

1 - 1

問題 1.5 : 一般性を失うことなく X と Y の sample path がすべて右連続だと仮定してよい。このとき、 $\{\omega | X_t \neq Y_t \text{ for some } t \in \mathbb{Q}\}$ は測度 0 を持つ。 ω がこの集合に含まれないとき、 t に上から収束する有理数列 (t_n) を取れば、

$$X_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{t_n}(\omega) = Y_t(\omega)$$

となって、 $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ がわかる。

問題 1.7 : 問題 1.8 のヒントにある集合

$$A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{q_1, q_2 \in [0, t_0] \cap \mathbb{Q}, |q_1 - q_2| < \frac{1}{m}} \{\omega | |X_{q_1}(\omega) - X_{q_2}(\omega)| > \frac{1}{n}\}$$

を作れば、 $A = \Omega \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ である (非連続であればある A_n に入っていることは容易にわかる。逆に連続であればどの A_n にも入っていないことは、コンパクト集合 $[0, t_0]$ 上では連続性が一様連続性を意味することから成り立つ。ここで t_0 が条件に入っていないが、これは $\lim_{t \uparrow t_0} X_t$ で置き換えて議論すればよい)。この集合の操作は可算個なので、 $\{\omega | |X_{q_1}(\omega) - X_{q_2}(\omega)| > \frac{1}{n}\}$ が $\mathcal{F}_{t_0}^X$ 可測であればよいが、これは明白である。

問題 1.8 : ヒントの通り。(反例は重要度が低いと判断したのでチェックしていないが、なにか間違いがあるような気がする)

問題 1.10 : これは問題 1.7 の A_n の定義を $[0, t_0)$ から $[0, t_0 + \varepsilon)$ に書き換えたものを $A_n(\varepsilon)$ とすればこれは $\mathcal{F}_{t_0 + \varepsilon}$ 可測であり、さらに ε が減少するにつれて減少する。 $A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_n(\frac{1}{m})$ とすれば、これは任意の $\mathcal{F}_{t_0 + \varepsilon}$ について可測であり、よって \mathcal{F}_t の右連続性から、 \mathcal{F}_{t_0} 可測である。 $A = \Omega \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ であることを示すのに、 $\omega \notin A$ ならば $\omega \in A_n$ となる n が存在することを示すのは極めて簡単である。逆に $\omega \in A$ であるとしよう。このとき定義から、 $t \mapsto X_t(\omega)$ は t_0 で連続であり、したがって十分 q_1, q_2 が t_0 に近ければ X_t との差は $\frac{1}{2n}$ よりも小さい。したがって $|X_{q_1}(\omega) - X_{q_2}(\omega)| < \frac{1}{n}$ であり、よって前の一様連続性の議論と合わせれば、十分大きな m について $\omega \notin A_n(\frac{1}{m})$ である。故に $A \subset \Omega \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ であり、証明が完成する。

問題 1.16 : 明白である。

問題 1.17: A を空集合とすれば $\{X_T \in A\} = \emptyset$ であり、 $A = \mathbb{R}$ とすれば $\{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\} = \Omega$ である。

次に、 $\Omega \setminus \{X_T \in A\} = \{X_T \in \mathbb{R} \setminus A\} \cup \{T = \infty\}$ であり、また $\Omega \setminus (\{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\}) = \{X_T \in \mathbb{R} \setminus A\}$ である。

最後に、 (A_n) を $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の列としよう。 B_n がすべて $\{X_T \in A_n\}$ であるときには、 $\cup_n B_n = \{X_T \in \cup_n A_n\}$ である。仮に B_n のいくつかは前と同じ、残りは $\{X_T \in A_n\} \cup \{T = \infty\}$ であれば、 $\cup_n B_n = \{X_T \in \cup_n A_n\} \cup \{T = \infty\}$ である。以上で証明が完成した。

1 - 2

問題 2.2 : $T(\omega) = t_0$ とする。 $\mathcal{F}_{t_0}^X$ が、次の形の集合

$$\{X_t \in B\}$$

から生成されることは容易に示せる。ただしここで $t \in [0, t_0]$ かつ $B \in \mathcal{S}$ である (X の値域を (S, \mathcal{S}) という可測空間だと仮定している)。ここで $\{X_t \in B\}$ は ω と ω' の両方を含むか、あるいはどちらも含まない。この場合、 $\mathcal{F}_{t_0}^X$ のすべての集合が同じ性質を持つ：実際、 ω と ω' を両方含む集合とどちらも含まない集合をすべて集めてできる σ -代数は $0 \leq t \leq t_0$ についての X_t をすべて可測にするので、 $\mathcal{F}_{t_0}^X$ を含む。するともし $T(\omega) < T(\omega')$ であるとすれば $T^{-1}([0, t_0]) \in \mathcal{F}_{t_0}^X$ となるが、この集合は ω を含みかつ ω' を含まないので、矛盾である。同様に $T(\omega) > T(\omega')$ の時は $t_1 = T(\omega')$ として $T^{-1}([0, t_1])$ を用いて矛盾を示せる。以上で証明が完成した。

問題 2.6 : ヒントの通り。

問題 2.7 : これもヒントの通り。

問題 2.10 : 最初の主張は系 2.4 を使えば、補題 2.9 の系にすぎない。

次に $T > 0, S > 0$ とする。このとき補題 2.9 と同様の分解

$$\{T + S > t\} = \{0 < T < t, T + S > t\} \cup \{T \geq t\}$$

とすれば、二番目の集合は \mathcal{F}_t 可測であり、一番目の集合は

$$\cup_{q \in \mathbb{Q}, 0 < q < t} \{q < T < t, S \geq t - q\}$$

と表せる。 $\{q < T\} = \cup_n \{q + \frac{1}{n} \leq T\}$ なのでこれは \mathcal{F}_t 可測であり、よって上の集合族も \mathcal{F}_t 可測である。

最後に、 $T > 0$ かつ T が stopping time であるとする。このときには分解

$$\{T + S > t\} = \{0 < T \leq t, T + S > t\} \cup \{T > t\}$$

を考えれば、二番目の集合は \mathcal{F}_t 可測であり、一番目の集合は

$$\cup_{q \in \mathbb{Q}, 0 < q < t} \{q < T \leq t, S \geq t - q\}$$

と表せる。この集合は \mathcal{F}_t 可測である。

問題 2.13 : $\Omega \in \mathcal{F}_T$ は明らかである。

$A \in \mathcal{F}_T$ だとすると $A^c \in \mathcal{F}_T$ であることは本文中で示されている。

したがって後は、 (A_n) が \mathcal{F}_T の列として、 $A = \cup_n A_n$ が \mathcal{F}_T に含まれていることを示せばよい。しかしこれは、

$$A \cap \{T \leq t\} = \cup_n (A_n \cap \{T \leq t\})$$

であることから明らかである。よって \mathcal{F}_T はたしかに σ -代数である。

$\{T \leq s\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq s \wedge t\}$ であるから、いずれにせよこれは \mathcal{F}_t に属する。よって $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_T$ であり、ここから T は \mathcal{F}_T 可測であることがわかる。

$T \equiv t$ のとき、 $s < t$ ならば $A \cap \{T \leq s\} = \emptyset$ 、 $s \geq t$ ならば $A \cap \{T \leq s\} = A$ であるため、 $A \in \mathcal{F}_T$ と $A \in \mathcal{F}_t$ は同値であり、よって $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$ が成り立つ。

問題 2.14 : $\{S \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ なので、正しい。

問題 2.17 : ヒントの通り。

問題 2.19 : 後半の主張は命題 2.18 の系なので、前半のみを示せばよい。よって主張は、 (X_t) が progressively measurable であるという仮定の下で、

$$Y_t = \int_0^t f(s, X_s) ds$$

が同じ仮定を満たすことを示すことである。ただし (Y_t) の sample path は連続であるから、 Y_t が \mathcal{F}_t 可測であることだけを示せばよい。

最初に、 f が $1_{[t_0, t_1] \times B}$ であったときを考えよう。 $t < t_0$ ならば $Y_t = 0$ であり、したがって Y_t は \mathcal{F}_t 可測である。 $t_0 \leq t$ のときには $Y_t = \int_{t_0}^{t \wedge t_1} 1_B(X_s) ds$ である。 $1_B(X_s)$ は $[0, t \wedge t_1] \times \Omega$ 上の関数として $\mathcal{B}([0, t \wedge t_1]) \otimes \mathcal{F}_{t \wedge t_1}$ 可測であるから、Fubini の定理によって、その積分も Ω 上の関数として $\mathcal{F}_{t \wedge t_1}$ 可測である。よって Y_t は \mathcal{F}_t 可測となって、証明が終わる。同様のことは $[t_0, t_1]$ を、任意の半开区間や开区間に変えても正しい。 (Y_t) の値が変わらないため)

次に、 $f = 1_{E_1 \times B}$ という形だったときを考える。ただし E は任意の $[0, +\infty)$ 上の可測集合である。このときは、まず E_1 が区間の有限個の互いに素な合併であるときは上で示してあり、一般の場合には monotone class lemma から示すことができる。よってこの場合もよい。

