３－２

補題 2.2 の補足：まず、最初の三行は $L^2$ 収束が測度収束を意味すること、および測度収束が概収束する部分列の存在を意味することから来る。後半を示すためには、$0 \le t \le T$ に対して

$$A_t = A \cap [0,t] \times \Omega$$

が $\mathscr{F}_t$ 可測であればよい。しかしこの集合の補集合は

$$\{(s,\omega) \in [0,t] \cap \Omega | \limsup_{n\to\infty} X_s^{(n)}(\omega) > \liminf_{n\to\infty} X_s^{(n)}(\omega)\}$$

$$\{(s,\omega) \in [0,t] \cap \Omega | \liminf_{n\to\infty} X_s^{(n)}(\omega) = +\infty\}$$

$$\{(s,\omega) \in [0,t] \cap \Omega | \limsup_{n\to\infty} X_s^{(n)}(\omega) = -\infty\}$$

という 3 つの集合の合併で表すことができ、全部 $\mathscr{F}_t$ 可測なので、主張は正しい。

問題 2.5：ほぼ解答通り。$\tilde{X}_t^{(n)}$ が可測であることだけ証明すればいいが、簡単である。

命題 2.6 の補足：(a) の証明時に対角線論法を使うことに注意。それとこの証明のためには単過程列が一様に有界でなければならないように思われる。補題 2.4 や問題 2.5 の証明を見た限りではそのように単過程列が取れることは容易に示せるが、どこにも注意がないので一応チェックすること。

問題 2.12：まず、$X_n = W_{n\wedge T}$ と定義する。このとき、$n < m$ ならば

$$E[(X_m - X_n)^2] = E[X_m^2 - X_n^2] = E[m\wedge T] - E[n \wedge T]$$

である。単調収束定理から $\lim_{n\to\infty} E[n\wedge T] = ET$ であるので、$(X_n)$ は $L^2$ 空間におけるコーシー列で、よって収束先 $X$ が存在する。部分列を取れば概収束しているが、$X_n$ は $W_T$ に概収束しているので、$X = W_T$ でなければならない。ここからただちに $\lim_{n\to\infty} E(W_{n\wedge T}^2) = E(W_T^2)$ を得るが、$E(W_{n\wedge T}^2) = E[n\wedge T]$ が証明されているので適用すると $E(W_T^2) = ET$ を得る。一方、有限測度空間では $L^2$ 収束は $L^1$ 収束を意味するので、まったく同様に $\lim_{n\to\infty} E(W_{n\wedge T}) = E(W_T)$ であり、左辺は 0 なので右辺も 0 である。以上で証明が完成した。

問題 2.13：$ET_b < +\infty$ であれば

$$b = E(b) = E(W_{T_b}) = 0$$

となって矛盾。

問題 2.18：ヒントの通り。なお、

$$\left(\int_0^\infty X_s^2 d\langle M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty Y_s^2 d\langle N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}$$

の $P$ についての可積分性はコーシー＝シュワルツの不等式でよい。

問題 2.25 の前の文章群：まず (2.34) の定義が $(S_n)$ に依存しないことを示すために、$(S'_n)$ というべつの条件を満たす停止時刻の列を取ってこよう。$T'_n = R_n \wedge S'_n$ とする。さらに $T''_n = T_n \wedge T'_n$ としよう。$n$ をひとつ固定し、$T_m$ の代わりに $T''_m$ を使って

$$\tilde{M}_t^{(m)} = M_{t\wedge T''_m},\ \tilde{X}_t^{(m)} = X_t 1_{t\le T''_m}$$

と定義すると、$T = T''_m \wedge T_n$ とすれば、

$$M_{t\wedge T}^{(n)} = \tilde{M}_{t\wedge T}^{(m)},\ X_{t\wedge T}^{(n)} = \tilde{X}_{t\wedge T}^{(m)}$$

となるので、

$$I_t^{M^{(n)}}(X^{(n)}) = I_t^{\tilde{M}^{(m)}}(\tilde{X}^{(m)})$$

が任意の $0 \le t \le T$ に対して成り立つ。よって $(T''_\nu)$ を使って (2.34) 式で定義した確率積分は $(T_\nu)$ を使った確率積分と、ほとんどすべての点で $0 \le t \le T(\omega)$ という区間内で一致する。そしてほとんどすべての点で、十分大きく $m$ を取れば $T = T_n$ となるので、$(T''_n)$ を使って定義した確率積分は元の定義と一致する。議論は $(T'_n)$ についても対称的に行えるので、これで $(S_n)$ を $(S'_n)$ に変えても確率積分の定義がブレないことがわかった。

(2.12) 式が成り立つことは、$I_0^{M^{(n)}}(X^{(n)}) = 0$ がすべての $n$ について成り立つことから明白である。(2.17) を示すには、$\alpha X_t^{(n)} + \beta Y_t^{(n)} = (\alpha X_t + \beta Y_t)1_{t\le T_n(\omega)}$ であることだけ気をつければただちにわかる。(2.19) に対しては、まず上の $(S_n)$ をあらかじめうまく取っておいて、

$$(M_t^{(n)})^2 - \langle M\rangle_{t\wedge T_n}$$

がマルチンゲールであることを保証しておけば、$\langle M^{(n)}\rangle_t = \langle M\rangle_{t\wedge T_n}$ が成り立つ。すると

$$(I_{t\wedge T_n}(X))^2 - \int_0^{t\wedge T_n} X_u^2 d\langle M\rangle_u$$

が定義からマルチンゲールになる。よって局所マルチンゲールの二次変動の定義から、ただちに (2.19) が成り立つことがわかる。(2.24) については、ほとんどすべての点で任意

