \psi$ と置く。このとき、$\Phi^{-1}\circ\Psi$ は助変数化になるから、

$$\begin{aligned}\Phi^* P\omega(t,x) &= \Phi^*(\Psi^{-1})^* P\Psi^*\omega(t,x) \\ &= ((\Phi^{-1}\circ\Psi)^{-1})^* P(\Phi^{-1}\circ\Psi)^*\Phi^*\omega(t,x) \\ &= P\Phi^*\omega\end{aligned}$$

となる。一意性については自明である。以上で証明が完成した。

５：($a = 0$ でないと証明できなかった。)

$d(i_a)_x(h) = (0,h)$ であり、$d\pi_{(t,x)} = \pi$ である。したがって、たとえば ω が $\mathbb{R}\times X$ 上の p-形式ならば

$$\pi^* i_a^*\omega(t,x)(s_1,v_1,...,s_p,v_p) = \omega(a,x)(0,v_1,...,0,v_p)$$

である。

まず、X が $\mathbf{R}^k$ の開集合であるときを考える。したがって

$$\omega(t,x) = \sum_I f_I(t,x)dt\wedge dx_I + \sum_J g_J(t,x)dx_J$$

と書ける。このとき、上の計算から

$$\omega(t,x) - \pi^* i_a^*\omega(t,x) = \sum_I f_I(t,x)dt\wedge dx_I + \sum_J (g_J(t,x) - g_J(a,x))dx_J$$

である。そこでこれらの各項が左辺の各項に対応していることを示せればよい。

まず dt のある項から考える。I をひとつ固定しよう。左辺のうち、$Pd\omega$ の項はこのような項を持たないから、左辺 $dP\omega$ の dt が出てくる項のみを計算すればよい。しかしこれは明らかに $f_I(t,x)dt \wedge dx_I$ になる。

次に dt のない項を考える。やはり J をひとつ固定しよう。$dx_J = dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_n}$ とする。このとき、$dP\omega$ に出てくる dx_J の係数は

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^t (-1)^{i-1} \frac{\partial f_{I_i}(s,x)}{\partial x_{j_i}} ds$$

となる。ただし I_i は J から j_i を取り除いた文字列である。次に $Pd\omega$ に出てくる dx_J の係数は

$$\int_0^t \frac{\partial g_J(s,x)}{\partial t} ds + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t (-1)^i \frac{\partial f_{I_i}(s,x)}{\partial x_{j_i}} ds$$

となる。よって同じ値の項を取り除いて、

$$\int_0^t \frac{\partial g_J(s,x)}{\partial t} ds = g_J(t,x) - g_J(0,x)$$

だけが残る。$a=0$ のときはこれで終わる。

一般の多様体の時、いつものように助変数化 ψ から $\Psi = I \times \psi$ を作り計算すると、

$$\begin{aligned} Pd\omega + dP\omega &= (\Psi^{-1})^*(Pd\Psi^*\omega - dP\Psi^*\omega) \\ &= (\Psi^{-1})^*(\Psi^*\omega - \pi^* i_0^* \Psi^*\omega) \\ &= \omega - (\Psi^{-1})^*\pi^* i_0^* \Psi^*\omega \end{aligned}$$

となる。右辺第二項を $(s_1, v_1, ..., s_p, v_p)$ について計算すれば、

$$\begin{aligned} &\omega(\Psi(i_0(\pi(\Psi^{-1}(t,x)))))(d(\Psi \circ i_0 \circ \pi \circ \Psi^{-1})_{(t,x)}(s_1, v_1), ..., d(\Psi \circ i_0 \circ \pi \circ \Psi^{-1})_{(t,x)}(s_p, v_p)) \\ &= \omega(0,x)(0, v_1, ..., 0, v_p) = \pi^* i_0^* \omega \end{aligned}$$

となる。故に証明は完成した。

6：($p > 0$ は仮定してあることを確認しておく。また、$a=0$ のときだけ示す。)

ヒントにあるように $i_a^\sharp \circ \pi^\sharp$ は恒等写像である。逆に $\pi^\sharp \circ i_a^\sharp$ については、$a=0$ であれば、ω が閉形式のときは問題 5 から

$$dP\omega = \omega - \pi^* i_0^* \omega$$

であり、したがって $[\omega] = \pi^\sharp i_0^\sharp[\omega]$ となることから、やはり恒等写像である。（$a \neq 0$ のときの証明がわからない）

