2 − 1

本論に入る前に、さらっと書いてある「任意の $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$ を満たす列に対して $(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})_{k=1}^n$ が独立である」ことと、「$t > s \geq 0$ であるときに $B_t - B_s$ と $\mathscr{F}_s^B$ が独立である」ことが同値であるかどうかを確認しておきたい。

まず、後者から前者を示す。このためには、$A_1, ..., A_n$ を $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ の元として、$(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^{-1}(A_k)$ を C_k としたときに、$P(C_1 \cap ... \cap C_n) = P(C_1)...P(C_n)$ が成り立つことを示せばよい。これは帰納法によって $P(C_1 \cap ... \cap C_n \cap C_{n+1}) = P(C_1 \cap ... \cap C_n)P(C_{n+1})$ だけが言えればよいが、$\mathscr{F}_s^B$ は $C_1 \cap ... \cap C_n$ を含むため、主張は正しい。

次に前者から後者を示す。このために、$\mathscr{F}_s^B$ の具体的な形を記述しておく。これは、$0 \leq u < s \leq t$ についての $(B_s - B_u)^{-1}(A)$ という形の集合（ただし $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$）と、$\mathscr{F}_0^B$ の元の有限個の共通部分からなる集合を $\mathscr{C}$ とすれば、$\mathscr{C} \subset \mathscr{F}_s^B$ である。$\mathscr{C}$ が生成する σ-代数はすべての $B_s - B_u$ を可測にし、また B_0 も可測にするので、B_s も可測にする。よってそれは $\mathscr{F}_s^B$ と一致する。一方で、$C \in \mathscr{C}$ であり、$D = (B_t - B_s)^{-1}(A)$ であれば、前者の仮定から $P(C \cap D) = P(C)P(D)$ である。（ここで $\mathscr{F}_0^B$ の元は測度 0 か 1 しか持たないことを用いている。）後は、$P(C \cap D) = P(C)P(D)$ を満たす集合が Dynkin system であることを示せば定理 1.3 から主張が示せる。が、これは明白である。

なお、上の証明のうち、後者から前者は、$\mathscr{F}_t^B$ ではないが B_t が adapted になる $\mathscr{F}_t$ を用いても出てくる。よってブラウン運動は常に「任意の $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$ を満たす列に対して $(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})_{k=1}^n$ が独立である」を満たす。またこのとき、

$$\begin{aligned} E[B_t^2 - t|\mathscr{F}_s] &= E[(B_t - B_s)^2|\mathscr{F}_s] + 2E[B_s(B_t - B_s)|\mathscr{F}_s] \\ &\quad + E[B_s^2|\mathscr{F}_s] - t \\ &= E[(B_t - B_s)^2] + 2E[B_t - B_s]B_s + B_s^2 - t \\ &= t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s \end{aligned}$$

となるので、$(B_t^2 - t)_t$ はマルチンゲールである。したがって $\langle B \rangle_t = t$ がわかる。

問題 1.4：ヒントの通り。

2 − 2

問題 2.3：ヒントの通り。

問題 2.4：ヒントの通り。

問題 2.5：解くついでに、(2.5) 式から導入される $Q_{\underset{\sim}{s}}$ について、$(B_{s_j} - B_{s_{j-1}})_{j=1}^n$ が independent かつ $B_{s_j} - B_{s_{j-1}}$ が平均 0、分散 $s_j - s_{j-1}$ の正規分布に従うようにする consistent な族を規定することを確かめておく。

まず、$Q_0 = \delta_{\{0\}}$ としておく。$0 < s_1 < .... < s_n$ のとき、

$$Q_{\underset{\sim}{s}}(A_1 \times ... \times A_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(s_i - s_{i-1})}} \int_{A_1} ... \int_{A_n} e^{\frac{-y_1^2}{2s_1}} ... e^{\frac{-(y_n - y_{n-1})^2}{2(s_n - s_{n-1})}} dy_n ... dy_1$$

と定義する。これはただちに、一般の $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$Q_{\underset{\sim}{s}}(A) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(s_i - s_{i-1})}} \int ... \int_A e^{\frac{-y_1^2}{2s_1}} ... e^{\frac{-(y_n - y_{n-1})^2}{2(s_n - s_{n-1})}} dy_n ... dy_1$$

を意味する。

一般の $\underset{\sim}{s}$ の場合、$s_i = 0$ となる i がなければ、上のものから consistent になるように $Q_{\underset{\sim}{s}}$ を定義する。$s_i = 0$ となる i があれば、A_i が 0 を含まない時は 0、含むときは s_i を除外したものを利用して同じように定義する。こうしてできたものが consistent になることは明確なので、$\mathscr{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$ 上の測度 P が存在する。この測度を使って、確率過程 $B_t(\omega) = \omega(t)$ と定義しよう。

まず、$P(\{B_0 = 0\}) = 1$ である。よって $\mathscr{F}_0^B$ は、測度 0 の集合と測度 1 の集合のみから構成される。故に、任意の関数は $\mathscr{F}_0^B$ と独立である。

次に進む前に、$C = \{B_t - B_s \in A\}$ が可測であることを示しておこう。このためには、$\{(x, y) | y - x \in A\}$ が $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ の元として可測であることを示せばよい。A が閉集合ならばこれも閉集合なので可測である。よって後は、これが可測である A が σ-代数を構成していることを示せばよい。しかしこれは明白である。

次に、

$$P(\{B_s - B_0 \in A\}) = P(\{B_s \in A\}) = Q_s(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_A e^{\frac{-x^2}{2s}} dx$$

である。よって確かに $n = 1$ のときに主張は正しい。

今度は $n=k$ まで主張が正しかった、つまり $(B_{s_i}-B_{s_{i-1}})_{i=1}^k$ は互いに独立であったと仮定する。これは任意の $A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ について、$C_i=(B_{s_i}-B_{s_{i-1}})^{-1}(A_i)$ としたとき、$P(C_1\cap ... \cap C_k)=P(C_1)...P(C_k)$ が常に成立するということである。したがって次に証明するべきは、$n=k+1$ のときに $A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ として同様に $C_i=(B_{s_i}-B_{s_{i-1}})^{-1}(A_i)$ としたとき、$P(C_1\cap ... \cap C_{k+1})=P(C_1\cap ... \cap C_k)P(C_{k+1})$ であることを証明することである。しかしこれは、

$$
\begin{aligned}
P(C_1\cap ... \cap C_{k+1}) &= \prod_{i=1}^{k+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi(s_i-s_{i-1})}}\int_{A_1}\int_{A_2+y_1}\cdots\int_{A_{k+1}+y_k} e^{\frac{-y_1^2}{2s_1}}...e^{\frac{-(y_{k+1}-y_k)^2}{2(s_{k+1}-s_k)}}dy_{k+1}...dy_1 \\
&= \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{2\pi(s_i-s_{i-1})}}\int_{A_1}\int_{A_2+y_1}\cdots\int_{A_k+y_{k-1}} \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi s_{k+1}-s_k}}\int_{A_{k+1}} e^{\frac{-z^2}{2(s_{k+1}-s_k)}}dzdy_k...dy_1 \\
&= P(C_1\cap ... \cap C_{k+1})P(\{B_{s_{k+1}-s_k}\in A_{k+1}\})
\end{aligned}
$$