の $n$ に対して

$$I^M_{t\wedge T}(X) = I^{M^{(n)}}_{t\wedge T}(X^{(n)}) = I^{M^{(n)}}_t(X^{(n)}1_{t\leq T}) = I^M_t(\tilde{X})$$

が $0 \leq t \leq T_n$ について成り立っているが、固定された $t$ について $n$ を十分大きく取れば $t \leq T_n$ となるので、上の等号はすべての $t$ に対して成り立ち、よって (2.24) が成り立つ。(2.26) は、(2.19) と同様に $(S_n)$ をあらかじめ工夫して取っておいて、確率積分 $I^M_t(X)$ と $I^N_t(Y)$ を同時に定義でき、さらに

$$M^{(n)}_t N^{(n)}_t - \langle M, N\rangle_{t\wedge T_n}$$

がマルチンゲールになるようにしておく。すると定義から $\langle M^{(n)}, N^{(n)}\rangle_t = \langle M, N\rangle_{t\wedge T_n}$ となる。よって、

$$I^M_{t\wedge T_n}(X) I^N_{t\wedge T_n}(Y) - \int_0^{t\wedge T_n} X_u Y_u d\langle M, N\rangle_u$$

はマルチンゲールになる。故に定義から (2.26) が成り立たねばならない。最後に、$Y \equiv 1$ とすると、$0 \leq t \leq T_n$ に対して

$$I^{N^{(n)}}_t(Y^{(n)}) = N^{(n)}_t = N_t$$

であり、よって

$$I^N(Y) = N$$

がわかる。したがって (2.29) 式は (2.26) 式の系である。逆に、もしある $\Phi \in \mathscr{M}^{c,loc}$ について、あらゆる $N \in \mathscr{M}^c_2$ に対して

$$\langle \Phi, N\rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N\rangle_u$$

が成り立っていたとしよう。確率積分の定義を工夫して、$\Psi^n_t = \Phi_{t\wedge T_n}$ が $\mathscr{M}^c_2$ に含まれるようにしておく。このとき、上の議論を繰り返すことで、

$$\langle \Psi^n - I^{M^{(n)}}(X^{(n)}), N^{(n)}\rangle_t = \langle \Phi - I^M(X), N\rangle_{t\wedge T_n} = 0$$

を示せる。$N = \Psi^n - I^{M^{(n)}}(X^{(n)})$ にこれを適用すると、ほとんどすべての $\omega$ について $0 \leq t \leq T_n$ 上で

$$\Psi^n = I^{M^{(n)}}(X^{(n)})$$

が示せ、よって $\Phi = I^M(X)$ である。これで命題 2.24 が示せた。

問題 2.25：任意の $L \in \mathscr{M}_2^c$ を取ると、

$$\langle \alpha I^M(X) + \beta I^N(X), L\rangle_t = \int_0^t \alpha X_u d\langle M, L\rangle_u + \int_0^t \beta X_u d\langle N, L\rangle_u = \int_0^t X_u d\langle \alpha M + \beta N, L\rangle$$

となって、命題 2.24 から結論を得る。

問題 2.27：ヒントが少しおかしい気がした。確率収束は距離付け可能（Ky Fan metric）だが、概収束は距離付け可能ではないので、距離付け可能なもので対角線論法をしてから部分列を取る方が望ましいと思われる。

問題 2.28：正攻法を思い浮かばなかった。次節を見ると、$Z_t = e^{\zeta_t(X)}$ として、

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_t X_t dW_t$$

という公式が示されている。これは非負局所マルチンゲールなので問題 1.5.19(ii) から優マルチンゲールである。$X$ が単過程ならマルチンゲールになるのは、系 5.13 を適用すればよい。

問題 2.29：ヒントの通り。

問題 2.30：まず与えられた $M \in \mathscr{M}^{c,loc}$ と $X \in \mathscr{P}^*$ に対して、

$$Y_u = \begin{cases} X_u & \text{if } u < s, \\ ZX_u & \text{if } u \geq s, \end{cases}$$

と定義しよう。このとき、問題 2.27 から単過程の列 $(X^n)$ が存在して、すべての $t \geq 0$ について

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t |X_u^n - X_u|^2 d\langle M\rangle_u = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq u\leq t} |I_u(X^n) - I_u(X)| = 0$$

がほとんどすべての点で成り立つ。$Z^n = n \wedge Z$ としよう。すると $Z^n$ は $\mathscr{F}_s$ 可測かつ有界である。そして、

$$Y_u^n = \begin{cases} X_u^n & \text{if } u < s, \\ Z^n X_u^n & \text{if } u \geq s, \end{cases}$$

とすると、これは単過程で、さらに必要ならば部分列を取ることで、すべての $t \geq 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t |Y_u^n - Y_u|^2 d\langle M\rangle_u = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le u\le t}|I_u(Y^n)-I_u(Y)|=0$$