次に、 $f = 1_E$ という形を考える。上の考察から、 E が $E_1 \times B$ という形の集合の互いに素な有限合併であったときには、主張は正しいことがわかる。後は monotone class lemma によって、この場合も正しいことがわかる。

したがって f が単関数であるときまでは問題なく証明できる。非負関数については単調に下から収束する単関数の列を取れば示せる。一般の有界関数については $f = f^+ - f^-$ と分ければよい。

問題 2.21 : $\emptyset \cap \{T \leq t\} = \emptyset \in \mathcal{F}_{t+}$ なので、 $\emptyset \in \mathcal{F}_{T+}$ である。

次に、 $A^c \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \cap (A \cap \{T \leq t\})^c$ であるから、 $A \in \mathcal{F}_{T+}$ であれば $A^c \in \mathcal{F}_{T+}$ である。

最後に、 (A_n) が \mathcal{F}_{T+} の列であるとし、 $A = \cup_n A_n$ とすれば、 $A \cap \{T \leq t\} = \cup_n (A_n \cap \{T \leq t\})$ なので、 $A \in \mathcal{F}_{T+}$ であることがわかった。よって \mathcal{F}_{T+} は σ -代数である。

$\{T \leq s\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq s \wedge t\} = \Omega \cap \{T \leq s \wedge t\} \in \mathcal{F}_{s \wedge t+} \subset \mathcal{F}_{t+}$ なので、 $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_{T+}$ であり、よって T は \mathcal{F}_{T+} 可測である。

もし $A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ がすべての t について成り立つとすれば、 $A \cap \{T \leq t\} = \cap_{n=m}^{\infty} (A \cap \{T < t + \frac{1}{n}\}) \in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{m}}$ なので、 $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}$ である。逆に $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}$ がすべての t について成り立つとすれば、 $A \cap \{T < t\} = \cup_n (A \cap \{T \leq t - \frac{1}{n}\}) \in \mathcal{F}_t$ である。

最後の主張は単に $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+}$ から出る。

問題 2.22 : まず補題 2.15 を示す。 T は optional time なので \mathcal{F}_{t+} について stopping time である。したがって、 $\{T \wedge t \leq s\}$ はすべての s について \mathcal{F}_{t+} に属しており、 $T \wedge t$ は確率変数として \mathcal{F}_{t+} 可測である。 $S \wedge t$ も同様。そこで、

$$A \cap \{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{T \leq t\} \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\}$$

と分解すれば、二番目と三番目は \mathcal{F}_{t+} に属するので、 $A \in \mathcal{F}_{S+}$ ならば $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_{T+}$ である。

次に補題 2.16 を示す。上の結果から $S \leq T$ ならば $\mathcal{F}_{S+} \subset \mathcal{F}_{T+}$ であり、よって特に $\mathcal{F}_{S \wedge T+} \subset \mathcal{F}_{S+} \cap \mathcal{F}_{T+}$ である。逆の包含関係を示すために、 $A \in \mathcal{F}_{S+} \cap \mathcal{F}_{T+}$ としよう。このとき、

$$A \cap \{S \wedge T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cup (A \cap \{T \leq t\})$$

なので、 $A \in \mathcal{F}_{S \wedge T+}$ である。

$\{S \leq T\} = \Omega \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_{T+}$ である。よって $\{S > T\} \in \mathcal{F}_{T+}$ でもある。一方で $R = S \wedge T$ は \mathcal{F}_{T+} 可測であり、よって $\{S < T\} = \{R < T\} \in \mathcal{F}_{T+}$ である。後の主張は容易に出る。これで補題 2.15 と 2.16 の対応物が出た。後の主張はヒントの通りである。

問題 2.23 : ヒントの通り。

問題 2.24 : まず、 $\frac{k}{2^n} \leq t < \frac{k+1}{2^n}$ のときには、 $\{T_n \leq t\} = \{T < \frac{k}{2^n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}$ であるため、 T_n は stopping time である。極限についての主張は明白。最後の主張は、

$$A \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\} = (A \cap \{T_n \leq \frac{k}{2^n}\}) \setminus (A \cap \{T_n \leq \frac{k-1}{2^n}\}) \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}$$

となって、正しい。

問題 3.2 : (i) ヒントが飛ばしすぎなので、1ステップごとにきちんと確認しておくことにする。

まず、 $s \geq 0$ と $n \geq 0$ を固定する。 \mathcal{F}_s^N の元と $\{N_s = n\}$ の共通部分を全部集めてできた集合を \mathcal{G} と定義する。容易にわかるように、この集合は $\{N_s = n\}$ 上の σ -代数である。同様に、 $\sigma(T_1, \dots, T_n)$ の元と $\{N_s = n\}$ の共通部分を全部集めてできた集合を \mathcal{H} と定義する。これも同様に $\{N_s = n\}$ 上の σ -代数である。これから示すのは $\mathcal{G} = \mathcal{H}$ ということである。

まず、 \mathcal{G} が、

$$\{N_{t_1} \leq n_1, \dots, N_{t_k} \leq n_k, N_s = n\}$$

という形の集合族が生成する σ -代数であることを示そう。ただし $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq s$ である。このために、まず $\{N_{t_1} \leq n_1, \dots, N_{t_k} \leq n_k\}$ という形の集合が \mathcal{F}_s^N を生成することに注意する。実際、 $0 \leq t \leq s$ について N_t がすべて可測になるような σ -代数はすべて上の形の集合を含むので、 \mathcal{F}_s^N もそれを含む。逆にこの集合が生成する σ -代数が N_t をすべて可測にすることを示せば、それが \mathcal{F}_s^N を含むことが示せる。しかし上の形の集合は $\{N_t \leq c\}$ という集合をすべて含んでいるので、 $(-\infty, c]$ という形の集合が Borel σ -代数を生成することから、その生成する σ -代数は N_t を可測にする (Dudley の定理 4.1.6。ある関数が可測であるための必要十分条件は、値域の σ -代数を生成する部分集合の逆像がすべて可測になることである)。よって \mathcal{F}_s^N と上の集合が生成する σ -代数は一致するが、

$$\{N_{t_1} \leq n_1, \dots, N_{t_k} \leq n_k, N_s = n\} = \{N_{t_1} \leq n_1, \dots, N_{t_k} \leq n_k\} \cap \{N_s = n\}$$

が生成する $\{N_s = n\}$ 上の σ -代数は、上の集合族が生成する σ -代数の $\{N_s = n\}$ への制限、つまり \mathcal{G} と一致する。これを見るためには、後者は上の集合を全部含む σ -代数なので前者を含み、よって前者の中で後者に含まれるものが σ -代数であることを示せば十分であり、これは容易である。以上で目的は果たせたが、 $N_{t_1} \leq n_1$ と $S_{n_1+1} > t_1$ は同値であり、したがって \mathcal{H} はすべて上の形の集合を含む。よってこれで、 $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ が言えたことになる。

今度は逆に、 \mathcal{H} が

$$\{S_1 \leq t_1, \dots, S_n \leq t_n, N_s = n\}$$

という形の集合族が生成する σ -代数であることを示そう。ただし、 $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq s$ である。このためには、まず $\sigma(T_1, \dots, T_n) = \sigma(S_1, \dots, S_n)$ であることに注意する。次に、 $\{S_1 \leq t_1, \dots, S_n \leq t_n\}$ という形の集合 (ただし $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ のみを仮定する) が

$\sigma(S_1, \dots, S_n)$ を生成することに注意する。これは $\prod_{k=1}^n (-\infty, t_k]$ が $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ を生成することからただちにわかる。次に、

$$\{S_1 \leq t_1, \dots, S_n \leq t_n, N_s = n\} = \{S_1 \leq t_1, \dots, S_n \leq t_n\} \cap \{N_s = n\}$$

である。後者の集合は、 $t_{n-1} \leq s$ であるとき以外は空集合になることに注意する。したがって、先ほどの形の集合族が生成する σ -代数は $\{S_1 \leq t_1, \dots, S_n \leq t_n\}$ という形の集合と $\{N_s = n\}$ の共通部分でできる集合族が生成する σ -代数と一致し、それは前と同じ理由付けによって \mathcal{H} と一致する。しかし $S_k \leq t_k$ と $N_{t_k} \geq k$ は同値であるので、 \mathcal{G} は上の形の集合をすべて含む。よって $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ であり、合わせて $\mathcal{G} = \mathcal{H}$ が言える。

次に、 $A \in \sigma(T_1, \dots, T_n)$ であるときに、 T_{n+1} と $(S_n, 1_A)$ が独立であることを示そう。自分の知識の確認のために、いくつかの定義と命題を作っておく。命題を議論する中では、すべての確率変数は実数値ということにして話を進める。

定義：ふたつの σ -代数 \mathcal{F} と \mathcal{G} が独立であるとは、 $A \in \mathcal{F}$ と $B \in \mathcal{G}$ に対して常に $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つことを言う。