であることが計算でわかる。さらに $A_1,...,A_k$ を $\mathbb{R}$ として取れば $P(\{B_{s_{k+1}-s_k}\in A_{k+1}\})=P(C_{k+1})$ がわかり、よって主張は正しい。このとき同時に $B_{s_{k+1}}-B_{s_k}$ の分布が $B_{s_{k+1}-s_k}$ の分布と等しいことがわかったので、主張はすべて正しいことがわかる。

問題 2.7 : ヒントにある E が空集合でなければ、それが連続でない関数を含むのは明らかである。これらの集合は σ-代数を構成するので、これが $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$ に等しい。

問題 2.9 : ヒントの通り。

問題 2.10：実際、変数変換と部分積分から、

$$\begin{aligned}
E[(B_t - B_s)^{2n}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{\frac{-x^2}{2(t-s)}} dx \\
&= \frac{(t-s)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \\
&= \frac{(t-s)^n}{\sqrt{2\pi}} (2n-1) \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-2} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \\
&= \ldots \\
&= \frac{(t-s)^n}{\sqrt{2\pi}} \prod_{i=1}^{n} (2i-1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \\
&= (t-s)^n \prod_{i=1}^{n} (2i-1)
\end{aligned}$$

であることがわかる。

注釈 2.12 への追記：実際のところ、定理 2.8 の Ω^* が γ に依存しているため、正しくないように思える。このためには、Ω^* を有理数の γ について取って共通部分を取っておき、それによって W_t を定義するといい。

再追記：正しいように思えてきた。実際、γ に依存して modify したとしても、modify の前の sample pass も後の sample pass も連続なので、indistinguishable であり、よって γ の大きい方の主張が通る。

2 − 3

問題 3.3 : (i) まず、

$$\zeta^{(n)}_{\frac{j}{2^n},\frac{k}{2^n}} = E[(B^{(n)}_{\frac{k}{2^n}} - B^{(n)}_{\frac{k-1}{2^n}})(B^{(n)}_{\frac{j}{2^n}} - B^{(n)}_{\frac{j-1}{2^n}})]$$

と定義する。$\zeta^{(n)}_{ab} \equiv 0$ であれば、正規分布については無相関と独立は同値なので、主張が示せることになる。そこでこれを証明の目標とする。

まず、

$$E[(B^{(1)}_1 - B^{(1)}_{\frac{1}{2}})(B^{(1)}_{\frac{1}{2}} - B_0)] = \frac{1}{4}E[(\xi^{(0)}_1)^2 - (\xi^{(1)}_1)^2] = 0$$

となって、$n = 1$ のときに主張は正しい。

次に帰納的に $m < n$ ならば $\zeta^{(m)}_{ab} = 0$ が示せているとする。いま k が奇数なとき、$B^{(n)}_{\frac{k}{2^n}} = \frac{1}{2}(B^{(n)}_{\frac{k+1}{2^n}} + B^{(n)}_{\frac{k-1}{2^n}}) + 2^{-\frac{n+1}{2}}\xi^{(n)}_k$ と書ける。さらに、$B^{(n)}_{\frac{\ell}{2^{n-1}}} = B^{(n-1)}_{\frac{\ell}{2^{n-1}}}$ であり、これは帰納的に $m < n$ に対する $\xi^{(m)}_j$ の線形結合で、よって $\xi^{(n)}_k$ と独立であることが示せる。

したがって、$j < k$ であるときに、もし $j < k$ かつ j が偶数ならば、

$$\zeta^{(n)}_{\frac{j}{2^n}\frac{k}{2^n}} = E[(B^{(n)}_{\frac{k}{2^n}} - B^{(n)}_{\frac{k-1}{2^n}})(B^{(n)}_{\frac{j}{2^n}} - B^{(n)}_{\frac{j-1}{2^n}})] = \frac{1}{2}\zeta^{(n-1)}_{\frac{j}{2^n}\frac{k+1}{2^n}} = 0$$

である。また j が奇数ならば、同様にして

$$\zeta^{(n)}_{\frac{j}{2^n}\frac{k}{2^n}} = \frac{1}{2}\zeta^{(n-1)}_{\frac{j+1}{2^n}\frac{k+1}{2^n}} = 0$$

である。これで示せた。

(ii) これは $t = \frac{k}{2^n}$ のときに $B_t = B^{(n)}_t$ であることから明らかである。

(iii) これは、各 t_k に上から収束する dyadic rational の列 $t^{(m)}_k$ を取ってやれば、

$$\begin{aligned} E[e^{i\sum_{k=1}^n (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})x_k}] &= \lim_{m\to\infty} E[e^{i\sum_{k=1}^n (B_{t^{(m)}_k} - B_{t^{(m)}_{k-1}})x_k}] \\ &= \lim_{m\to\infty} e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n x_k^2 (t^{(m)}_k - t^{(m)}_{k-1})} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n x_k^2 (t_k - t_{k-1})} \end{aligned}$$

となって、確かに結論を得る。

２－４

問題 4.1：まず、ρ が距離であることは明白である。この距離について、有理係数の多項式は稠密であり、よってこの空間は可分である。最後に、(ω_n) がこの空間の Cauchy 列であるとすれば、仮定からすべての N について $[0,N]$ 上で ω_n は一様収束している。明らかにその収束先 ω が (ω_n) の収束先である。したがってこの空間は完備である。

問題 4.2：ヒントの通り。

問題 4.5：f が連続なら $f\circ\varphi$ も連続なので、これは当たり前である。

問題 4.8：まず ρ の定義から、任意の t に対して、$\rho(\omega_1,\omega_2)\ge(|\omega_1(t)-\omega_2(t)|\wedge 1)$ が成り立つ。そこで $\varepsilon>0$ を取ったときに、$\rho(\omega,\omega_1)<\frac{\varepsilon}{2}\wedge 1$ とすれば、$s,t\in[0,N]$ かつ $|s-t|\le\delta$ のときに、

$$|\omega_1(s)-\omega_1(t)|\le|\omega_1(s)-\omega(s)|+|\omega(s)-\omega(t)|+|\omega(t)-\omega_1(t)|\le m^T(\omega,\delta)+\varepsilon$$