がほとんどすべての点で成り立つと仮定できる。定義通り計算すれば明らかに、

$$I_t(Y^n)-I_s(Y^n)=Z^n[I_t(X^n)-I_s(X^n)]$$

であることがわかるので、後は極限を取れば、ほとんどすべての点で

$$I_t(Y)-I_s(Y)=Z[I_t(X)-I_s(X)]$$

であることが示せるが、これが証明したかったことである。

3－3

問題 3.2：この形から、

$$0 = (M_t - \tilde{M}_t) + (B_t - \tilde{B}_t)$$

を得る。左辺は明らかにマルチンゲールだから、右辺もマルチンゲールであり、よって $B_t - \tilde{B}_t$ はマルチンゲールである。これに定理 1.4.10 の最初の方の議論を適用することで $B_t$ と $\tilde{B}_t$ は区別できないことがわかり、よって $M_t$ と $\tilde{M}_t$ もそうなる。

問題 3.7：解答を見たらなにひとつ有益なことが書いてなかったので行間を埋める。

第一段階は局所化である。

$$T_n = \begin{cases} 0 & \text{if } \|X_0\| \ge n, \\ \inf\{t \ge 0 | \max\{\|M_t\|, \|\check{B}_t\|, \|\langle M \rangle_t\|\} \ge n\} & \text{if } \|X_0\| < n, \end{cases}$$

と定義すると $T_n$ は非減少で $\lim_{n\to\infty} T_n = +\infty$ がほとんどすべての点で成り立つ。そして $Y_t^n = X_{t\wedge T_n}$ について、十分大きな $n$ に対して (3.5) が示せれば、$n \to \infty$ として (3.5) を得ることができるので、我々は $\|X_0\|, \|M_t\|, \|\check{B}_t\|, \|\langle M \rangle_t\|$ はすべて一様に $K > 0$ を下回ると仮定してよい。$t > 0$ を固定すれば、$[0,t] \times [-3K, 3K]^d$ 内部でだけ議論すればよいので、$f$ と、$f$ の一階、二階の偏導関数はすべて有界であると一般性を失うことなく仮定してよい。

次に、$[0,t]$ の分割 $\Pi = \{t_0, ..., t_m\}$ を固定する。このとき、

$$\begin{aligned} f(t, X_t) - f(0, X_0) = & \sum_{k=1}^{m} [f(t_k, X_{t_k}) - f(t_{k-1}, X_{t_k})] + \sum_{k=1}^{m} [f(t_{k-1}, X_{t_k}) - f(t_{k-1}, X_{t_{k-1}})] \\ = & \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial t}(\tau_k, X_{t_k}) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t_{k-1}, X_{t_{k-1}})(X_{t_k}^i - X_{t_{k-1}}^i) \\ & + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} h_k^{ij} (X_{t_k}^i - X_{t_{k-1}}^i)(X_{t_k}^j - X_{t_{k-1}}^j) \end{aligned}$$

とテイラー展開できる。ただし $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ であり、また

$$h_k^{ij} = \int_0^1 (1-s) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(t_{k-1}, (1-s)X_{t_{k-1}} + sX_{t_k}) ds$$

で、これは可測かつ有界である[*1]。

[*1] ヒントにある方法でこの剰余項の可測性が示せると思えなかったので、平均値表示をやめて積分表示にした。

例によって、$h_k^{ij}$ がかかっている項以外の収束評価は簡単なので、そこだけを解析しよう。これも分解すれば、

$$\sum_{k=1}^{m} h_k^{ij}(M_{t_k}^i - M_{t_{k-1}}^i)(M_{t_k}^j - M_{t_{k-1}}^j)$$

のところ以外の値は 0 に $L^1$ 収束することが容易に示せる。この項については、

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(t_{k-1}, X_{t_{k-1}})(M_{t_k}^i - M_{t_{k-1}}^i)(M_{t_k}^j - M_{t_{k-1}}^j)$$

との差を取ることを考える。まず

$$\begin{aligned} & h_k^{ij} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(t_{k-1}, X_{t_{k-1}}) \\ = & \int_0^1 (1-s)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(t_{k-1}, (1-s)X_{t_{k-1}} + sX_{t_k}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(t_{k-1}, X_{t_{k-1}})\right] ds \end{aligned}$$

であるので、問題 1.5.14 の証明で使ったロジック（つまり、$M^i + M^j$ の二次変動と $M^i - M^j$ の二次変動を使ってかけ算を表現する方法）を援用することで、この二つの差は 0 に $L^1$ 収束することが示せる。後は定理 3.3 の証明を同じロジックで（たとえば $V_t^{(4)}(\Pi)$ の収束の代わりに、上のふたつの四次変動が両方とも収束することを使う）、示したい内容が示せる。

問題 3.10：伊藤の公式から $g(x) = \frac{1}{x}$ を用いて、

$$Y_t = g(Z_t) = 1 - \int_0^t Y_u^2 Z_u X_u dW_u + \int_0^t Y_u^3 Z_u^2 X_u^2 du$$

を得る。$Y_u Z_u = 1$ なので整理すると、

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_u X_u^2 du - \int_0^t Y_u X_u dW_u$$