ふたつの確率変数の族 \mathcal{Y} と \mathcal{Z} が独立であるとは、 $\sigma(\mathcal{Y})$ と $\sigma(\mathcal{Z})$ が独立であることを意味する。

命題 1： \mathcal{Y} と \mathcal{Z} が独立であるとは、任意の \mathcal{Y} の有限部分族と \mathcal{Z} の有限部分族が独立であることと同値である。

証明：前者が後者を意味することは明らかである。逆に後者を仮定する。 \mathcal{Z} の有限部分族 \mathcal{Z}' を取る。 \mathcal{Y} の有限部分族 \mathcal{Y}' の生成する $\sigma(\mathcal{Y}')$ の元をすべて集めたものを \mathcal{C} とすれば、これは $\sigma(\mathcal{Y})$ の部分集合である。 \mathcal{C} の生成する σ -代数は $\sigma(\mathcal{Y})$ に一致する。これは、前者が後者に含まれることは当然として、前者が \mathcal{Y} の任意の関数を可測にすることに気づけば明らかである。ここで、仮定により \mathcal{C} の元 A はすべて $\sigma(\mathcal{Z}')$ の元 B と関係 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ を満たす。同じことが $\sigma(\mathcal{Y})$ の全部に言えるためには、 \mathcal{C} が共通部分について閉じていることに気づけば、このような性質を満たす集合が Dynkin system であることを証明すれば十分である。 Ω は明らかにこの性質を満たしている。 A_1, A_2 が条件を満たしかつ $A_2 \subset A_1$ であるときに、 $A_1 \setminus A_2$ が条件を満たすことは、 $P((A_1 \setminus A_2) \cap B) = P(A_1 \cap B) - P(A_2 \cap B)$ であることから言える。最後に A_n が単調増大な条件を満たす列であるときに $A = \cup_n A_n$ が条件を満たすことは測度の連続性から言える。これで \mathcal{Y} が \mathcal{Z}' と独立であることが示せた。 \mathcal{Z}' を \mathcal{Z} に変えるのは同じ議論を繰り返せばよい。

命題2 : $\mathcal{Y} = (Y_1, \dots, Y_k)$ かつ $\mathcal{Z} = (Z_1, \dots, Z_\ell)$ であるとき、 \mathcal{Y} と \mathcal{Z} が独立であるとは、 $(Y_1, \dots, Y_k, Z_1, \dots, Z_\ell)$ が導く $\mathbb{R}^{k+\ell}$ 上の確率測度が (Y_1, \dots, Y_k) の導く確率測度と (Z_1, \dots, Z_ℓ) が導く確率測度の積で書けることと必要十分である。特に Y と Z が独立であるというのは、 $C_1, C_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ のときに $A = Y^{-1}(C_1), B = Z^{-1}(C_2)$ とすると $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ となることと必要十分である。

証明 : 後半の主張から示す。まず $A = Y^{-1}(C_1)$ のような集合が作る族は σ -代数となっており、よって $\sigma(Y)$ と一致することに注意する。したがって、条件は $\sigma(Y)$ の任意の元 A と $\sigma(Z)$ の任意の元 B について $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つことを意味し、主張が成り立つ。

次に、 \mathcal{Y} と \mathcal{Z} が独立であることは、任意の $C_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ と $C_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell)$ について $A = (Y_1, \dots, Y_k)^{-1}(C_1)$ と $B = (Z_1, \dots, Z_\ell)^{-1}(C_2)$ が $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ を満たすことと同値である。これはつまり

$$\int 1_{C_1 \times C_2}(Y_1, \dots, Y_k, Z_1, \dots, Z_\ell) dP = \int 1_{C_1}(Y_1, \dots, Y_k) dP \int 1_{C_2}(Z_1, \dots, Z_\ell) dP$$

を意味する。したがって独立であるというのは、 $C_1 \times C_2$ という特別な集合について主張が成り立つことと同値である。しかしこの形の集合について主張が成り立てば、その有限個の互いに素な合併についても成り立ち、それは代数を成す。さらにそれを含む σ -代数まで拡張するのは、monotone class lemma を使えば容易である。以上で証明が完成した。

命題3 : Y が L^1 で \mathcal{F} と独立なとき、

$$E[Y|\mathcal{F}] = E[Y]$$

が成り立つ。

証明 : 実際、 $Y = 1_A$ という形ของときは、任意の $B \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_B Y dP = P(A \cap B) = P(A)P(B) = E(Y)P(B)$$

となって主張は正しい。よって任意の単関数でも正しい。非負関数で正しいことを示すには単調収束定理を用いる。 L^1 は単に Y^+ と Y^- に分解するだけである。

さて、 $\tilde{A} \in \mathcal{F}_s^N$ を取れば、 $A \in \sigma(T_1, \dots, T_n)$ が存在して、 $\tilde{A} \cap \{N_s = n\} = A \cap \{N_s = n\}$

である。このとき、 T_{n+1} と $S_n, 1_A$ は独立である。すると、

$$\begin{aligned}
& \int_{\tilde{A} \cap \{N_s = n\}} E[1_{\{S_{n+1} > t\}} | \mathcal{F}_s^N] dP \\
&= P(\{S_{n+1} > t\} \cap \tilde{A} \cap \{N_s = n\}) \\
&= P(\{S_{n+1} > t\} \cap A \cap \{S_n \leq s < S_{n+1}\}) \\
&= P(\{S_n + T_{n+1} > t\} \cap A \cap \{S_n \leq s\}) \\
&= \int_{t-s}^{\infty} P(\{S_n + u > t\} \cap A \cap \{S_n \leq s\}) \lambda e^{-\lambda u} du \\
&= e^{-\lambda(t-s)} \int_0^{\infty} P(\{S_n + u > s\} \cap A \cap \{S_n \leq s\}) \lambda e^{-\lambda u} du \\
&= e^{-\lambda(t-s)} P(\{S_n + T_{n+1} > s\} \cap A \cap \{S_n \leq s\}) \\
&= e^{-\lambda(t-s)} P(A \cap \{N_s = n\}) \\
&= e^{-\lambda(t-s)} P(\tilde{A} \cap \{N_s = n\})
\end{aligned}$$

を得る。ここで4行目から5行目の変形などに独立性を用いている。

最後に、 $P(\{N_s < \infty\}) = 1$ を示さなければならない。このためには、まず

$$P(\{N_s = 0\} = P(\{S_1 > s\}) = \int_s^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda s}$$

であり、

$$\begin{aligned}
P(\{N_s = 1\}) &= P(S_1 \leq s < S_2) \\
&= \int_0^s \lambda e^{-\lambda t_1} \int_{s-t_1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t_2} dt_2 dt_1 \\
&= \int_0^s \lambda e^{-\lambda s} dt_1 \\
&= \lambda s e^{-\lambda s}
\end{aligned}$$

である。以下同様にして、

$$\begin{aligned}
P(\{N_s = k\}) &= P(S_k \leq s < S_{k+1}) \\
&= \int_0^s \lambda e^{-\lambda t_1} \dots \int_0^{s-\sum_{i=1}^{k-1} t_i} \lambda e^{-\lambda t_k} \int_{s-\sum_{i=1}^k t_i} \lambda e^{-\lambda t_{k+1}} dt_{k+1} \dots dt_1 \\
&= \int_0^s \lambda e^{-\lambda t_1} \dots \int_0^{s-\sum_{i=1}^{k-1} t_i} \lambda e^{-\lambda(s-\sum_{i=1}^{k-1} t_i)} dt_k \dots dt_1 \\
&= \int_0^s \lambda e^{-\lambda t_1} \dots \int_0^{s-\sum_{i=1}^{k-2} t_i} \lambda^2 \frac{s-\sum_{i=1}^{k-1} t_i}{1!} e^{-\lambda(s-\sum_{i=1}^{k-2} t_i)} dt_{k-1} \dots dt_1 \\
&= \int_0^s \lambda e^{-\lambda t_1} \dots \int_0^{s-\sum_{i=1}^{k-3} t_i} \lambda^3 \frac{(s-\sum_{i=1}^{k-2} t_i)^2}{2!} e^{-\lambda(s-\sum_{i=1}^{k-3} t_i)} dt_{k-2} \dots dt_1 \\
&= \dots \\
&= \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s}
\end{aligned}$$

を得る。したがって

$$P(\{N_s < \infty\}) = e^{-\lambda s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = 1$$

となって結論を得る。したがって後は上で出た式を n について足し合わせれば、

$$\int_{\tilde{A}} E[1_{S_{N_s+1} > t} | \mathcal{F}_s^N] dP = e^{-\lambda(t-s)} P(\tilde{A})$$

となって結論を得る。

(ii) ヒントの最初のほうの

$$P(Y_k > \theta) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda \theta)^j}{j!} e^{-\lambda \theta}$$