となるため、上限を取ってやれば

$$m^T(\omega_1,\delta)\le m^T(\omega,\delta)+\varepsilon$$

となる。

　まったく同じロジックで、

$$m^T(\omega,\delta)\le m^T(\omega_1,\delta)+\varepsilon$$

も得る。したがって $m^T(\omega,\delta)$ は ω について連続である。これが δ について非減少であることは定義から明らかである。最後に、ω は $[0,T]$ 内で一様連続なので、任意に小さな $\varepsilon>0$ に対して十分に小さな $\delta>0$ を取れば $m^T(\omega,\delta)<\varepsilon$ となる。

問題 4.11：ヒントの通り。

問題 4.12：まず (P_n) は収束するので tight であり、よって任意の $\varepsilon>0$ に対してあるコンパクト集合 K が存在して、$P_n(K)\ge 1-\varepsilon$ が常に成り立つ。$g_n(\omega)=\max\{1-2^n\inf_{\omega'\in K}\rho(\omega,\omega'),0\}$ とすればこの関数は連続で、1_K に各点収束する。したがって弱収

束の仮定からやはり $P(K) \geq 1-\varepsilon$ である。ここで K の外側では f_n と f の値は有界なので、その上限を M とすると、

$$\left|\int f_n dP_n - \int f dP\right| \leq \left|\int_K (f_n - f) dP_n\right| + \left|\int_K f dP_n - \int_K f dP\right| + 2M\varepsilon$$

となる。しかし f_n は K 上で一様に f に収束しているので、十分大きな n については上の和は $(2+2M)\varepsilon$ で抑えられる。

問題 4.14：有限個の点 $(t_1, ..., t_d)$ を取ってくれば、$(X_{t_1}^{(n)}, ..., X_{t_d}^{(n)})$ は 0 に各点収束しているので、有限次元の分布では収束している。しかし、定理 4.10 の (4.7) の仮定を満たさないので、$X^{(n)}$ の分布はどこにも収束しない。($\rho(X^{(n)}, X) \to 1$ となるのが原因だと思われる。)

問題 4.16：ヒントの通り。

２－５
問題 5.2 : ヒントの通り。

問題 5.4 : まず、P^μ が確率測度であることを確かめなければならない。しかしこれは、単調収束定理と $P^x(\Omega)\equiv 1$ であることからわかる。次に、

$$P^\mu(\{B_0\in\Gamma\})=\int P^x(\{B_0\in\Gamma\})d\mu=\int 1_\Gamma d\mu=\mu(\Gamma)$$

となる。さらに、任意の可測実数値関数 f に対して、

$$\int fdP^\mu=\int\int fdP^x d\mu$$

であること（ただし、どちらかが定義できるときに限り）が示せる。これは $f=1_A$ であれば定義からただちにわかり、一般の場合は単調収束定理による。さらにまた、任意のベクトル値関数に対して

$$\int fdP^x=\int f(\omega-x)dP^0$$

であることも、同様に示せる。

よって任意の $r\le s<t$ と $C,D\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して、まず

$$\begin{aligned}P^\mu(\{B_t-B_s\in C\})&=\int 1_C(B_t-B_s)dP^\mu\\&=\int\int 1_C(B_t-B_s)dP^x d\mu\\&=\int\int 1_C(B_t-B_s)dP^0 d\mu\\&=P^0(\{B_t-B_s\in C\})\end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned}
P^\mu(\{B_r \in C\} \cap \{B_t - B_s \in D\}) &= \int 1_C(B_r) 1_D(B_t - B_s) dP^\mu \\
&= \int\int 1_C(B_r) 1_D(B_t - B_s) dP^x d\mu \\
&= \int\int 1_C(B_r - x) \cdot 1_D(B_t - B_s) dP^0 d\mu \\
&= \int P^0(\{B_r \in C + x\} \cap \{B_t - B_s \in D\}) d\mu \\
&= \int P^0(\{B_r \in C + x\}) P^0(\{B_t - B_s \in D\}) d\mu \\
&= P^0(\{B_t - B_s \in D\}) \int P_0(\{B_r \in C + x\}) d\mu \\
&= P^\mu(\{B_t - B_s \in D\}) P^\mu(\{B_r \in D\})
\end{aligned}$$

となり、B_r と $B_t - B_s$ は独立である。したがって $\mathscr{F}_s^B$ と $B_t - B_s$ も独立である。最後に、

$$\int (B_t - B_s)(B_t - B_s)^T dP^\mu = \int\int (B_t - B_s)(B_t - B_s)^T dP^0 d\mu = (t - s)I$$

となって、確かに共分散が 0 であることがわかる。

問題 5.5：実際、

$$\begin{aligned}
E[M_t^{(i)} | \mathscr{F}_s] &= E[B_t^{(i)} - B_s^{(i)} | \mathscr{F}_s] + B_s^{(i)} - B_0^{(i)} \\
&= M_s^{(i)}
\end{aligned}$$

となるので $M_t^{(i)}$ は martingale である。そして、

$$\begin{aligned}
E[M_t^{(i)} M_t^{(j)} | \mathscr{F}_s] &= E[B_t^{(i)} B_t^{(j)} | \mathscr{F}_s] - B_s^{(i)} B_0^{(j)} - B_s^{(j)} B_0^{(i)} + B_0^{(i)} B_0^{(j)} \\
&= E[(B_t^{(i)} - B_s^{(i)}) B_t^{(j)} | \mathscr{F}_s] + (B_s^{(i)} - B_0^{(i)})(B_s^{(j)} - B_0^{(j)}) \\
&= E[(B_t^{(i)} - B_s^{(i)})(B_t^{(j)} - B_s^{(j)}) | \mathscr{F}_s] + M_s^{(i)} M_s^{(j)} \\
&= M_s^{(i)} M_s^{(j)} + (t - s)\delta_{ij},
\end{aligned}$$