となって正しいことがわかる。

例 3.11 について：伊藤の公式を $f(t, x) = X_t^1 x$ に適用するということかと思われるが、$a(s)$ が連続でないのに適用できるのだろうか？　と考えたのだが、上の証明の分割のところで $t$ に関する箇所に平均値の定理の代わりに微積分学の基本定理を使えばおそらく示せる。ただ、どの程度一般化できるかは未知数である。

問題 3.12：$f(x,y)=xy$ に伊藤の公式を適用して、

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle M, N\rangle_t$$

を得る。これを整理すれば (3.8) 式になる。

問題 3.14：ヒントの通り。

問題 3.15：ヒントの通り。

定理 3.16 の途中：$\langle M^j\rangle_t = t$ だから $M^j \in \mathscr{M}_2^c$ だというところを埋めておくべきである。いま $M^j$ は $M_0^j = 0$ を満たす連続な局所マルチンゲールであることが仮定されているので、対応する $(T_n)$ を取る。このとき、$m > n$ として定理 1.3.22 から

$$E[(M^j_{t\wedge T_m} - M^j_{t\wedge T_n})^2] = E[t\wedge T_m] - E[t\wedge T_n]$$

が各 $t$ について言える。したがって固定した $t \geq 0$ に対して $(M^j_{t\wedge T_n})$ は $L^2$ コーシー列であって、よってどこかに $L^2$ 収束していなければならないが、その収束先は概収束極限 $M_t^j$ でなければならない。故に $M_t^j$ は必ず二乗可積分である。$L^2$ 収束は $L^1$ 収束を意味するので、

$$M_s^j = \lim_{n\to\infty} M^j_{s\wedge T_n} = \lim_{n\to\infty} E[M^j_{t\wedge T_n}|\mathscr{F}_s] = E[M_t^j|\mathscr{F}_s]$$

となってマルチンゲール性が言える。以上で証明が完成した。

問題 3.17：ブラウン運動でない理由は明らかで、$M_t^1 > 0$ のときに $M_t^2$ と $M_t^3$ の符号が常に一致するため、これらは独立でない。ただ、そもそもこの過程は適合してないのではないかと思われる。この点で $M_3 \in \mathscr{M}_{c,loc}$ という記述に疑問を覚える。

問題 3.18：直交行列の性質から (3.11) が導かれる。

問題 3.20：強マルコフ性の定義の (a)(b) は自動的に満たされる。いま、$\Gamma$ は $\mathbb{R}$ のボレル集合とし、$\Gamma' = \{x \in \mathbb{R}^d | \|x\| \in \Gamma\}$ とする。そして

$$g(x) = P^x(W_t \in \Gamma')$$

と定義する。$h(r) = g(r, 0, ..., 0)$ として、$g(x) = h(\|x\|)$ であることを示そう。実際、$\|x\| = \|y\|$ であるとすれば、$Qx = y$ となる直交行列 $Q$ が存在する。このとき、

$\|QW_t\| = \|W_t\|$ なので、$QW_t \in \Gamma'$ と $W_t \in \Gamma'$ は同値である。そして過程 $(QW_t)$ は測度 $P^x$ の下で、問題 3.18 より、$y$ から出発するブラウン運動なので、

$$P^x(W_t \in \Gamma') = P^x(QW_t \in \Gamma') = P^y(W_t \in \Gamma')$$

が成り立つ。したがって $g(x) = g(y)$ で、主張の正しさが確かめられた。

そこで特に、$x = (r, 0, ..., 0)$ に対して、ブラウン族の強マルコフ性から

$$\hat{P}^r(R_{S+t} \in \Gamma | W_S = y) = P^x(W_{S+t} \in \Gamma' | W_S = y) = P^{W_S}(W_t \in \Gamma') = h(R_S)$$

と書けるため、$\hat{P}^r(R_{S+t} \in \Gamma | W_S)$ は $R_S$ 可測で、よって

$$\hat{P}^r(R_{S+t} \in \Gamma | W_S) = \hat{P}^r(R_{S+t} \in \Gamma | R_S)$$

を得る。このふたつの関係からただちに (d) を得る。

(c) については、再び上と同じ記号を使うと、ブラウン運動自体の強マルコフ性から、

$$\hat{P}^r(R_{S+t} \in \Gamma | \mathscr{F}_S) = P^x(W_{S+t} \in \Gamma' | \mathscr{F}_S) = P^x(W_{S+t} \in \Gamma' | W_S) = \hat{P}^r(R_{S+t} \in \Gamma | R_S)$$

となるため、示せる。以上で証明が完成した。

問題 3.23：(i) については、$a > 0$ に対して $T_a = \inf\{t \geq 0 | R_t = a\}$ として似た議論を繰り返せば、

$$\log r = \log a P(T_a \leq S_k) + \log k P(S_k \leq T_a)$$

となる。この両辺を $\log k$ で割り算すると、

$$P(S_k \leq T_a) = \frac{1}{\log k}[\log r - \log a P(T_a \leq S_k)] \to 0 \text{ as } k \to \infty$$