は、まさしく上で証明した内容を使うだけで示せる。これを θ について微分して -1 倍すれば密度が出る。

後はヒント通りにやれば $E[1_{N_t - N_s \leq k} | \mathcal{F}_s^N] = \sum_{j=0}^k e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^j}{j!}$ まで出てくる。これは \mathcal{F}_s^N での条件付き期待値が定数であることを意味する。ここから $N_t - N_s$ が \mathcal{F}_s^N と独立であることを出すのは非常に簡単である：実際、 $N_t - N_s$ は正の整数値しか持たない関数なので、 $(\{N_t - N_s = k\})_k$ が \mathcal{F}_s^N と独立であればよい。しかしこれは上から即座に出せる。また Poisson 分布に従うことも同時にわかる。以上で証明が完成した。

問題 3.4 : 実際、上の命題 3 から、

$$E[M_t|\mathcal{F}_s] = E[N_t|\mathcal{F}_s] - \lambda t = E[N_t - N_s|\mathcal{F}_s] - \lambda t + N_s = \lambda(t-s) - \lambda t + N_s = N_s - \lambda s = M_s$$

となって、正しい。

問題 3.7 : ヒントの通り。

命題 3.8 への注 : 不等式評価がところどころ Chung と違うのが引用されているが、基本的に不等式の低い方をより小さくしているだけなので、問題はない。

むしろ問題とするべきは $U_{[\sigma, \tau]}(\alpha, \beta; X)$ の可測性である。非可算の F の上限であるから容易に可測性が出るとは思えない。どうしても出せなかったので、不都合のない限り τ_1 の定義を $\min\{t \in F | X_t < \alpha\}$ に変更する。こうすると、 $U_{[\sigma, \tau]}(\alpha, \beta; X) = U_{[\sigma, \tau] \cap \mathbb{Q}}(\alpha, \beta; X)$ となって、これは容易に可測性を確かめられる。

Chung の定理 9.4.2 は upcrossing の場合のみ扱っているが、downcrossing について同じ結果は同じ証明の even と odd の役割を逆転させればできる。

問題 3.11 : ヒントの通り。ただし、Chung の定理 9.4.7 のほうがわかりやすい。

問題 3.16 : $Y_t = -X_t$ とすると (Y_t, \mathcal{F}_t) は submartingale であり、 $Y_t^+ \equiv 0$ である。よって定理 3.15 から $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = Y_\infty$ がほとんどすべての点で存在するが、 $X_\infty = -Y_\infty$ とすれば $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X_\infty$ がほとんどすべての点で存在することになる。さらに定理 3.15 の主張から X_∞ は可積分である。

後は、任意の $A \in \mathcal{F}_t$ について $E[1_A X_t] \geq E[1_A X_\infty]$ が示せばよい。しかし実際、任意の $s > t$ に対して $E[1_A X_t] \geq E[1_A X_s]$ が成り立っており、 $1_A X_s$ は $1_A X_\infty$ に概収束するから、Fatou の補題によって $s_n \uparrow \infty$ となる点列について $E[1_A X_\infty] \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} E[1_A X_{s_n}] \leq E[1_A X_t]$ となって証明が終わる。

問題 3.18 : $Y_t = -X_t$ とすると (Y_t, \mathcal{F}_t) は submartingale で一様可積分である。したがって $E[Y_t^+] \leq E[|Y_t|] \leq C < \infty$ となる定数 C が存在する。定理 3.15 から Y_t の $t \rightarrow \infty$ のときの概収束極限 Y_∞ が存在して $E[|Y_\infty|] \leq C$ であることがわかる。したがって、 $X_\infty = -Y_\infty$ は X_t の概収束極限であり、 $E[|X_\infty|] \leq C$ である。 X_∞ は概収束極限であ

りかつ (X_t) は一様可積分なので、 X_t は X_∞ に L^1 収束している。そこで任意の $A \in \mathcal{F}_t$ に対して、

$$E[1_A X_t] \geq \lim_{s \rightarrow \infty} E[1_A X_s] = E[1_A X_\infty]$$

がわかる。

よって、 $M_t = E[X_\infty | \mathcal{F}_t]$ とし、ただし M_t は必要ならば右連続であるように取る (定理 3.13)。そして $Z_t = X_t - M_t$ としよう。 M_t は当然ながら martingale であり、 Z_t も当然ながら supermartingale である。後は Z_t が potential の条件を満たすことを示せば証明が終わる。このためにはまず、 X_∞ が \mathcal{F}_∞ 可測であり、よって $E[X_\infty | \mathcal{F}_\infty] = X_\infty$ であることに注意する。また M_t は右連続な martingale であり、よって Jensen の不等式から

$$E[|M_t|] \leq E[|X_\infty|] < \infty$$

が言える。故に M_t は定理 3.15 の仮定を満たし、 $t \rightarrow \infty$ のときに概収束する。ところが Chung の定理 9.4.8 から、この概収束極限は X_∞ と等しいことが示せる。さらに Chung の定理 9.4.5 と同じロジックによって M_t は X_∞ に L^1 収束していることが示せる。

よって Z_t は 0 に L^1 収束する。後は Z_t が非負であることを示せば証明が終わる。しかし Z_t は \mathcal{F}_t 可測なので、任意の $A \in \mathcal{F}_t$ について $E[1_A Z_t] \geq 0$ であることが示せば十分である。計算してみると、

$$E[1_A Z_t] = E[1_A X_t] - E[1_A X_\infty] \geq 0$$

となるので、正しい。以上で証明が完成した。

問題 3.19 : (a) \Rightarrow (b). これはヒントの通りでよい。

(b) \Rightarrow (c). L^1 収束しているため、 L^1 有界であることに注意すれば、定理 3.15 の仮定が成り立っていて概収束が出る。(ここがヒントになかった部分) 後は、任意の $A \in \mathcal{F}_t$ について、

$$E[1_A X_t] \leq \lim_{s \rightarrow \infty} E[1_A X_s] = E[1_A X_\infty]$$

となるので、(c) が言える。

(c) \Rightarrow (a). ヒントの通り。

問題 3.20 : 若干ヒントが怪しいので補足してみる。(a) から (b) はそのままのロジック

クでよい。(b) から (c) は、問題 3.19 の解答の不等式評価の部分が等式になることから martingale であることが出る。(c) から (a) はそのままである。後はヒントのままでよい。

問題 3.21 : (a) まず、 $t < s$ かつ $A \in \mathcal{F}_t$ としたとき、

$$\begin{aligned} E[1_A X_s] &= e^{-\lambda s(e^{-iu}-1)} E[1_A e^{iu(N_s-N_t)} e^{iuN_t}] \\ &= e^{-\lambda s(e^{-iu}-1)} E[e^{iu(N_s-N_t)}] E[1_A e^{iuN_t}] \end{aligned}$$

である。よって後は

$$E[e^{iu(N_s-N_t)}] = e^{\lambda(s-t)(e^{-iu}-1)}$$

が示せれば証明は完成したことになる。しかし、

$$\begin{aligned} E[e^{iu(N_s-N_t)}] &= e^{-\lambda(s-t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{iu}\lambda(s-t))^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda(s-t)} e^{e^{iu}\lambda(s-t)} \\ &= e^{\lambda(s-t)(e^{iu}-1)} \end{aligned}$$

となって確かに主張は正しい。

(b) このとき、

$$X_t = e^{-\lambda t(e-1)} e^{N_t}$$

となる。よって特に、

$$E[X_t] = e^{-\lambda t(e-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e\lambda t)^k}{k!} = e^{\lambda t} \rightarrow \infty$$

となって、 L^1 有界でない。よって一様可積分でもない。

問題 3.23 : (i) については、定理 9.3.5 の代わりに 9.3.4 を使うだけでよい。(ii) については、まず $Y_t = X_t$ とし、 $Y_\infty = E[Y|\mathcal{F}_\infty]$ と定義する。 $(Y_t, \mathcal{F}_t | 0 \leq t \leq \infty)$ が submartingale であることを示すことは極めて容易であり、右連続であることも定義から明らかである。よって定理 3.22 によって $E[Y_T|\mathcal{F}_{S^+}] \geq Y_S$ が言える。

ただし、注意しないといけないのは、 Y と違って X は $\{T = \infty\}$ 上で定義されていないことである。したがって出したい不等式 $E[X_T | \mathcal{F}_{S+}] \geq X_S$ も、これは $\{T < \infty\}$ に含まれる任意の $A \in \mathcal{F}_{S+}$ について

$$E[1_A X_T] \geq E[1_A X_S]$$

であるという主張になる。この点にだけ注意すれば、 $\{T < \infty\}$ 上で $X_T = Y_T$ かつ $X_S = Y_S$ であるので、主張は正しい。

定理 3.22 の他の主張は、定理 3.22 の証明でも省略されているが、証明は容易である。特に X_t が martingale であれば不等号が等号になることに注意。証明は、 $-X_t$ も submartingale であることを使えば容易である。