となるので、$\langle M^{(i)}, M^{(j)} \rangle = t\delta_{ij}$ である。独立性は明白。

問題 5.7：ヒントの通り。

問題 5.9 : (5.5) についてはヒントの通り。

(5.6) をやるに当たって、記号の確認をしておく。$E[X|Y]$ は、Y を可測にする最小の σ-代数による X の条件付き期待値である。このとき、$E[X|Y]$ は Y を可測にする最小の σ-代数について可測であり、したがってある可測関数 g が存在して $E[X|Y]=g(Y)$ と書ける（Dudley の定理 4.2.8)。この関数 g に対して、$g(y)$ のことを $E[X|Y=y]$ と書くという風に約束して、(5.6) 式は「右辺を $g(y)$ と定義すると、左辺の要件を満たす」という意味で捉えて証明する。

さて、再び (5.5) と同様に、$D\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$ として、

$$P[(X,Y)\in D|Y=y]=P[(X,y)\in D]$$

を証明しよう。まず、D が $B\times C$ という形の時を考える。関数

$$g(y)=1_C(y)P[X\in B]$$

と定義すると、この g は当然可測である。これが右辺の関数である。次に、これに Y を代入して、可測集合 $Y^{-1}(F)$ 上で期待値を取ると、

$$E[g(Y)1_{Y^{-1}(F)}]=E[1_C(Y)1_F(Y)P[X\in B]]=P[X\in B]P[Y\in C\cap F]$$

となる。ところが、$Y^{-1}(C\cap F)$ は $X^{-1}(B)$ と独立なので、右辺は

$$P[X\in B,Y\in C\cap F]=E[1_{Y^{-1}(F)}1_D(X,Y)]$$

と等しい。故に $g(Y)=P[(X,Y)\in D|Y]$ であることがわかった。こうして $D=B\cap C$ のときの証明は完成した。

$D=\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ であるときは、上からただちに主張が成り立つことがわかる。

$D_1\subset D_2$ であり、D_1 と D_2 について主張が成り立つとする。$D=D_2\setminus D_1$ とすれば、

$$P[(X,y)\in D]=P[(X,y)\in D_2]-P[(X,y)\in D_1]\equiv g_2(y)-g_1(y)$$

であり、定義によって任意の $Y^{-1}(F)$ に対して

$$E[1_{Y^{-1}(F)}1_{D_i}]=E[1_{Y^{-1}(F)}g_i(Y)]$$

であることがわかっている。したがって差を取れば、

$$E[1_{Y^{-1}(F)}1_D]=E[1_{Y^{-1}(F)}(g_2(Y)-g_1(Y))]$$

となって、たしかに主張が正しいことがわかる。

最後に、(D_i) は主張が成り立つ単調列で $D = \cup_i D_i$ とする。このとき、

$$P[(X,y) \in D] = \lim_{i\to\infty} P[(X,y) \in D_i] \equiv \lim_{i\to\infty} g_i(y)$$

であり、この収束は単調収束である。ここで任意の $Y^{-1}(F)$ に対して、

$$E[1_{Y^{-1}(F)} 1_D] = \lim_{i\to\infty} E[1_{Y^{-1}(F)} 1_{D_i}] = \lim_{i\to\infty} E[1_{Y^{-1}(F)} g_i(Y)] = E[1_{Y^{-1}(F)} g(Y)]$$

である。以上で、要件を満たす D が Dynkin system であることがわかった。よって任意の D が主張を満たす。あとは、$D = \{(x,y) | x + y \in \Gamma\}$ と定義すればよい。

注釈 5.14 への追記：マルコフ過程の定義に可測性を追加するべきではないか？

定理 5.15 の (d') の証明：念のためにやっておく。

まず、主張を整理しておく。(d') の右辺の関数 $g_F(y) \equiv P^y[X. \in F]$ は Markov family の仮定 (a) から universally measurable である。この積分に関して、

$$\int_{X_s^{-1}(\Gamma)} g_F(X_s) dP^x = P^x[X_s \in \Gamma, X_{s+.} \in F]$$

が成り立っているというのが (d') の主張である。

先に進む前に、上の積分が well-defined であるかについて問うておきたい。$P^x \circ X_s^{-1}$ の定義域はあくまで Borel 集合であり、その $P^x \circ X_s^{-1}$ についての完備化ではない。よって g_F の積分は厳密には定義できないように思われる。しかし、これは、完備に拡張した測度の積分だと定義すれば問題なく定義できる。したがって、積分値はきちんと定義されている。もちろん、この拡張によって積分値は変化しない。つまり、g_F が元々 Borel 可測だったときに、拡張によって積分値は変わらない。これは単調収束定理を用いて簡単に示せる。

さて、それでは証明に入ろう。まず、条件が成り立っている F の集合が Dynkin system であることを示す。まず、F が全空間であれば $g_F(y) \equiv 1$ なので、主張は当然成り立つ。次に、$F_1 \subset F_2$ で、$F = F_2 \setminus F_1$ とし、F_1, F_2 が主張を満たすとすれば、$g_F(X_s)$ は $g_{F_2}(X_s) - g_{F_1}(X_s)$ と一致する。したがって、

$$\int_{X_s^{-1}(\Gamma)} g_F(X_s) dP^x = P^x[X_s \in \Gamma, X_{s+.} \in F_2] - P_x[X_s \in \Gamma, X_{s+.} \in F_1] = P^x[X_s \in \Gamma, X_{s+.} \in F]$$

となって、F が主張を満たすことがわかる。

最後に (F_n) が主張を満たす増加列で、$F = \cup_n F_n$ とする。このとき $g_{F_n}(X_s)$ は $g_F(X_s)$ に単調増大に収束する。したがって単調収束定理から、

$$\int_{X_s^{-1}(\Gamma)} g_F(X_s) dP^x = \lim_{n\to\infty} P^x[X_s \in \Gamma, X_{s+\cdot} \in F_n] = P^x[X_s \in \Gamma, X_{s+\cdot} \in F]$$

となる。こうして主張は確かめられた。

あとは (c') と同様、F がシリンダーの時に主張が成り立っていることを示せばよい。まず、$F = \{\omega | \omega(t_0) \in \Gamma_0, ..., \omega(t_k) \in \Gamma_k\}$ という形、ただし $0 = t_0 < t_1 < ... < t_k$ とする。最初に、$k = 0$ のときは、$g_F(X_s) = 1_{\Gamma_0}(X_s)$ であり、よって

$$\int_{X_s^{-1}(\Gamma)} g_F(X_s) dP^x = P^x[X_s \in \Gamma, X_s \in \Gamma_0]$$