となるため、$P(T_a = +\infty) = 0$ がわかる。これで示せた。

(ii) については、$f(x) = x^{2-d}$ と定義して命題 3.22 の証明と似たようなことをやると、

$$\begin{aligned}
(R_t)^{2-d} = f(R_t) = f(r) + \int_0^t f'(R_s)\frac{d-1}{2R_s}ds + \int_0^t f'(R_s)dB_s + \int_0^t \frac{f''(R_s)}{2}ds \\
= r^{2-d} + \int_0^t (2-d)(R_s)^{-d}\frac{d-1}{2}ds + \int_0^t (2-d)(R_s)^{1-d}dB_s \\
+ \int_0^t (2-d)(1-d)(R_s)^{-d}\frac{1}{2}ds \\
= r^{-d+2} + \int_0^t (2-d)(R_s)^{1-d}dB_s
\end{aligned}$$

となる。$0 < c < r$ となる $c$ に対して $T_c$ を上のように定義し、$\tau_k = T_c \wedge S_k \wedge n$ と定義して命題 3.22 のロジックを繰り返せば

$$r^{2-d} = c^{2-d} P(T_c \le S_k) + k^{2-d} P(S_k \le T_c)$$

を得るが、$k \to \infty$ のとき右辺第二項は 0 に収束するので、

$$P(m < c) = P(T_c < +\infty) = \lim_{k \to \infty} P(T_c \le S_k) = \left(\frac{c}{r}\right)^{d-2}$$

を得る。$P(m = c) = 0$ はこの式から明らかなので結論は正しい。

問題 3.24：背理法を用いる。いま、ある $M > 0$ に対して

$$P(\liminf_{t \to \infty} R_t < M) = \varepsilon > 0$$

であったとしよう。ここで、

$$\left(\frac{2M}{A}\right)^{d-2} < \varepsilon$$

となる $A > 0$ を取ってきて、$S = \inf\{t \ge 0 | R_t = A\}$ とする。ブラウン運動は確率 1 で非有界なので $P(\{S < +\infty\}) = 1$ である。この停止時刻 $S$ に対して、問題 3.20 から

$$P(\inf_{t \ge 0} R_{S+t} \le 2M) = \hat{P}^A(\inf_{t \ge 0} R_t \le 2M) < \varepsilon$$

を得るが、これは当初の仮定に矛盾する。以上。

問題 3.25：よくわからなかった。自然数なら帰納法でなんとかなりそうな気配もしたが、少なくとも命題 3.26 の証明をそのまま適用すると評価式で破綻する。

命題 3.26 への注意：条件に $M_0 \equiv 0$ が抜けている気がした。平行移動で示せるような気もするが危険な感じがするので足して置いた方がよい。また、注意 3.27 には問題 1.5.24 を使用すること。

問題 3.29：ヒントの通り。逆側は $d^{-m-1}$ がつく。

3 – 4

定理 4.2 について：途中、可測な行列値関数について、値が常に対称かつ正値定符号であれば、対角化するための直交行列とと固有値の関数を同じく可測に取れる、という主張を見た。これについて調べたところ、ヤコビ法による収束先がその条件に該当するように思われる。ヤコビ法は数値計算では遅いと言われているが、やることは絶対値の比較と arctan や $\cos, \sin$ などの関数の適用、そして極限操作だけなので、可測性を壊さない。

問題 4.4：(i) 実際、$T_s \le t \Leftrightarrow A_t + t \ge s$ なので、$A_t$ の可測性に帰着される。
(ii)$\mathscr{G}_0 = \mathscr{F}_0$ であるから、$\mathscr{G}_0$ は null-set をすべて含む。また、$\mathscr{F}_t$ の右連続性から $\mathscr{F}_{T_s} = \mathscr{F}_{T_s+}$ であり、よって問題 1.2.23 から所望の帰結を得る。
(iii)$M_t$ をマルチンゲールにする有界な停止時刻の列 $T^k$ を取ってきて、

$$A_{T^k} + T^k = S^k$$

として $S^k$ を定義する。このとき、

$$M_{T_s \wedge T^k} = N_{s \wedge S^k}$$

となる。集合 $\{S^k \le s\}$ は $\{T^k \le T_s\}$ と一致するが、補題 1.2.16 から $\{T^k \le T_s\} \in \mathscr{F}_{T_s} = \mathscr{G}_s$ であるため、$S^k$ は $(\mathscr{G}_s)$ に付随する停止時刻である。また $T^k \le S^k$ なので確率 1 で $\lim_{k\to\infty} S^k = +\infty$ である。そして $s < s'$ のとき $T_{s'} > T_s$ なので問題 1.3.24 から

$$E[N_{s' \wedge S^k} | \mathscr{G}_s] = E[M_{T_{s'} \wedge T^k} | \mathscr{F}_{T_s}] = M_{T_s \wedge T^k} = N_{s \wedge S^k}$$

となって、マルチンゲール性が言える。これで $N_s$ の局所マルチンゲール性が言えた。

最後に、同じ議論から

$$\langle N^i, N^j \rangle_s = \langle_s = \langle M^i, M^j \rangle_{T_s}$$

が証明できる。後者を見てみるとリプシッツ定数 1 を持っているため、これは絶対連続である。以上で証明が完成した。

問題 4.5：ヒントの通りだがやや雑。

定理 4.6 の証明：日本語訳がひどすぎるのかと思ったら英語もけっこうひどかった。最初に書いてあるところは、$T$ が optional であることで、次に命題 1.2.3 を使って停止時刻であることを証明する、と言いたいのだと思う。