問題 3.24 : (i) このためには、任意の $s < t$ と $A \in \mathcal{F}_s$ について

$$E[1_A X_{T \wedge t}] \geq E[1_A X_{T \wedge s}]$$

であることが言えればよい。しかし、 $T \wedge t$ と $T \wedge s$ は共に有界な stopping time であり、さらに $T \wedge s \leq T \wedge t$ なので、問題 3.23 の (i) から

$$E[X_{T \wedge t} | \mathcal{F}_{T \wedge s}] \geq X_{T \wedge s}$$

がわかる。

任意の $A \in \mathcal{F}_s$ について、 $r < s$ ならば $A \cap \{T \wedge s \leq r\} = A \cap \{T \leq r\} \in \mathcal{F}_r$ であり、 $r \geq s$ ならば $A \cap \{T \wedge s \leq r\} = A \in \mathcal{F}_r$ であるので、 $A \in \mathcal{F}_{T \wedge s}$ である。これに気づけば、上の不等式からただちに

$$E[1_A X_{T \wedge t}] \geq E[1_A X_{T \wedge s}]$$

を得て、証明が終わる。

(ii) まず $T \wedge t$ と $S \wedge t$ は共に有界な stopping time であり、 $T \wedge t \geq S \wedge t$ なので、問題 3.23 の (i) から、

$$E[X_{T \wedge t} | \mathcal{F}_{S \wedge t}] \geq X_{S \wedge t}$$

を得る。ところで問題 2.17 の (ii) から、

$$E[X_{T \wedge t} | \mathcal{F}_{S \wedge t}] = E[E[X_{T \wedge t} | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_S]$$

である。 $T \wedge t \leq t$ なので $X_{T \wedge t}$ は \mathcal{F}_t 可測であり、よってここから

$$E[X_{T \wedge t} | \mathcal{F}_{S \wedge t}] = E[X_{T \wedge t} | \mathcal{F}_S]$$

を得る。これで示せた。

問題 3.25 : 仮に $E[X_t | \mathcal{F}_s] > X_s$ である点が正の測度で存在していたとしよう。 $T(\omega)$ を、上の不等式が成り立っているときには t 、成り立っていないときには s と置く。このとき T は容易にわかるように有界な stopping time である。よって問題 3.23 の (i) から

$$E[X_0] = E[X_t] \geq E[X_T]$$

を得る。一方で、定義から

$$E[X_T] > E[X_s] = E[X_0]$$

を得るが、これは矛盾である。

問題 3.26 : ヒントの通り。

問題 3.27 : ヒントの通り。

問題 3.28 : ヒントの通り。

問題 3.29 : $T_n = T \wedge n$ と置けばこれは有界な stopping time であり、単調に T に収束する。そこで $s < t$ として $1_A \in \mathcal{F}_{T_n+s}$ と置けば、問題 3.23 の (i) を $-X_t$ に適用することで

$$E[1_A(X_{T_n+t} - X_{T_n})] \leq E[1_A(X_{T_n+s} - X_{T_n})]$$

を得る。したがって特に $s = 0$ とすれば、

$$E[1_A(X_{T_n+t} - X_{T_n})] \leq 0$$

を得る。

さて、ここで $A \in \mathcal{F}_{T+t}$ かつ $A \subset \{T < \infty\}$ としよう。 $A_n = A \cap \{T \leq n\}$ とすれば、 $s < n+t$ のときは $A_n \cap \{T_n+t \leq s\} = A \cap \{T+t \leq s\} \in \mathcal{F}_s$ である。一方、

$s \geq n+t$ のときは $A_n \cap \{T_n + t \leq s\} = A_n = A \cap \{T + t \leq n+t\} \in \mathcal{F}_s$ である。よって $A_n \in \mathcal{F}_{T_n+t}$ であり、よって

$$0 \leq E[1_{A_n} X_{T+t}] = E[1_{A_n} (X_{T_n+t} - X_{T_n})] \leq 0$$

となつて、 $E[1_{A_n} X_{T+t}] = 0$ を得る。よって単調収束定理から $E[1_A X_{T+t}] = 0$ であり、したがって X_{T+t} は $\{T < \infty\}$ 上ほとんどすべての点で 0 である。

問題 3.30 : まず ξ_t は \mathcal{F}_t 可測である。次に $s < t$ とすれば、 $A \in \mathcal{F}_s$ に対して単調収束定理から、

$$E[1_A \xi_t] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[1_A X_t^{(n)}] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E[1_A X_s^{(n)}] = E[1_A \xi_s]$$

が言える。よって (ξ_t, \mathcal{F}_t) は supermartingale である。 $-\xi_t$ を取れば submartingale であり、よってもし $E[\xi_t]$ が右連続であれば、これに定理 3.13 を適用してもう一度 -1 倍すれば結論を得る。

したがって証明すべきは $E[\xi_t]$ の右連続性である。上で確認したように、 $E[\xi_t] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_t^{(n)}]$ であり、右辺は右連続である。 $t_m \downarrow t$ と仮定する。 $E[\xi_{t_m}]$ は m について増加的なので極限を持ち、それを α と置こう。 $\alpha \leq E[\xi_t]$ は明らかである。一方、任意の m について $E[X_{t_m}^{(n)}] \leq E[\xi_{t_m}] \leq \alpha$ なので、 m について極限を取って $E[X_t^{(n)}] \leq \alpha$ である。よって n について極限を取れば $E[\xi_t] \leq \alpha$ であり、よって $E[\xi_t] = \lim_{m \rightarrow \infty} E[\xi_{t_m}]$ であることがわかった。以上で証明が完成した。

1 - 4

注釈 4.6 への追記：ここには後で使う大切な議論がたくさんあるが、証明が抜けているので、適宜補っていききたい。

最初に証明しなければならないのは、 A が increasing で X が progressively measurable かつ I_t が finite であるときに、 I が右連続で progressively measurable であることである。このためには、 X が非負のときに証明すれば十分であることに注意する。次に、念のために I の定義を確認しておこう。いま、半直線 $[0, \infty)$ 上の測度 μ を、

$$\mu(\{0\}) = 0, \mu(]s, t]) = A_t - A_s$$

によって定義する。この定義から測度がすべて定義されることは Caratheodory の拡張定理からわかる。そこで、この測度 μ を使って、

$$I_t = \int_0^t X_s d\mu(s)$$

として定義したのが I である。このとき、 $t_n \downarrow t$ とすると、明らかに DCT から

$$I_{t_n} \rightarrow I_t$$

がわかるので、 I は右連続である。命題 1.13 から、後は adapted であることを示せばよい。このためには、固定した $t \geq 0$ に対して、 $X : [0, t] \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ が $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t])$ 可測な関数であるときには、 I_t が \mathcal{F}_t 可測であることを示せば十分である。

まず $X = 1_{\{0\} \times B}$ という形の process であるときを考えよう。ただし $B \in \mathcal{F}_t$ である。この場合、 $I_t \equiv 0$ となるので、明らかに I_t は \mathcal{F}_t 可測である。次に $X = 1_{]p, q] \times B}$ であるときには、 $I_t = 1_B(A_q - A_p)$ なのでこれも \mathcal{F}_t 可測である。したがって $X = 1_{J \times B}$ であるときに、 I_t が \mathcal{F}_t 可測である J は、 $\{0\}$ と $]p, q]$ が構成する代数を含む monotone class であり、よって任意の $J \in \mathcal{B}([0, \infty))$ について $X = 1_{J \times B}$ は I_t が \mathcal{F}_t 可測になる性質を持つ。

$J \times B$ の有限個の合併は代数を成し、それが生成する σ -代数が $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t])$ である。よって後は $X = 1_C$ について、 I_t が \mathcal{F}_t 可測になる C が monotone class であることを示せば、 X が 1_C の形である場合の証明が終わる。が、これは明らかである。(X が恒等的に 1 である関数で上から抑えられていることに注意)

したがって X が単関数であるときまでは主張は正しい。一般の非負可測関数に拡張するときには、単関数で下から各点収束するものを取ればよい。以上で証明は完成した。

次に、(ii) の主張については、 $\mu(\{t\}) = \lim_{s_n \uparrow t} \mu(]s_n, t]) = A_t - A_{t-}$ であることに注意すればよい。したがって A_t が continuous ならば $\mu(\{t\}) = 0$ である。一方で、 M_t の