迂回：問題５が $a = 0$ でないと証明できないのは P の定義に根本的問題があるように思える。そこで P を変形して作用素 P_a を作ろうと思う。X が $\mathbb{R}^k$ の部分集合であり、

$$\omega(t,x) = \sum_I f_I(t,x)dt \wedge dx_I + \sum_J g_J(t,x)dx_J$$

であるとき、

$$P_a\omega(t,x) = \sum_I \int_a^t f_I(s,x)dsdx_I$$

と定義する。この P_a の定義を一般の多様体 X に拡張するのは問題４と同様にでき、さらに公式

$$dP_a\omega + P_a d\omega = \omega - \pi^* i_a^* \omega$$

は問題５と同様に示せる。これを用いることで問題６の本来の主張が証明できる。

以上を前提として問題７に向かう。

７：まず $H : I \times X \to Y$ は f と g をつなぐ滑らかなホモトピーとする。このとき、一般性を失うことなく $H(\cdot, x)$ は $[0,a]$ 内および $[b,1]$ 内で定数であるように取ってよい。すると簡単に H は $\mathbb{R} \times X \to Y$ の写像に拡張できる。ここで $f = H \circ i_0$ かつ $g = H \circ i_1$ なので、$f^\sharp = i_0^\sharp H^\sharp$ かつ $g^\sharp = i_1^\sharp H^\sharp$ であるが、$i_0^\sharp = i_1^\sharp$ なので、結論を得る。

８：$f : X \to X$ を定値写像とすると、任意の p-形式 ω について $f^*\omega = 0$ となる。よって $\omega = I^*\omega$ は 0 と同値、したがって $[\omega] = 0$ である。

９：まず $U_1 \cap U_2$ は $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ と微分同相であり、この集合は

$$x \to (\|x\|, \frac{1}{\|x\|}x)$$

という写像により、$\mathbb{R}_{++} \times S^{k-1}$ と微分同相である。しかし $\mathbb{R}_{++}$ は $\mathbb{R}$ と微分同相（同相写像：$\log x$）なので、主張の結果を得る。

１０：まず、本文中の操作で p-形式 ω から U_i 上で $d\phi_i = \omega$ となる ϕ_i を取り、$\nu = \phi_1 - \phi_2$ と定義したとしてみよう。もし仮に同じように U_i 上で $d\psi_i = \omega$ だったとして、$\mu = \psi_1 - \psi_2$ と定義する。このとき、$\mu \neq \nu$ かもしれない。しかし実は、U_i 上では $d(\psi_i - \phi_i) = 0$ であり、よって $\psi_i - \phi_i$ は閉形式である。$p > 1$ により、$\psi_i - \phi_i$ は完全でなければならず、よってある ξ_i について $\psi_i - \phi_i = d\xi_i$ である。ということは $\mu - \nu = d(\xi_1 - \xi_2)$ ということになり、故に $[\mu] = [\nu]$ である。

また、$[\omega_1] = [\omega_2]$ であったとしよう。このとき、$\omega_1 - \omega_2 = d\rho$ となる形式 ρ が存在する。U_j 上で $d\phi_{ij} = \omega_i$ となる ϕ_{ij} を選び、$\nu_i = \phi_{i1} - \phi_{i2}$ と定義する。このとき、$\omega_1 - \omega_2$ は U_j 上で $d(\phi_{1j} - \phi_{2j}) = \omega_1 - \omega_2 = d\rho$ であるため、先ほどと同様のロジックから $[\phi_{1j} - \phi_{2j}] = [\rho]$ であることがわかり、故に j について引き算を取ることで $[\nu_1 - \nu_2] = [0]$、つまり $[\nu_1] = [\nu_2]$ を得る。こうして、$[\omega]$ から $[\nu]$ を対応させる写像はきちんと定義された一価関数であることがわかった。

逆に ν から ω を構成する写像を考えてみると、この ω について、先ほどの操作によりもう一度 $\mu = \psi_1 - \psi_2$ を構成すれば、それは $[\nu] = [\mu]$ を満たす。というのは、ψ_i として ϕ_i 自身が使えるからである。こうして、先ほどの写像は全射であることがわかる。

最後に、$[\nu_1] = [\nu_2]$ であると仮定して、対応して先ほどの操作で $[\omega_1]$ と $[\omega_2]$ を取る。作り方から、$\nu_1 = \phi_1 - \phi_2$ であり、$\nu_2 = \psi_1 - \psi_2$ であって、そして U_i 上では $\omega_1 = d\phi_i, \omega_2 = d\psi_i$ である。ここで $\nu_1 - \nu_2 = d\rho$ であるとすると、ϕ_i, ψ_i の作り方から $d\rho$ は北極の周辺では $\phi_1 - \psi_1$ と等しく、また南極の周辺では $\phi_2 - \psi_2$ と等しいため、$\nu_1 - \nu_2$ は $U_1 \cup U_2$ 上の形式 μ に拡張可能である。このとき明らかに $d\mu = \omega_1 - \omega_2$ であり、よって $[\omega_1] = [\omega_2]$ が言える。よって先ほどの写像は単射である。