問題 4.7：ヒントが言葉足らず過ぎるので補足する。まず、$A = \{S = \lim_{t\to\infty}\langle M\rangle_t < +\infty\}$ と定義しよう。この集合上で

$$\hat{M} = \limsup_{t\to\infty} M_t,\ \bar{M} = \liminf_{t\to\infty} M_t$$

と定義する。固定された $s_2 > 0$ に対して $\tilde{M}_t = M_{t\wedge T(s_2)}$ と定義すると本文中にあるように $\tilde{M}_t$ は一様可積分マルチンゲールで、最終要素 $\tilde{M}_\infty$ を持ち、しかも問題 1.5.24 から $t\to\infty$ のときに概収束する。ここから、固定された $s_2 > 0$ に対して、$\{S < s_2\}$ 上ほとんどすべての点で $\hat{M} = \bar{M} = \tilde{M}_\infty$ であることがわかる。$s_2 = n$ に対してこれを行い、$n\to\infty$ とすることで、$A$ 上ほとんどすべての点で $\hat{M} = \bar{M}$ であることがわかる。よって $A$ 上で $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$ はほとんどすべての点で定義される。ここから $M_{T(s)}$ の連続性を証明できる。後はだいたい本文の通りでよい。

注 4.9 について：これは 3.7 節で使うので厳密に示しておきたい。$\{T(s) = +\infty\}$ は $\mathscr{G}_s$ 可測だから、命題 1.2.18 から $Y_s$ の適合性は言える。(4.25) と (4.26) はそのまま言える。(4.28) の前の推論については、工夫が必要である。なぜなら $\langle M, N\rangle_\infty$ が存在するかどうかがいまいちはっきりしないからである。まず、

$$N_t - \langle\tilde{N}\rangle_{\langle M\rangle_t}$$

は任意抽出定理から $\mathscr{M}^{c,loc}$ に属し、よって $\langle N\rangle_t = \langle\tilde{N}\rangle_{\langle M\rangle_t}$ がわかる。特に、$S < +\infty$ であるほとんどすべての点で $\langle N\rangle_\infty = \langle\tilde{N}\rangle_S < +\infty$ である。問題 1.5.7 から、$S < +\infty$ のところで $\langle M, N\rangle_S$ が定義されていることが導かれる。よって、$Z_s = M_{T(s)}N_{T(s)} - \langle M, N\rangle_{T(s)}$ は常に定義されている連続過程である。$Z_s$ が局所マルチンゲールであることを証明したいが、注 4.7 で示したように、$s_2$ を固定して $M_{T(s\wedge s_2)}$ を考えるとこれは最終要素を持つ二乗可積分マルチンゲールである。もし $\langle\tilde{N}\rangle_s$ が一様有界であれば、ここから $\langle N_{T(s)}\rangle$ の一様有界性が言えるため、問題 1.5.24 から $N_{T(s\wedge s_2)}$ も最終要素を持つ二乗可積分マルチンゲールであり、よって $Z_{s\wedge s_2}$ はマルチンゲールであることが任意抽出定理から容易に導かれる。一般の場合、$S_n = \inf\{s \ge 0 | \langle N\rangle_{T(s)} > n\}$ として停止時刻 $S_n$ を定義する。確率 1 で $S_n \to \infty$ であり、また $\langle N\rangle_{T(s\wedge s_2\wedge S_n)} \le n$ であるから、$\hat{N}^n_s = N_{T(s\wedge s_2\wedge S_n)}$ は二次変動が一様有界な局所マルチンゲールで、故に最終要素を持つ二乗可積分マルチンゲールである。ここから $Z_{s\wedge s_2\wedge S_n}$ はマルチンゲールであることがわかる。よって $Z_s$ 自体は局所マルチンゲールである。一方、

$$S = \langle M\rangle_\infty$$

であった。$\{S \leq s\} = \{T(s) = +\infty\} \in \mathscr{G}_s$ であるから $S$ は $(\mathscr{G}_s)$ の停止時刻で、よって

$$B_{s\wedge S}\tilde{N}_{s\wedge S} - \langle M, N\rangle_{T(s)} = Z_s$$

となる。以上で、

$$\langle B, \tilde{N}\rangle_{s\wedge S} = \langle M, N\rangle_{T(s)}$$

となって (4.28) が証明できた。(4.30) まではここからただちに証明できる。一方、上で $Z_t$ について議論したのと同じ論理から

$$\langle \tilde{J}, \tilde{N}\rangle_s = \langle J, N\rangle_s$$

であることが示せるため、これを用いて結論を得ることができる。

問題 4.11 と 4.12：解答の通り。

問題 4.16：前半部についてはヒントの通りなのだが日本語版に誤植多いので注意。ボレル＝カンテリの補題は $E_k = \{\sup_{0\leq t\leq T}|M_t^{(n)} - M_t| \leq 2^{-n}\}$ に適用する。後者については、対応する停止時刻の列 $(S_k)$ を取って $M_t^k = M_{t\wedge S_k}$ に定理 4.15 を適用して $Y_t^{j,k}$ を得ると、$M_t^k$ は確率 1 で連続なので、$k \to \infty$ として $M_t$ も確率 1 で連続である。また、$Y_t^{j,k}$ は一意的であるが、$t \geq S_k$ ならば $t \wedge S_k = S_k$ なので、