ほとんどすべての sample pass は RCLL である。\$[0, t]\$ に含まれる \$s\$ で、\$s \le r \le \frac{1}{m}\$ である限り \$|M_r - M_s| \le \frac{1}{2n}\$ であるような \$s\$ の集合を \$T_n^m\$ と置くと、\$M_t\$ の右連続性から \$\cup_m T_n^m = [0, t]\$ である。このとき \$T_n^m\$ に入る任意の \$r\$ については \$|M_r - M_{r-}| \le \frac{1}{n}\$ である。よって \$S_n = \{s \in [0, t] \mid |M_s - M_{s-}| > \frac{1}{n}\}\$ と置けば、\$s \in S_n\$ のとき十分大きな \$m\$ について \$s \le r \le s + \frac{1}{m}\$ ならば \$r \notin S_n\$ であり、よって \$S_n\$ は離散集合である。コンパクト集合の離散部分集合は有限集合しかないので、\$S_n\$ は有限であり、よって \$\cup_n S_n\$ は可算であるが、\$S\$ は \$M_s\$ が \$[0, t]\$ 内で不連続である点に一致する。よって、

$$\int_0^t (M_s - M_{s-}) dA_s = \sum_{s \in S} \mu(\{s\})(M_s - M_{s-}) = 0$$

となって、主張が正しいことがわかる。

(iii) については言及しない。

問題 4.9 : ヒントの通り。足りないところは適当に Jensen の不等式を使えばよい。

定理 4.10 の証明への注釈 : \$(Y_T)_{T \in \mathcal{S}_a}\$ が一様可積分であることがきちんと証明されていない気がするので、補足しておく。

まず、\$Z_t\$ を \$E[X_a | \mathcal{F}_t]\$ の右連続な modification と置く。\$T \in \mathcal{S}_a\$ のとき、\$Z_T = E[X_a | \mathcal{F}_T]\$ であることを証明しよう。最初に、\$T\$ が有限個の値 \$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = a\$ しか取らない場合を考える。この場合、\$A \in \mathcal{F}_T\$ に対して \$A_i = A \cap \{T = t_i\} \in \mathcal{F}_{t_i}\$ であり、よって

$$\int_A Z_T dP = \sum_{i=1}^k \int_{A_i} Z_T dP = \sum_{i=1}^k \int_{A_i} Z_{t_i} dP = \int_A X_a dP$$

となって、主張が正しいことがわかる。次に一般の \$T\$ のときは、\$T(\omega) = a\$ のとき \$T_n(\omega) = a\$ とし、そうでないときには \$\frac{k}{2^n} \le T(\omega) < \frac{k+1}{2^n}\$ のときに \$T_n(\omega) = \frac{k+1}{2^n}\$ とする。このとき \$(Z_{T_n}, \mathcal{F}_{T_n})\$ は backward submartingale であり、さらに \$\cap_n \mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{F}_{T+} = \mathcal{F}_T\$ である。(最後の等号に usual condition を用いた) したがって、Chung の定理 9.4.8 から、

$$Z_T = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_{T_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_a | \mathcal{F}_{T_n}] = E[X_a | \mathcal{F}_T]$$

となって証明が終わる。

さて、\$Y_T = X_T - Z_T\$ である。まず、\$Z_T\$ が一様可積分であることを示す。このためには、まず \$(Z_T, \mathcal{F}_T, X_a, \mathcal{F}_a)\$ が martingale であることから、\$(|Z_T|, \mathcal{F}_T, |X_a|, \mathcal{F}_a)\$ が

submartingale であることを利用する。 $\{|Z_T| > \lambda\}$ が \mathcal{F}_T 可測であることを使えば、

$$\int_{\{|Z_T| > \lambda\}} |Z_T| dP \leq \int_{\{|Z_T| > \lambda\}} |X_a| dP$$

である。一方で、

$$P(\{|Z_T| > \lambda\}) \leq \frac{E[|Z_T|]}{\lambda} \leq \frac{E[|X_a|]}{\lambda}$$

であり、したがって任意に固定した $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな $\lambda > 0$ を取れば、

$$\int_{\{|Z_T| > \lambda\}} |Z_T| dP \leq \varepsilon$$

が T に関係なく言える。

次に Y_T と Y_0 はどちらも常に 0 以下で、 $(Y_0, \mathcal{F}_0, Y_T, \mathcal{F}_T)$ は submartingale なので、 $E[|Y_T|] \leq E[|Y_0|]$ である。一方で、 $\varepsilon > 0$ を固定すると、 (X_T) と (Z_T) の一様可積分性から、ある $\delta > 0$ が存在して、 $A \in \mathcal{F}_a$ かつ $P(A) < \delta$ であれば必ず

$$\int_A |X_T| dP < \frac{\varepsilon}{2}, \int_A |Z_T| dP < \frac{\varepsilon}{2}$$

が言える。このとき

$$\int_A |Y_T| dP < \varepsilon$$

である。Chung の定理 4.5.3 によればこれは (Y_T) の一様可積分性を意味する。以上で証明が完成した。

また、 (X_t) が D に所属していれば $E[A_\infty] < \infty$ であることの証明も、同じことに気を配らなければいけない。順に確かめていこう。 Y_t の定義は普通通りにでき、 $(Y_T)_{T \in \mathcal{S}}$ が一様可積分であることの証明もそのまま同じことが成り立つ (T_n の値が可算個になるが支障はない)。可算でも Doob 分解は可能であり、よって $\Pi_n = \{\frac{k}{2^n} | k \in \mathbb{Z}_+\}$ とすれば、 $Y_{t_j^n} = M_{t_j^n}^{(n)} + A_{t_j^n}^{(n)}$ という分解を持つことについては問題ない。ただし Y_∞ のところで定義されているかが問題である。このためには、 $A_\infty^{(n)} = \lim_{j \rightarrow \infty} A_{t_j^n}^{(n)}$ として、 $M_\infty^{(n)} = Y_\infty - A_\infty^{(n)}$ としたときに、 $M_{t_j^n}^{(n)} = E[M_\infty^{(n)} | \mathcal{F}_{t_j^n}^{(n)}]$ となっている必要がある。まず、 $(Y_{t_j^n})_j$ は一様可積分であるから、 Y_∞ に L^1 収束する。一方で

$$\int_{\{A_t^{(n)} > \lambda\}} A_t^{(n)} dP \leq \int_{\{A_\infty^{(n)} > \lambda\}} A_\infty^{(n)} dP$$

なので、 $A_\infty^{(n)}$ が可積分ならば $(A_{t_j^{(n)}}^{(n)})_j$ は一様可積分であることになる。しかし、

$$\int A_{t_j^{(n)}}^{(n)} dP = \sum_{k=0}^{j-1} \int (Y_{t_{k+1}^{(n)}} - Y_{t_k^{(n)}}) dP = \int (Y_{t_j^{(n)}} - Y_0) dP \leq |E[Y_0]|$$

が成り立つので、 $j \rightarrow \infty$ として単調収束定理から $A_\infty^{(n)}$ の可積分性を得る。

したがって $M_\infty^{(n)}$ も可積分であり、さらに任意の $B \in \mathcal{F}_{t_j^{(n)}}^{(n)}$ に対して

$$\begin{aligned} E[1_B M_\infty^{(n)}] &= E[1_B Y_\infty] - E[1_B A_\infty^{(n)}] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} E[1_B (Y_{t_k^{(n)}} - A_{t_k^{(n)}}^{(n)})] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} E[1_B M_{t_k^{(n)}}^{(n)}] \\ &= E[1_B M_{t_j^{(n)}}^{(n)}] \end{aligned}$$

である。よってきちんと $A_\infty^{(n)}$ と $M_\infty^{(n)}$ の定義ができたことになる。

(4.7) 式は $a = \infty$ でも問題なく出る。しかし、 $T_\lambda^{(n)}$ をそのまま定義するとこれは \mathcal{S} に所属しないために $A_\infty^{(n)}$ の一様可積分性の証明に支障が出る。ここは次のように修正する。 $T_{\lambda, m}^{(n)} = m \wedge \min\{t_{j-1}^{(n)} | A_{t_j^{(n)}}^{(n)} > \lambda, 1 \leq j \leq 2^m\}$ と定義しよう。このとき、 $\{T_{\lambda, m}^{(n)} \leq t_{j-1}^{(n)}\} = \{A_{t_j^{(n)}}^{(n)} > \lambda\} \in \mathcal{F}_{t_{j-1}^{(n)}}^{(n)}$ が $j = 1, \dots, 2^m$ について成り立ち、また $\{T_{\lambda, m}^{(n)} < m\} = \{A_m^{(n)} > \lambda\}$ も成り立つ。よって $T_{\lambda, m}^{(n)} \in \mathcal{S}$ である。Doob 分解の一意性から $a = m$ に対しても (4.7) は成り立ち、よって (4.8) も $\{T_{\lambda, m}^{(n)} < m\}$ 上で成り立つ。よって (4.9) の評価、(4.10) の評価もそのまま成り立ち、つまるところ

$$\int_{\{A_m^{(n)} > \lambda\}} A_m^{(n)} dP \leq -2 \int_{\{T_{\lambda/2, m}^{(n)} < m\}} Y_{T_{\lambda/2, m}^{(n)}} dP - \int_{\{T_{\lambda, m}^{(n)} < m\}} Y_{T_{\lambda, m}^{(n)}} dP$$