全射かつ単射だからこの写像は全単射である。この写像の線形性は容易にわかるので、$H^p(U_1 \cup U_2)$ と $H^{p-1}(U_1 \cap U_2)$ は線形同型である。以上で証明が完成した。

４－７

１：明らか。

２：$\omega = fdx + gdy$ ならば $d\omega = \frac{\partial g}{\partial x}dx \wedge dy - \frac{\partial f}{\partial y}dx \wedge dy$ である。

３：第４節の問題１４から、∂W 上で

$$(\vec{n} \cdot \vec{F})dA = f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2$$

であり、したがって

$$d((\vec{n} \cdot \vec{F})dA) = (\div \vec{F})dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

となる。

４：$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$ とし、$\mathrm{curl}\vec{F} = g$ とすれば、$d\omega = g_1 dx_2 \wedge dx_3 + g_2 dx_3 \wedge dx_1 + g_3 dx_1 \wedge dx_2$ である。

７：単に Stokes の定理を適用するだけでよい。

８：このとき、

$$\int_X f^*\omega = \int_W d(f^*\omega) = \int_W f^* d\omega = 0$$

である。

９：$W = I \times X$ 上でホモトピー F を考えれば、問題８によって

$$-\int_{\{0\}\times X} F^*\omega = \int_{\{1\}\times X} F^*\omega$$

となる。しかし $\{0\} \times X$ は $-X$ と向きも含めて自然に微分同相であり、$\{1\} \times X$ は X と向きを含めて微分同相であるから、合わせてこの結果を得る。

１０：γ は定値写像 $\delta(x)=y$ とホモトープであるから、問題９から

$$\oint_\gamma \omega = \int_{S^1} \gamma^*\omega = \int_{S^1} \delta^*\omega$$

であるが、$\delta^*\omega(x)(h) = \omega(y)(d\delta_x(h)) = 0$ であるから、$\oint_\gamma \omega = 0$ を得る。

１１：問題１０、および第４節の問題１２から所望の結果を得る。

１２：第１章第７節の問題６から、S^k は単連結である。

１３：問題９とやり方がまったく同じである。

１４：(a)（Z に境界がないという仮定を付け加える。）これは問題７の系に過ぎない。

(b) 極めて容易である。

(c) 問題８を包含写像に応用するだけである。

(d) 問題１３の系。

４－８

１：まず、$x > 0$ のときを考える。ベクトル (x,y) のなす角を θ とすると、$x = \|(x,y)\|\cos\theta, y = \|(x,y)\|\sin\theta$ のはずである。したがって $\tan\theta = \frac{y}{x}$ であり、故に $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ と置ける。つまり $\arg(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$ であり、よって

$$\begin{aligned} d\arg(x,y) &= -\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x}dy \\ &= \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \end{aligned}$$

となる。

$x < 0$ のときも arctan の別の枝を取ってくれば同じように計算ができて、同じ結果が成り立つ。よってあとは $x = 0$ のときだけを考えればよい。このときはすぐわかるように、この点の近傍で $\arg(x,y) = \arctan(-\frac{x}{y}) \pm \frac{\pi}{2}$ である（$\pm$ は y の符号で変わる）ことを同じように確かめられるので、

$$\begin{aligned} d\arg(x,y) &= -\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\frac{1}{y}dx + \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\frac{x}{y^2} \\ &= \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

となって結論を得る。

２：これは γ の写像度と $\frac{\gamma}{|\gamma|}$ の写像度が同一であることを証明するだけで、その証明は容易である。あとの主張は第４節の問題８ (a) を使えばよい。

３：(a)$z = x + iy$ の両辺の d を作用させれば、線形性からただちに結果を得る。

(b)$f(z) = f_1(z) + if_2(z)$ とすると、

$$\begin{aligned} f(z)dz &= (f_1(x,y) + if_2(x,y))dx + (if_1(x,y) - f_2(x,y))dy \\ &= (f_1(x,y)dx - f_2(x,y)dy) + i(f_1(x,y)dy + f_2(x,y)dx) \end{aligned}$$

という形である。そこで、

$$d(f(z)dz) = -\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)dx\wedge dy + i\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

とまとめられる。これが 0 になるというのが閉形式の条件なので、

$$-\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} + i\frac{\partial f_1}{\partial x} - i\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$$

という条件になる。これを整理すれば、

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} + i\frac{\partial f_2}{\partial y} = i(\frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial f_2}{\partial x})$$

となって、Cauchy-Riemann の方程式が現れる。また、これを実部虚部に分ければ、

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

という 2 つの実方程式が出てくることも確認できる。

(c) これは、

$$\begin{aligned}\frac{\partial fg}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y}g + f\frac{\partial g}{\partial y} \\ &= i\frac{\partial f}{\partial x}g + if\frac{\partial g}{\partial x} \\ &= i\frac{\partial fg}{\partial x}\end{aligned}$$