となって主張は正しいことがわかる。

次に $k-1$ まで主張が正しいとしよう。ここで $h(y) = P^y[X_{t_k - t_{k-1}} \in \Gamma_k]$ と定義しておく。(d) から、すべての P^x とそれに関するほとんどすべての点で

$$h(X_{s+t_{k-1}}) = P^x[X_{s+t_k} \in \Gamma_k | X_{s+t_{k-1}}]$$

であり、また

$$h(X_{t_{k-1}}) = P^x[X_{t_k} \in \Gamma_k | X_{t_{k-1}}]$$

である。また帰納法の仮定から、任意の有界な Borel 可測関数 $\varphi : \mathbb{R}^{dk} \to \mathbb{R}$ に対して

$$\int_{X_s^{-1}(\Gamma)} \varphi(X_s, ..., X_{s+t_{k-1}}) dP^x = \int_{X_s^{-1}(\Gamma)} E^{X_s}[\varphi(X_0, ..., X_{t_{k-1}})] dP^x$$

が成り立っていることに注意する。そこで、

$$\begin{aligned}
\int_{X_s^{-1}(\Gamma)} g_F(X_s) dP^x &= \int_{X_s^{-1}(\Gamma)} E^{X_s}[1_{\Gamma_0}(X_0)...1_{\Gamma_k}(X_{t_k})] dP^x \\
&= \int_{X_s^{-1}(\Gamma)} E^{X_s}[1_{\Gamma_0}(X_0)...1_{\Gamma_{k-1}}(X_{t_{k-1}}) P^{X_s}[X_k \in \Gamma_k | X_{t_{k-1}}]] dP^x \\
&= \int_{X_s^{-1}(\Gamma)} E^{X_s}[1_{\Gamma_0}(X_0)...1_{\Gamma_{k-1}}(X_{t_{k-1}}) h(X_{t_{k-1}})] dP^x \\
&= \int_{X_s^{-1}(\Gamma)} 1_{\Gamma_0}(X_s)...1_{\Gamma_{k-1}}(X_{s+t_{k-1}}) h(X_{s+t_{k-1}}) dP^x \\
&= \int 1_{\Gamma_0 \cap \Gamma}(X_s)...1_{\Gamma_{k-1}}(X_{s+t_{k-1}}) P^x[X_{s+t_k} \in \Gamma_k | X_{s+t_{k-1}}] dP^x \\
&= P^x[X_s \in \Gamma, X_s \in \Gamma_0, ..., X_{s+t_k} \in \Gamma_k]
\end{aligned}$$

となって、求めていた結論を得る。

定理 5.16 の前の議論：(c") と (d") が (e") と同値であることはもちろん自明ではないので、確認しておく。

まず (c") と (d") を仮定する。任意の $X_s^{-1}(\Gamma)$ に対して、(d") より、

$$\int_{X_s^{-1}(\Gamma)} P^{X_s}(F)dP^x = P^x[X_s^{-1}(\Gamma) \cap \theta_s^{-1}F]$$

がほとんどすべての点で成り立っている。左辺の被積分関数は可測でないかもしれないが、ある Borel 可測な関数 f が存在して、$f(X_s) = P^{X_s}(F)$ がほとんどすべての点で成り立つ。よって

$$\int_{X_s^{-1}(\Gamma)} f(X_s)dP^x = P^x[X_s^{-1}(\Gamma) \cap \theta_s^{-1}F]$$

である。よって $f(X_s)$ は $P^x[\theta_s^{-1}F|X_s] = P^x[\theta_s^{-1}F|\mathscr{F}_s]$ の元であり、よって (e") が成り立つ。

逆に (e") が成り立つとしよう。この主張はただちに (d") を含意する。また右辺はある Borel 可測な関数 f について $f(X_s) = P^{X_s}(F)$ をほとんどすべての点で満たすが、このとき $f(X_s)$ は $P^x[\theta_s^{-1}F|\mathscr{F}_s]$ の要件を満たす。よって (c") が成り立つ。

問題 5.17 : (c") を仮定する。任意の X_s 可測な集合 H に対して、

$$\begin{aligned}
\int_H P^x[G|X_s]P^x[\theta_s^{-1}F|X_s]dP^x &= \int_H E^x[1_G E^x[1_{\theta_s^{-1}F}|X_s]|X_s]dP^x \\
&= \int_H E^x[1_G E^x[1_{\theta_s^{-1}F}|\mathscr{F}_s]|X_s]dP^x \\
&= \int_H E^x[E^x[1_{G\cap\theta_s^{-1}F}|\mathscr{F}_s]|X_s]dP^x \\
&= \int_H E^x[1_{G\cap\theta_s^{-1}F}|X_s]dP^x \\
&= P^x[H \cap G \cap \theta_s^{-1}F]
\end{aligned}$$

となるので (c"') は正しい。

逆に (c"') を仮定する。任意の $\mathscr{F}_s$ 可測集合 G に対して、

$$\begin{aligned}\int_G P^x[\theta_s^{-1}F|X_s]dP^x &= \int 1_G P^x[\theta_s^{-1}F|X_s]dP^x \\ &= \int P^x[1_G|X_s]P^x[\theta_s^{-1}F|X_s]dP^x \\ &= P^x[G\cap\theta_s^{-1}F]\end{aligned}$$

となる。これは (c") を含意する。

問題 5.18：まず X_t の初期分布を μ とし、

$$\nu(A)=\mu(\Psi(0)^{-1}A)$$

とし、$P^\nu=P^\mu$ とする。このとき、

$$P^\nu[Y_0\in\Gamma]=P^\mu[\Psi(0)X_0\in\Gamma]=\mu(\Psi(0)^{-1}\Gamma)=\nu(\Gamma)$$

となって第一の主張は満たされる。次に、

$$\begin{aligned}P^\nu[Y_{t+s}\in\Gamma|\mathscr{F}_s] &= P^\nu[\varphi(t+s)+\Psi(t+s)X_{t+s}\in\Gamma|\mathscr{F}_s] \\ &= P^\nu[X_{t+s}\in\Psi(t+s)^{-1}(\Gamma-\varphi(t+s))|\mathscr{F}_s] \\ &= P^\nu[X_{t+s}\in\Psi(t+s)^{-1}(\Gamma-\varphi(t+s))|X_s] \\ &= P^\nu[\varphi(t+s)+\Psi(t+s)X_{t+s}\in\Gamma|X_s] \\ &= P^\nu[Y_{t+s}|X_s]\end{aligned}$$