がわかる。したがって、 $\lambda > 0$ が十分に大きければ n, m に関係なく右辺は $\varepsilon > 0$ で抑えられ、よって左辺も抑えられるが、左辺の $m \rightarrow \infty$ のときの極限は $\int_{\{A_\infty^{(n)} > \lambda\}} A_\infty^{(n)} dP$ に等しいので、これが n に依存せず $\varepsilon > 0$ で抑えられることになる。こうして $A_\infty^{(n)}$ の一様可積分性が言えた。故に $A_\infty^{(n)}$ の部分列は弱収束極限 A_∞ を持つ。そこで

$$A_t = Y_t - E[A_\infty | \mathcal{F}_t]$$

と定義する。ただし $E[A_t]$ の右連続性から、これは右連続な modification を最初から取っておくことにする。

後の証明はまったく同じようにして A_t が natural increasing process であることを得る。 $E[A_\infty] \leq |E[Y_0]|$ なので A は可積分である。最後に、 M_t の一様可積分性は、 X_t が X_∞ に、 A_t が A_∞ に L^1 収束していることから容易に出る。

問題 4.11 : ヒントの通り。

問題 4.13 : 問題 4.9 から X_t は DL に属しており、よって $(X_{T_n})_n$ は一様可積分でかつ X_T に各点収束する。故に L^1 収束するが、これは $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_{T_n}] = E[X_T]$ を意味する。

問題 4.15 : ヒントの通りだが、 $G(0) = 0$ と定義しておかないといけない。

1 - 5

注釈 5.4 への追記: $\langle M \rangle_t = \lambda t$ であることを示しておく。そのためには、まず M_t が \mathcal{M}_2 に属することを確かめなければならない。計算すると、

$$\begin{aligned} E[N_t^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k(k-1) + k) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k+2}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k+1}}{k!} \\ &= (\lambda t)^2 + (\lambda t) \end{aligned}$$

となる。同様に $E[N_t] = \lambda t$ が示せるので、ここから

$$E[M_t^2] = E[N_t^2] - 2\lambda t E[N_t] + (\lambda t)^2 = \lambda t$$

となって $M_t \in \mathcal{M}_2$ が言える。また同様に、 $s < t$ のとき、

$$\begin{aligned} E[N_t - N_s | \mathcal{F}_s] &= \lambda(t - s), \\ E[(N_t - N_s)^2 | \mathcal{F}_s] &= (\lambda(t - s))^2 + \lambda(t - s) \end{aligned}$$

が言え、よって

$$\begin{aligned} E[N_t | \mathcal{F}_s] &= E[N_t - N_s | \mathcal{F}_s] + N_s = N_s + \lambda(t - s), \\ E[N_t^2 | \mathcal{F}_s] &= E[(N_t - N_s)^2 | \mathcal{F}_s] + 2N_s E[N_t | \mathcal{F}_s] - N_s^2 \\ &= (\lambda(t - s))^2 + \lambda(t - s) + 2N_s^2 + 2N_s \lambda(t - s) - N_s^2 \\ &= (N_s + \lambda(t - s))^2 + \lambda(t - s) \end{aligned}$$

が言える。よって、

$$\begin{aligned} E[M_t^2 - \lambda t | \mathcal{F}_s] &= E[N_t^2 | \mathcal{F}_s] - 2\lambda t E[N_t | \mathcal{F}_s] + (\lambda t)^2 - \lambda t \\ &= (N_s + \lambda(t - s))^2 + \lambda(t - s) - 2\lambda t (N_s + \lambda(t - s)) + (\lambda t)^2 - \lambda t \\ &= (N_s - \lambda s)^2 - \lambda s = M_s^2 - \lambda s \end{aligned}$$

となって、 $M_t^2 - \lambda t$ が martingale であることがわかる。よって $\langle M \rangle_t = \lambda t$ である。

問題 5.7: (i) は、 $(\alpha X + \beta Y)Z - \alpha \langle X, Z \rangle - \beta \langle Y, Z \rangle$ が martingale になることから、一意性命題によって直ちに従う。

(ii) は、 $YX - \langle X, Y \rangle$ が martingale であることから、正しい。

(iii) は、 $X + cY$ という martingale を考えれば、(i) と (ii) から

$$\langle X + cY \rangle = \langle X \rangle + 2c\langle X, Y \rangle + c^2\langle Y \rangle$$

を得るが、これは increasing process なので c によらず常に 0 以上である。もし $\langle Y \rangle_t(\omega) = 0$ ならば、これがすべての c について成り立つということは $\langle X, Y \rangle_t(\omega) = 0$ でなければいけないので、目指していた式が成り立つ。そうでない場合は判別式が 0 以下であることから、

$$\langle X, Y \rangle_t(\omega)^2 \leq \langle X \rangle_t(\omega)\langle Y \rangle_t(\omega)$$

が成り立ち、よって主張は正しい。

(iv) は、 $s = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t$ として、(iii) と同様の議論から

$$\begin{aligned} |\langle X, Y \rangle_{t_i} - \langle X, Y \rangle_{t_{i-1}}| &\leq \sqrt{(\langle X \rangle_{t_i} - \langle X \rangle_{t_{i-1}})(\langle Y \rangle_{t_i} - \langle Y \rangle_{t_{i-1}})} \\ &\leq \frac{1}{2}(\langle X \rangle_{t_i} - \langle X \rangle_{t_{i-1}} + \langle Y \rangle_{t_i} - \langle Y \rangle_{t_{i-1}}) \end{aligned}$$

を得る。ただし最後の不等号は相加相乗平均公式による。よって、

$$\sum_{i=1}^k |\langle X, Y \rangle_{t_i} - \langle X, Y \rangle_{t_{i-1}}| \leq \frac{1}{2}(\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s + \langle Y \rangle_t - \langle Y \rangle_s)$$

を得る。この右辺の t_0, \dots, t_k の取り方による上限が $\check{\xi}_t - \check{\xi}_s$ なので、主張は正しい。

問題 5.11 : ヒントが言葉足らずなので、補足する。

まず、 $q > p$ とする。 X が有界なときは、ヒントの通りに

$$V_t^{(q)}(\Pi) \leq V_t^{(p)}(\Pi) \max_k |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^{q-p}$$

を得る。このとき、 $V_t^{(p)}(\Pi)$ は L_t に確率収束し、 $\max_k |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^{q-p}$ は 0 に概収束している。そこで $\|\Pi\|$ が十分小さく、

$$P(\{V_t^{(p)}(\Pi) - L_t > \varepsilon\}) < \eta,$$

$$P(\{\max_k |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^{q-p} > \varepsilon\}) < \eta,$$

となるとする。このとき、上の両方の集合に入っていない任意の点について、

$$\begin{aligned} V_t^{(p)}(\Pi) \max_k |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^{q-p} &\leq (V_t^{(p)}(\Pi) - L_t) \max_k |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^{q-p} + L_t \max_k |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}| \\ &\leq \varepsilon^2 + L_t \varepsilon \end{aligned}$$

となる。よって集合 $\{L_t \leq M\}$ 上で上の値は $\varepsilon(M + \varepsilon)$ 以下で抑えられる。しかし $\bigcup_{M=1}^{\infty} \{L_t \leq M\} = \Omega$ なので、十分大きな M に対して $P(\{L_t \leq M\}) \geq 1 - \eta$ となる。したがって $\eta > 0$ に対してそのような M をあらかじめ取っておけば、 $\varepsilon' > 0$ について $\varepsilon(M + \varepsilon) \leq \varepsilon'$ となる $\varepsilon > 0$ を取って $\|\Pi\|$ を十分小さく取れば、 $P(\{V_t^{(q)}(\Pi) > \varepsilon'\}) < 3\eta$ を得る。以上で $q > p$ の場合が示せた。

後は問題ないと思われる。

問題 5.12 : ヒントの通り。なお、 $\langle X \rangle_{\infty}$ は単調性から定義されていることに注意する。

問題 5.14 : まず、 $(X + Y)$ についての $V_t^2(\Pi)$ を $Z_t(\Pi)$ 、 $(X - Y)$ についての $V_t^2(\Pi)$ を $W_t(\Pi)$ と置くと、 $\frac{1}{4}(Z_t(\Pi) - W_t(\Pi))$ が左辺と一致する。仮定から $Z_t(\Pi)$ は $\langle X + Y \rangle_t$ に、 $W_t(\Pi)$ は $\langle X - Y \rangle_t$ に確率収束するので、左辺は $\langle X, Y \rangle_t$ に確率収束する。

問題 5.17 : ヒントの通り。

問題 5.19 : (i) について。まず $T_n \uparrow \infty$ かつ $X_t^{(n)} = X_{t \wedge T_n}$ が martingale であるとする。このとき $t \wedge T_n$ は \mathcal{F}_t に所属するので $X_t^{(n)}$ は n について uniformly integrable であり、また X_t に概収束するので、 L^1 収束する。したがって X_t は可積分である。さらに $s < t$ としたときに、 $A \in \mathcal{F}_s$ に対して

$$E[1_A X_t] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[1_A X_t^{(n)}] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[1_A X_s^{(n)}] = E[1_A X_s]$$