となるので、正しい。

(d)$\frac{\partial z}{\partial y} = i = i\frac{\partial z}{\partial x}$ である。

(e) 実部と虚部に分けて第 7 節の問題 9 を適用するだけである。

(f)γ が定値写像であれば線積分が 0 になることは明らかであるが、単連結であるから (e) からただちに結論を得る。

(g) 実際、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{i}{z^2} = i\frac{\partial f}{\partial x}$$

であるため、正しい。残りも同様。

(h) まず、いくつかの問題を整理しておく。$\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2$ と同一視し、$a=(a_1,a_2)$ とする。$z=x+iy$ は (x,y) と同一視する。複素数の通常の計算から、$\frac{1}{z-a}=\frac{\bar{z}-\bar{a}}{|z-a|^2}$ なので、C_r 上でこの分数は

$$\frac{1}{r^2}(x-a_1,-y+a_2)$$

というベクトルと同一視できる。したがって証明するべきは、

$$\frac{1}{r^2}\int_{C_r}[(x-a_1)dx+(y-a_2)dy]=0,$$

$$\frac{1}{r^2}\int_{C_r}[(a_2-y)dx+(x-a_1)dy]=2\pi$$

という 2 つの式である。

さて、$h(t)=r(\cos t,\sin t)+(a_1,a_2)$ としよう。このとき、第 4 節の問題 6 と同様にして、

$$\int_{C_r}\omega=\int_0^{2\pi}h^*\omega$$

であることが示せる。また、特に $h^*dx(t)=-r\sin tdt, h^*dy(t)=r\cos tdt$ であることを示せるので、

$$\int_{C_r}[(x-a_1)dx+(y-a_2)dy]=\int_0^{2\pi}[-r^2\cos t\sin tdt+r^2\sin t\cos tdt]=0$$

$$\int_{C_r}[(a_2-y)dx+(x-a_1)dy]=\int_0^{2\pi}[r^2\sin^2 tdt+r^2\cos^2 tdt]=2\pi r^2$$

となって、結論を得る。

(i) 条件を追加し、U は C_r とその内部をすべて含むとする。（でないと正しくないと思われる。）

まずはヒントの通り、この式は $r>0$ に依存しない。したがって、$r\to 0$ となったときの極限がその値になればよいことがわかる。よって、$r\to 0$ のときに

$$\int_{C_r}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\to 0$$

が示せればよいことがわかる。r が十分小さいときには $|f(z)-f(a)|$ も十分小さいので、結局示さなければいけないことは、$|g(z)|<\varepsilon$ が常に成り立つときに、

$$\left|\int_{C_r}g(z)\omega\right|\le 2\varepsilon\left|\int_{C_r}\omega\right|$$

であることを示すことに帰着する。これは g が実数値関数ならば 2ε を ε に変えて成り立つことが明白であり、一般の場合は積分の線形性と三角不等式からただちに得られる。以上で証明が完成した。

(j) 問題 2 を S^1 から C_r に直して解き直すだけであり、容易。

４：ヒントの通り。

５：(a) まず、S^k 上のすべての k-形式は閉であることに注意する。よって問題 4 で取った形式を ν とすると、これは閉である。次に $\omega = d\rho$ ならば、S^k には境界がないのでストークスの定理から $\int_{S^k} \omega = 0$ である。今度は任意の ω を取ろう。第 6 節の結果から、$c \in \mathbb{R}$ をうまく取れば $\omega - c\nu$ は完全である。これは

$$\int_{S^k} \omega = c \int_{S^k} \nu$$

であることを意味する。特に $\int_{S^k} \omega = 0$ ならば $c = 0$ であり、よって ω は完全である。

(b) 明白。

６：$k \geq 2$ を前提としてヒントの通りである。μ は北極の近くでは第 6 節の問題 8 によって定義でき、全体に広げるには単に滑らかなウリゾーンの補題を使って遠くを 0 にしてしまえばよい。

７：これもヒントの通りである。c が積分値と一致する。

８：これは写像度の公式の系である。

４－９

１：問題２の特殊ケースである。

２：ヒントの通りのことが計算で示せるが、v と w が正に有向かつ正規直交であるとすればこの行列式は直交変換の行列式であり、さらに（行基本変形２回によって n を一番上に持って行くと）この行列式が正であることが、n が外向き法線ベクトルであることの定義であった。したがって主張は正しい。

３：行列式定理。

４：ややこしいので曲線は集合としては C、それを助変数化する関数は $c(t)$ とする。ここで C 上の体積形式は

$$\omega = \frac{1}{\|c'(t)\|}(c_1'(t)dx_1 + c_2'(t)dx_2 + c_3'(t)dx_3)$$

である。従って、

$$\int_C \omega = \int_a^b c^*\omega = \int_a^b \|c'(t)\|dt$$

となって主張は正しい。