$$M_t^k = \sum_{j=1}^d \int_0^t Y_t^{j,k} dW_t^j$$

より、$t > S_k$ ならば確率 1 で $Y_t^{j,k} = 0$ であると仮定できる。そこで確率 1 で

$$M_{t\wedge S_k} = \sum_{j=1}^d \int_0^{t\wedge S_k} Y_t^{j,k} dW_t^j$$

がわかる。後は、やはり一意性命題から $k < n$ のとき $t \leq S_k$ ならば $Y_t^{j,k} = Y_t^{j,n}$ が確率 1 で成り立つことから、$t \leq S_k$ に対して

$$Y_t = Y_t^k$$

と定義するとこれが (4.39) を満たす。後の計算は当たり前なので省略する。

問題 4.17：まず、$t \geq T$ に対して $M_t = \xi$ とし、$t < T$ に対しては $M_t = E[\xi|\mathscr{F}_t]$ とする。そして $N_t = M_t - M_0$ と定義する。このとき $N_t$ は RCLL に取れて、よって $\mathscr{M}_2$ の要素

と見なせる。そこである $Y_t^1, ..., Y_t^d$ に対して

$$N_t = \sum_{j=1}^d \int_0^t Y_t^j dW_t^j$$

を得るが、このとき

$$M_t = M_0 + \sum_{j=1}^d \int_0^t Y_t^j dW_t^j$$

である。$M_0 = E[\xi|\mathscr{F}_0] = E[\xi]$ を証明できれば証明は終わるが、$\mathscr{F}_0$ は定理 7.17 と同様の議論から測度が 0 か 1 のどちらかの集合しか含んでおらず、よって主張は正しい。以上で証明が完成した。

問題 4.22：(i) と (ii) は当たり前。(iii) はあまり興味がなかったが、たぶん積分が局所マルチンゲールになるけどマルチンゲールにはならないケースあたりを持ってくると反例がありそうな気がする。

３－５

系 5.2 の前の注意：Parthasarathy の定理 5.4.2 は standard Borel space で議論していて、$F_t^W$ に適用できるかどうかが定かでないように見えるが、$\mathscr{F}$ が Wiener 空間であればこれは成り立つ。問題 2.4.2 等を参照。実は定理 5.4.2 ほど一般的でなくとも、今回の場合は inner reguralityを使って割と簡単に示せる。一般の場合、注意 2.4.22 を使って誘導すればよい。後の議論は簡単である。

問題 5.6：ヒントの通りにやろうとしたがよくわからなかった。ここでは代わりの議論を示す。まず、$P$ を使う場合と $\tilde{P}_T$ を使う場合で情報系が変わっていないため、単過程の定義は $P$ と $\tilde{P}_T$ で変わらない。$Y_s$ が単過程のときには、この結果は定義から明らかである。次に、$Y_t \in \mathscr{L}_T^*$ で、ある $C$ について $\int_0^T Y_t dt \leq C$ が $P$ について確率 1 で成り立つ場合を考える。この場合、命題 2.8 から $P$ に関して

$$[Y - Y^n]_T = E \int_0^T (Y_t - Y_t^n)^2 dt \to 0$$

となる単過程の列 $Y^n$ を選ぶことができる。部分列を取ることによって、$Y_t^n$ は $Y_t$ にルベーグ測度と $P$ の直積測度に関して概収束していると仮定してよい。このとき、

$$Z_T(X) \int_0^T (Y_t - Y_t^n)^2 dt \leq 2Z_T(X) \int_0^T (Y_t^2 + (Y_t^n)^2) dt \leq 6CZ_T(X)$$

であり、右辺の期待値は有限である。よって有界収束定理から

$$\tilde{E} \int_0^T (Y_t - Y_t^n)^2 dt \to 0$$

である。これを用いればこの場合には問題の結果が示せる。一般の場合は局所化すればよい。

問題 5.7：まず、１ページ前の計算と同様にして

$$P^\mu[T \leq t] = E[1_{T \leq t} e^{\mu W_T - (1/2)\mu^2 T}]$$

である。$t \to \infty$ として、仮定 $P[T = +\infty] = 0$ から

$$P^\mu[T < +\infty] = E[e^{\mu W_T - (1/2)\mu^2 T}]$$

であるので、(5.14) と (5.15) は同値である。特に $S_b$ はブラウン運動 $\tilde{W}_t$ に対する停止時刻であり、$P$ はこのブラウン運動について $P^{-\mu}$ と解釈できるので、(5.13) を適用して $T = S_b$ の場合の (5.15) を得る。

問題 5.8：まず $0 < t < T$ として $S_{b_1} = T_{b_1} \wedge T$ とする。$P[T_{b_1} \le t] = P[S_{b_1} \le t]$ である。$S_{b_1}$ は至る所有限なので定理 2.6.16 が使えて、$\tilde{B}_s = \tilde{W}_{S_{b_1}+s} - \tilde{W}_{S_{b_1}} = W_{S_{b_1}+s} + \mu s - b_1$ は $P^\mu$ の下でブラウン運動である。したがって $b = b_1 + b_2$ とすると、過程 $B_s = \tilde{B}_s - \mu s = W_{S_{b_1}+s} - b_1$ は $P^\mu$ の下でずれ $-\mu$ を持つブラウン運動であり、よって $U_{b_2} = \inf\{B_s = b_2\}$ を使って、

$$
\begin{aligned}
P[S_b \le t] &= P^\mu[S_{b_1} \le t] P^\mu[U_{b_2} \le t - S_{b_1}] \\
&= \int_0^{t-s} \int_0^s e^{\mu b_1 - (1/2)\mu^2 \tau} e^{\mu b_2 - (1/2)\mu^2 \sigma} P[T_b \in d\tau] P[T_{b_2} \in d\sigma]
\end{aligned}
$$