を得る。よって、X_s 可測であることと Y_s 可測であることが同値であればよいが、これは明らかである。

定義 5.19 の下：実際に Markov family であることを確かめておこう（5.18 は Markov process の証明であって適用できない)。まず、P^x の代わりに $Q^x=P^{\sigma^{-1}x}$ を使わなければならない。このとき、$x\mapsto Q^x(F)$ は確かに universally measurable である。また、

$$Q^x[Y_0=x]=P^{\sigma^{-1}x}[B_0=\sigma^{-1}x]=1$$

となる。(c) の条件の証明は問題 5.18 とまったく同じなので、あとは (d) だけ示せばよい。
まず、補題として、

$$P^{x+y}[B_t\in\Gamma]=P^x[B_t+y\in\Gamma]$$

を示さなければならない。しかしこれは、

$$\begin{aligned}P^{x+y}[B_t \in \Gamma] &= P^{x+y}[B_0 = x+y, B_t \in \Gamma]\\ &= P^{x+y}[B_0 = x+y, B_t - B_0 \in \Gamma - (x+y)]\\ &= P^{x+y}[B_t - B_0 \in \Gamma - (x+y)]\end{aligned}$$

であり、同様の理由で、

$$P^x[B_t \in \Gamma - y] = P^x[B_t - B_0 \in \Gamma - (x+y)]$$

となる。しかし、$B_t - B_0$ の分布は P^x であろうと P^{x+y} であろうと変わらないので、このふたつは一致する。

さて、いま (d) の右辺は

$$Q^y[Y_t \in \Gamma] = P^{\sigma^{-1}y}[B_t \in \sigma^{-1}(\Gamma - \mu t)]$$

である。よって任意の $Y_s^{-1}(\Gamma_0)$ に対して、（Y_s 可測と B_s 可測は明らかに同値なので）

$$\begin{aligned}\int_{Y_s^{-1}(\Gamma_0)} Q^{Y_s}[Y_t \in \Gamma] dQ^x &= \int_{Y_s^{-1}(\Gamma_0)} P^{\sigma^{-1}Y_s}[B_t \in \sigma^{-1}(\Gamma - \mu t)] dP^{\sigma^{-1}x}\\ &= \int_{Y_s^{-1}(\Gamma_0)} P^{B_s}[B_t + \sigma^{-1}\mu s \in \sigma^{-1}(\Gamma - \mu t)] dP^{\sigma^{-1}x}\\ &= P^{\sigma^{-1}x}[Y_s \in \Gamma_0, B_{s+t} + \sigma^{-1}\mu s \in \sigma^{-1}(\Gamma - \mu t)]\\ &= Q^x[Y_s \in \Gamma_0, Y_{s+t} \in \Gamma]\end{aligned}$$

となって、たしかに主張は正しい。

問題 5.21：問題 5.9 を適用するだけである。残りの主張も容易。

2 − 6

問題 6.9 : (i) について。これは、$B \subset A$ かつ $B \in \mathscr{F}_{S+}$ とすると

$$\int_B Z_1 dP = \int_B Z_2 dP$$

となることからただちにわかる。(ii) と (iii) についてはヒントの通り。

定理 6.10 についての補足 : $\theta_S^{-1}F$ の可測性に疑問がある。この集合は

$$\{\omega | \theta_{S(\omega)}\omega \in F\}$$

と書き下せる。ここで書かれている条件だけからこれが成り立つか？　θ についての条件を追加したほうがよいのではないか？

たとえばウィーナー空間を考える。ここでの ω は連続関数である。$\theta_s\omega(t) = \omega(t+s)$ である。ここで $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$ として実数の Borel 集合 $\Gamma_0, ..., \Gamma_n$ を作り、

$$F = \{\omega | \omega(t_i) \in \Gamma_i\}$$

という場合を考える。これは可測であろうか？　この集合は実は

$$\{\omega | S(\omega) < +\infty,\ \omega(S(\omega) + t_i) \in \Gamma_i\}$$

となる。S が単関数なら、これが可測であることは容易に示せる。一般の S については、Γ_i がすべて開集合であれば、S が単関数 S_n の各点収束極限であることを用いると

$$F = \cup_{k=1}^{\infty} \cap_{m=k}^{\infty} \{\omega | S(\omega) < +\infty,\ \omega(S_m(\omega) + t_i) \in \Gamma_i\}$$

となるから、可測である。いつもの monotone class lemma の論法から、ここから Γ_i が可測でも問題ないことは容易に示せる。後は Dynkin System Theorem で、F が可測ならば $\theta_S^{-1}F$ が常に可測であることを証明できる。

しかしこれは一般に成り立つかは未知数である。成り立つことを外生的に仮定しないと定理 6.10 が成り立つかどうかは未知数であることを触れておく。

問題 6.11 : (e") は $Y = 1_F$ の場合の特殊ケースであり、後はいつものやり方で証明すればよい。

問題 6.21：まず、T が有限個の値 $\{t_1, ..., t_n\}$ のみ取る stopping time である場合を考える。$C_i = T^{-1}(t_i)$ として、$\Gamma \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ について

$$\begin{aligned}P^x[N_{T+t} \in \Gamma | \mathscr{F}_T] &= \sum_{i=1}^n P^x[\omega \in C_i, N_{T+t} \in \Gamma | \mathscr{F}_T] \\ &= \sum_{i=1}^n P^x[\omega \in C_i, N_{t_i+t} \in \Gamma | \mathscr{F}_T]\end{aligned}$$

である。ところで、当然ながら $C_i \in \mathscr{F}_T$ である。$B \in \mathscr{F}_T$ とすれば、$B \cap C_i = B \cap \{t = t_i\} \in \mathscr{F}_{t_i}$ である。すると、

$$\begin{aligned}&\int_B \sum_{i=1}^n P^x[\omega \in C_i, N_{t_i+t} \in \Gamma | \mathscr{F}_T] dP^x \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{B \cap C_i} 1_{N_{t_i+t} \in \Gamma} dP^x \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{B \cap C_i} P^x[N_{t_i+t} \in \Gamma | \mathscr{F}_{t_i}] dP^x \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{B \cap C_i} (U_t 1_\Gamma)(N_{t_i}) dP^x \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{B \cap C_i} (U_t 1_\Gamma)(N_T) dP^x \\ &= \int_B (U_t 1_\Gamma)(N_T) dP^x\end{aligned}$$

となるので、

$$P^x[N_{T+t} \in \Gamma | \mathscr{F}_T] = (U_t 1_\Gamma)(N_T)$$

がわかる。

一般の optional time S については、それを上から近似する有限個の値のみ取る stopping time の列 T_n が存在し、$\mathscr{F}_{S+} = \cap_n \mathscr{F}_{T_n}$ である。N_t は右連続かつ単調なので、単調収束定理から、もし $\Gamma = (-\infty, a)$ という形の半直線であれば、任意の $B \in \mathscr{F}_{S+}$ に