となって、 $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ がわかる。

(ii) について。同様に $X_t^{(n)} = X_{t \wedge T_n}$ と定義する。このとき、まず $A \in \mathcal{F}_s$ とすると Fatou の補題から、

$$E[1_A X_t] = E[\lim_{n \rightarrow \infty} 1_A X_t^{(n)}] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E[1_A X_t^{(n)}]$$

であるので、

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] = \liminf_{n \rightarrow \infty} X_s^{(n)} = X_s$$

となって結論を得る。

(iii) について。 $M_t^{(n)} = M_{t \wedge T_n}$ とすれば $M_S^{(n)} = M_{S \wedge T_n} = M_{S \wedge T_n}^{(n)}$ である。必要ならば T_n を $T_n \wedge n$ と取り替えて、 T_n が有界だと仮定してよい。さらに問題 5.17 のように

T_n を変えて、 $\langle M^{(n)} \rangle_t = \langle M \rangle_{t \wedge T_n}$ であるとしてよい。このとき、

$$X_t^{(n)} = (M_t^{(n)})^2 - \langle M^{(n)} \rangle_t$$

は martingale である。また先ほどの結果から $\langle M^{(n)} \rangle_S = \langle M^{(n)} \rangle_{S \wedge T_n}$ なので、問題 3.23 から

$$E[X_S^{(n)}] = E[X_{S \wedge T_n}^{(n)}] = E[X_0^{(n)}] = 0$$

がわかる。よって

$$E[M_S^2] = E[\liminf_{n \rightarrow \infty} (M_S^{(n)})^2] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E[(M_S^{(n)})^2] = \liminf_{n \rightarrow \infty} E[\langle M^{(n)} \rangle_S]$$

が言える。ところが $\langle M^{(n)} \rangle_t \leq \langle M \rangle_t$ なので、ここからただちに

$$E[M_S^2] \leq E[\langle M \rangle_S]$$

を得る。

問題 5.20 : 用語の定義がないので、stationary, independent increment という用語の意味を書いておく。まず、stationary increment という意味は、 $X_t - X_s$ の分布が X_{t-s} の分布と等しいという意味である。また independent increment とは、 \mathcal{F}_s と $X_t - X_s$ が independent という意味である。この条件の下で示す。

まず、 $E[X_{st}^2] = tE[X_s^2]$ を示す。 t が自然数 n のとき、

$$E[X_{ns}^2] = \sum_{k=1}^n E[X_{ks}^2 - X_{(k-1)s}^2] = \sum_{k=1}^n E[(X_{ks} - X_{(k-1)s})^2] = nE[X_s^2]$$

となる。 t が $\frac{1}{n}$ のときには、

$$E[X_s^2] = nE[X_{\frac{s}{n}}^2]$$

から、両辺を n で割れば結論を得る。合わせると、 t が有理数のときには正しいことがわかる。実数に変えるためには X の右連続性から $E[X_s^2]$ が s について右連続であることを利用すればよい。(定理 3.13)

したがって証明すべきは、 $E[X_t^2 - E[X_t^2] | \mathcal{F}_s] = X_s^2 - E[X_s^2]$ である。これは $E[(X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_s] = E[(X_t - X_s)^2]$ と同値であるが、 $(X_t - X_s)^2$ は \mathcal{F}_s と独立であるため、これは正しい。

問題 5.21 : $X_{t \wedge S_n}$ が martingale で、かつ $S_n \uparrow \infty$ とする。ここで T_n を定理 5.8 と同じものと S_n の小さい方とすれば、 $X_{t \wedge T_n}$ も martingale で、 $T_n \uparrow \infty$ である。 $X_{t \wedge T_n}$ は有界、したがって \mathcal{M}_2^c の元であるから、定理 5.8 の最後の等式が成り立つ。ここから同じロジックで 5.8 の結論を得る。

次に、問題 5.17 の解答にあるように、適切に S_n を取れば $\langle X^{(n)} \rangle_t = \langle X \rangle_{t \wedge S_n}$ となる。このとき $\langle X^{(n)} \rangle_T = \langle X \rangle_{T \wedge S_n}$ であるから、条件から $X_t^{(n)} = 0$ がすべての n と t についてほとんどすべての点で成り立つ。 $n \rightarrow \infty$ とすれば $X_t^{(n)} \rightarrow X_t$ なので、問題 5.12 の結論も正しい。

問題 5.24 : ヒントの通り。

問題 5.25 : ヒントの通り。

問題 5.26 : 問題 5.17 と同じようにして stopping time の列 T_n と S_n を取って $M_{t \wedge T_n}$ と $N_{t \wedge S_n}$ が bounded martingale であるように、かつ $T_n \uparrow \infty$ と $S_n \uparrow \infty$ が成り立つようにする。まず $M_t^{(n)} = M_{t \wedge T_n}$ として、 $(M_t^{(n)}, \mathcal{H}_t)$ が martingale であることを示す。 $s < t$ として、 \mathcal{C} を \mathcal{F}_s の元と \mathcal{G}_s の元の共通部分として書ける元の全体とする。いま $A \in \mathcal{F}_s$ かつ $B \in \mathcal{G}_s$ とすれば、

$$E[1_{A \cap B} M_t^{(n)}] = E[1_B] E[1_A M_t^{(n)}] = E[1_B] E[1_A M_s^{(n)}] = E[1_{A \cap B} M_s^{(n)}]$$

となる。そこで \mathcal{H}_s の元で、 $E[1_A M_t^{(n)}] = E[1_A M_s^{(n)}]$ を満たすものを考えると、これは \mathcal{C} を含む。 \mathcal{C} は共通部分操作について閉じているので、あとはこのような集合族が Dynkin System であることを示せばよい。しかしこれは極めて容易である。よって $E[M_t^{(n)} | \mathcal{H}_s] = M_s^{(n)}$ である。同様にして $N_t^{(n)} = N_{t \wedge S_n}$ としたときに $E[N_t^{(n)} | \mathcal{H}_s] = N_s^{(n)}$ も言える。

次に、 $E[M_t^{(n)} N_t^{(n)} | \mathcal{H}_s] = M_s^{(n)} N_s^{(n)}$ を言おう。やはり $A \in \mathcal{F}_s$ かつ $B \in \mathcal{G}_s$ のとき、

$$E[1_{A \cap B} M_t^{(n)} N_t^{(n)}] = E[1_A M_t^{(n)}] E[1_B N_t^{(n)}] = E[1_A M_s^{(n)}] E[1_B N_s^{(n)}] = E[1_{A \cap B} M_s^{(n)} N_s^{(n)}]$$

であるから、 \mathcal{H}_s の元で $E[1_A M_t^{(n)} N_t^{(n)}] = E[1_A M_s^{(n)} N_s^{(n)}]$ を満たすものの集合は \mathcal{C} を含む Dynkin System となる。したがって $E[M_t^{(n)} N_t^{(n)} | \mathcal{H}_s] = M_s^{(n)} N_s^{(n)}$ である。ところで $R_n = T_n \wedge S_n$ と置くとこれは \mathcal{H}_t に付随する stopping time であり、よって

$\tilde{M}_t^{(n)} = M_{t \wedge R_n} = M_{t \wedge R_n}^{(n)}$ とし、 $\tilde{N}_t^{(n)} = N_{t \wedge R_n} = N_{t \wedge R_n}^{(n)}$ と置けば、 $(\tilde{M}_t^{(n)}, \tilde{N}_t^{(n)}, \mathcal{H}_t)$ は martingale である。(問題 3.24) これで $(M_t, N_t, \mathcal{H}_t)$ が local martingale であることが言えた。

残りの主張を示すために、まず $\tilde{\mathcal{H}}_0$ は \mathcal{N} を含む。次に明らかに $s < t$ のとき $\tilde{\mathcal{H}}_s \subset \tilde{\mathcal{H}}_t$ である。後は右連続性だけ言えればよい。しかしこれも定義から明らかであるので、 $\tilde{\mathcal{H}}_t$ は確かに usual conditions を満たす。ここで $\mathcal{H}_t \subset \tilde{\mathcal{H}}_t$ なので、 S_n, T_n, R_n はどれも $\tilde{\mathcal{H}}_t$ の stopping time である。

後は、 (X_t, \mathcal{H}_t) が continuous bounded martingale であるときに $(X_t, \tilde{\mathcal{H}}_t)$ も martingale であることが言えればよい。このために、まず $A \in \mathcal{H}_s$ と $B \in \mathcal{N}$ の対称差 $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ で書ける集合の族が $\sigma(\mathcal{H}_s \cup \mathcal{N})$ であることに注意する。これは極めて容易に示せる。このとき、明らかに

$$E[1_{A \Delta B} X_t] = E[1_A X_t] = E[1_A X_s] = E[1_{A \Delta B} X_s]$$

となる。そこで $A \in \tilde{\mathcal{H}}_s$ であったとすれば、 $t_n \downarrow s$ となる点列を取ってくれば、

$$E[1_A X_t] = E[1_A X_{t_n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[1_A X_{t_n}] = E[1_A X_s]$$

となって証明が完成する。