ついて

$$
\begin{aligned}
&\int_B P^x[N_{S+t} \in \Gamma | \mathscr{F}_{S+}] dP^x \\
=\ &\int_B 1_{N_{S+t} \in \Gamma} dP^x \\
=\ &\lim_{n \to \infty} \int_B 1_{N_{T_n+t} \in \Gamma} dP^x \\
=\ &\lim_{n \to \infty} \int_B (U_t 1_\Gamma)(N_{T_n}) dP^x \\
=\ &\int_B (U_t 1_\Gamma)(N_S) dP^x
\end{aligned}
$$

が言える。このような関係が成り立つ Γ が Dynkin system であることは簡単に示せるので、(e) が成り立ち、よって Poisson family は strong Markov family である。

問題 7.1, 7.3-6：ヒントの通り。

問題 7.11：まず、S が $(\mathscr{F}_t^\mu)$ の stopping time であることは、右連続性から明白である。

次に、（問題 1.2.24 のように）S を上から近似する単関数の stopping timeS_n を取る。S_n の値を $t_1, ..., t_m$ として、$S_n^{-1}(t_i)$ は $\mathscr{F}_{t_i}^\mu$ 可測なので、$\mathscr{F}_{t_i}^\mu$ 可測な集合で対称差の測度が 0 であるものが存在する。その集合上で $T_n(\omega) = t_i$ という形で T_n を定義すれば、T_n は $(\mathscr{F}_t^X)$ の stopping time である。これはほとんどすべての点で T という $(\mathscr{F}_t^X)$ の optional time に収束し、これが役割を果たす。最後の主張は簡単に示せるので省略する。

問題 7.12：$A \in \mathscr{F}_T^\mu$ とすると、任意の $t \geq 0$ について $A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t^\mu$ である。従って当然ながら $A \cap \{\frac{k-1}{2^n} \leq T < \frac{k}{2^n}\} \in \mathscr{F}_{\frac{k}{2^n}}^\mu$ である。よって、$B_k \in \mathscr{F}_{\frac{k}{2^n}}^X$ をうまく取ると、$B_k \Delta A \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\} \in \mathscr{N}^\mu$ である。必要ならば B_k の定義を $B_k \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\}$ と取り替えて、B_k 上で常に $T_n = \frac{k}{2^n}$ としてよい。$B = (A \cap \{T = \infty\}) \cup (\cup_k B_k)$ とすると、

$$\begin{aligned} B \Delta A &= (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \\ &= (\cup_k (B_k \setminus A)) \cup (\cup_k [(A \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\}) \setminus B]) \\ &\subset (\cup_k (B_k \setminus (A \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\}))) \\ &\quad \cup (\cup_k [(A \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\}) \setminus B_k]) \in \mathscr{N}^\mu \end{aligned}$$

となる。さらに

$$B \cap \{T_n \leq \frac{k}{2^n}\} = \cup_{i=1}^k B_i \in \mathscr{F}_{\frac{k}{2^n}}^X$$

となって結論を得る。後の結果は容易に示せるので省略する。

問題 7.13：実際、まず問題 7.11 から、$\{S \neq T\} \in \mathscr{N}^\mu$ となる $(\mathscr{F}_t^X)$ の optional time である T が存在して、$\mathscr{F}_{S+}^\mu = \mathscr{F}_T^\mu$ である。よってほとんどすべての点で

$$P^\mu[X_{S+t} \in \Gamma | \mathscr{F}_{S+}^\mu] = P^\mu[X_{T+t} \in \Gamma | \mathscr{F}_T^\mu]$$

である。ところが、問題 7.12 から、

$$P^\mu[X_{T+t} | \mathscr{F}_T^\mu] = P^\mu[X_{T+t} | \mathscr{F}_{T+}^X]$$

がほとんどすべての点で成り立つ。したがって (7.2) から (7.1) が言える。

問題 7.14：

$$F_\varepsilon = \{\omega | \omega \text{ is constant on } [0, \varepsilon]\}$$

とする。すぐにわかるように

$$F = \cup_{\varepsilon > 0} F_\varepsilon$$

であるが、F_ε は ε について減少的で、したがって

$$F = \cup_n F_{\frac{1}{n}}$$

である。よって後者が常に測度 0 であれば (i) が言えるが、これは明白である。

(ii) は上からただちに言える。

$\mathscr{N}_0^0$ は $\{\omega | \omega(0) \in \Gamma\}$ という形でしかも $0 \notin \Gamma$ となる集合の部分集合からなるので、これは F を決して含めない。よって (iii) が成り立つ。

問題 7.18-19：ヒントの通り。

２－８

この節で使われている記号法が全体的によくわからなかったので、部分的に解いて満足することにする。どのみち、6.2 節までは必要ないと序論に書いてある。

問題 8.2：まず、

$$P^0[M_t \geq b] = P^0[T_b \leq t] = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_b^\infty e^{\frac{-x^2}{2t}} dx$$

なので、M_t の密度は

$$\frac{d}{db}[1 - P^0[M_t \geq b]] = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-b^2}{2t}}$$

となることがただちにわかる。次に、

$$P^0[|W_t| \geq b] = 2P[W_t \geq b] = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_b^\infty e^{\frac{-x^2}{2t}} dx$$

はただの計算である。これでこの密度が上と同じになることがただちにわかる。また、

$$\begin{aligned} &P^0[(k-1)n^{-1} < W_t \leq kn^{-1},\ M_t - W_t \geq b] \\ &- P^0[(k-1)n^{-1} < W_t \leq kn^{-1},\ M_t \geq b + kn^{-1}] \\ \leq\ &P^0[(k-1)n^{-1} < W_t \leq kn^{-1},\ b + (k-1)n^{-1} \leq M_t < b + kn^{-1}] \end{aligned}$$

である。そして、$b + kn^{-1} \geq 0$ ならば、

$$P^0[(k-1)n^{-1} < W_t \leq kn^{-1},\ M_t \geq b + kn^{-1}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{2b+(k-1)n^{-1}}^{2b+kn^{-1}} e^{\frac{-x^2}{2t}} dx$$

である。$b + kn^{-1} < 0$ ならば、

$$P^0[(k-1)n^{-1} < W_t \leq kn^{-1},\ M_t \geq b + kn^{-1}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{(k-1)n^{-1}}^{kn^{-1}} e^{\frac{-x^2}{2t}} dx$$

である。したがって k について足し合わせると、k^* を $-nb$ を下回る最大の整数として

$$\begin{aligned} P^0[M_t - W_t \geq b] \in\ &\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{k^* n^{-1}} e^{\frac{-x^2}{2t}} dx \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{2b+k^* n^{-1}}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2t}} dx \\ &+ [0, \sum_k P^0[(k-1)n^{-1} < W_t \leq kn^{-1},\ b + (k-1)n^{-1} \leq M_t < b + kn^{-1}]] \end{aligned}$$

であり、右辺第三項の区間は $n \to \infty$ のときに $\{0\}$ に収束するので、

$$P^0[M_t - W_t \geq b] = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_b^\infty e^{\frac{-x^2}{2t}}dx$$

が、はさみうちの原理で示せる（$n \to \infty$ のとき $k^* n^{-1} \to b$ である）。これは $|W_t|$ と同じ分布である。

　最後に、

$$\begin{aligned}
P^0[\max_{0\leq u\leq t}|W_u| \geq b] &\leq 2P^0[M_t \geq b] \\
&= 2P^0[|W_t| \geq b] \\
&= 4P^0[W_t \geq b],
\end{aligned}$$

となるので最後の不等式の前半は正しい。後半は

$$\begin{aligned}
4P^0[W_t \geq b] &= 4\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_b^\infty e^{\frac{-x^2}{2t}}dx \\
&\leq 4\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_b^\infty \frac{x}{b}e^{\frac{-x^2}{2t}}dx \\
&\leq \sqrt{\frac{t}{2\pi}}\frac{4}{b}e^{\frac{-b^2}{2t}}
\end{aligned}$$

となって、示せる。

問題 8.4：まず X_t がマルチンゲールであることを示しておく。実際、

$$\begin{aligned}
E^0[X_t|\mathscr{F}_s] &= E^0[e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t}|\mathscr{F}_s] \\
&= E^0[e^{\lambda(W_t - W_s)}e^{\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2}t}|\mathscr{F}_s] \\
&= e^{\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2}t}e^{\frac{\lambda^2}{2}(t-s)} \\
&= e^{\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2}s}
\end{aligned}$$

となって、正しい。よって $S \equiv 0$ と $T = T_b$ に定理 1.3.22 を適用して

$$E^0[X_{T_b}|\mathscr{F}_0] = 1$$

を得る。これは

$$e^{-\lambda b} = E^0[e^{-\frac{\lambda^2}{2}T_b}]$$

ということであるが、$\lambda = \sqrt{2\alpha}$ とすれば結果を得る。

問題 8.6：$x>0$ のときだけを扱う。このとき、reflection principle から

$$P^x[W_t\ge y,\ T_0\le t]=P^x[T_0\le t,W_t\le -y]=P^x[W_t\le -y]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{-y}e^{\frac{-(z-x)^2}{2t}}dz$$

となる。一方で、

$$P^x[T_0\le t]=2P^x[T_0\le t,W_t\le 0]=2P^x[W_t\le 0]$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{-(z-x)^2}{2t}}dz$$

となるので、引き算すれば

$$P^x[W_t<y,\ T_0\le t]=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left[2\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{-(z-x)^2}{2t}}dz-\int_{-\infty}^{-y}e^{\frac{-(z-x)^2}{2t}}dz\right]$$

を得る。一方で

$$P^x[W_t<y]=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{y}e^{\frac{-(z-x)^2}{2t}}dz$$

であるから、下から上を引いて y で微分すると所望の結果を得る。

問題 8.7：実際、

$$P^0[x\le |W_t|<x+\delta,\ |W_{t+s}|\le y]=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\int_x^{x+\delta}\int_{-y}^{y}e^{-\frac{z^2}{2t}}e^{\frac{-(w-z)^2}{2s}}dwdz$$

となるので、δ^{-1} を掛けて $\delta\to 0$ とすることで

$$P^0[|W_t|\in dx,\ |W_{t+s}|\le y]=\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\int_{-y}^{y}e^{\frac{(-(w-x)^2}{2t}}P_0[|W_t|\in dx]dw$$

ということになって結論を得る。（なお、上で示したことから $|W_{t+s}|$ の条件付き確率が $|W_t|$ の関数として書けるので、$|W_{t+s}|$ は Markov である。）

問題 8.8：ヒントが読みにくいが、おそらく普通になぞれば解ける。

計算を延々やって面白くないので、必要になったら戻ることにして、この節の問題はこれで放棄する。

2 − 9

問題 9.3：ヒントが納得いかなかった。定理 1.3.8(iv) は

$$P[\sup_{\sigma\le t\le\tau} X_t]^2 \le ...$$

の形をしていて、ここでは

$$P[\sup_{\sigma\le t\le\tau} X_t^2] \le ...$$

の形をしているからである。右辺を二倍すれば解決すると思われる。

問題 9.5：ヒントの通り。

問題 9.8：ヒントの通り。

問題 9.11：若干ヒントの最後が怪しいが、容易に修正できる。

問題 9.17：マルコフ性から、$t = 0$ のときだけ考えれば十分である。さらに条件が対称なので、集合

$$\{\omega | D^+W_0(\omega) = \infty\}$$

の測度が 1 であることが言えればよい。これに ω が含まれないためには、すべての N について、ある n_0 が存在して、$n \ge n_0$ ならば

$$\omega \in A_n(N) = \{\omega | M_{n^{-1}} \le Nn^{-1}\}$$

となることが必要である。これの測度は

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{Nn^{-3/2}} e^{\frac{-x^2}{2}}dx \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}Nn^{-3/2}$$

であり、これを n について足し合わせると正の値に収束する。したがってボレル＝カンテリの補題からほとんどすべての ω について、十分大きな n については常に $\omega \notin A_n(N)$ であるということがわかり、証明が完成する。

問題 9.21：ヒントの通りにやればできる。(9.17) 式の分母の $n^{3/2}$ が $n^{\gamma+1/2}$ に変わるだけである。

問題 9.22：後者は

$$\int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \int_x^\infty \frac{u}{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$$

という形で示せる。前者は、

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^2+1} e^{\frac{-x^2}{2}} &= \int_x^\infty -\frac{d}{du}\left(\frac{u}{u^2+1} e^{\frac{-u^2}{2}}\right) du \\
&= \int_x^\infty -\left[\frac{1}{u^2+1} - \frac{2u^2}{(u^2+1)^2} - \frac{u^2}{u^2+1}\right] e^{\frac{-u^2}{2}} du \\
&= \int_x^\infty \frac{u^4+2u^2-1}{u^4+2u^2+1} e^{\frac{-u^2}{2}} du \\
&\leq \int_x^\infty e^{\frac{-u^2}{2}} du
\end{aligned}$$

となって示せる。

問題 9.26：ヒントの通り。この周辺の収束関係の計算は面倒だが、すべて地道に示せる。