と書ける。これを $t$ で微分することで、

$$
P[S_b \in dt] = \int_0^t h(s; b_1, \mu) h(t-s; b_2, \mu) ds
$$

となって結論を得る。

３－６

問題 6.7：(i)$f = 1_B$ ならば定義から明らかで、ここから結論を示すのは容易である。
(ii) 仮定から $f = 1_{[}a, b]$ に対しては成り立つことがわかる。後はいつものやり方で結論を得る。

式 (6.11) について：ここで積分 $\int_0^t 1_{(a,+\infty)}(W_s)dW_s$ の $W_s$ が確率 1 で $W_0 = z$ を満たすことについて、確率積分の定義と違うことにとまどった。おそらく他の項目などと比較するに、$M_t$ が必ずしも $M_0 = 0$ を確率 1 で満たすとは限らない局所マルチンゲールの場合、$N_t = M_t - M_0$ を持ってきて、$dN_t$ の意味で $dM_t$ という表記をする、ということだと思われる。

定理 6.11 の証明：$s$ と $t$ の順序を交換して同じ評価を示すべきだが、証明は簡単だった。

問題 6.12 と 6.13：解答の通り。

問題 6.18：$2L_t = M_t^B$ なので、任意の自然数 $N$ に対して停止時刻 $T_N = \inf\{t \geq 0 | B_t = N\} < +\infty$ が確率 1 で成り立つことから自然に導かれる。なお、このあたりの式番号が日本語版は盛大にずれているので注意。おそらく (6.25) が不要で、その分すべてひとつ大きい番号がついている。

問題 6.19：ほとんどは凸解析の常識レベルだが一応ヒントの通り。

問題 6.20：これは凸解析を知っていれば常識レベルの問題なので解答を真剣に読んでいない。常識という感想。

問題 6.21：同上。そもそも実数値凸関数はすべて局所リプシッツなので、局所的に絶対連続である。

式 (6.48) について：本質的に重要なのに証明が載っていないので、杉浦光男『解析入門Ｉ』の第 4 章の定理 17.6 と 17.9 を使うことで示せることを注記しておく。なお、定理 17.9 は $C^1$ の証明だが、これを区分的に $C^1$ な関数にしても、微分可能でない点は高々有限個なので、積分をそれらの区間で分割して議論して足し合わせれば問題は起こらない。

定理 6.22 の証明の内部：ここでは、$X_s^n$ と $X_s$ がすべて一様有界で、かつ $X_s^n$ が $X_s$ に

概収束しているとき、$\int_0^t X_s^n dW_s$ が $\int_0^t X_s dW_s$ に $L^2$ 収束するという結果が使われているが、この結果の証明が見当たらなかったので確認してみた。まず、

$$Y_s^n = \int_0^t (X_s^n - X_s)dW_s$$

を考えると、これは二乗可積分マルチンゲールである。そして、

$$E[(Y_s^n)^2] = E[\langle Y_s^n \rangle] = E\int_0^t (X_s^n - X_s)^2 ds \to 0$$

となるから、$Y_s^n$ は $L^2$ の意味で 0 に収束する。これで証明が完成した。

問題 6.24：まず、$D$ のどの要素よりも小さな数 $a$ を取る。$b_k = f'(a_k+) - f'(a_k-)$ とし、

$$g_1(x) = \int_a^b \max\{0, f''(y)\}dy + \sum_{k:a_k<x} \max\{0, b_k\},\ g_2(x) = \int_a^b \max\{0, -f''(x)\}dy + \sum_{k:a_k<x} \max\{0, -b_k\}$$

と定義すれば、$D^- f(x) = f'(a) + g_1(x) - g_2(x)$ である。そして、$g_1(x)$ と $g_2(x)$ はいずれも非減少なので、$D^- f$ は有界変分である。ここで

$$G_1(x) = \int_a^x (f'(a) + g_1(y))dy,\ G_2(x) = \int_a^x g_2(y)dy$$

とすれば、$f(x) = G_1(x) - G_2(x)$ であり、$G_1(x)$ と $G_2(x)$ は共に凸関数なので、最初の主張はこれで示された。後は定理 6.22 を適用することで、

$$G_i(W_t) = G_i(z) + \int_0^t g_i(W_s)dW_s + \int_{-\infty}^{\infty} L_t(x)dg_i$$

を得る。そこで証明するべきは

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_t(x)dg_1 = \frac{1}{2}\int_0^t \max\{0, f''(W_s)\}ds + \sum_k L_t(a_k)\max\{0, b_k\},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_t(x)dg_2 = \frac{1}{2}\int_0^t \min\{0, -f''(W_s)\}ds + \sum_k L_t(a_k)\max\{0, -b_k\}$$

の二式である。しかしこれは (6.7) 式と (6.48) 式で尽くされている。

問題 6.29：解答の通り。

問題 6.30：まず、仮定から、$\varepsilon > 0$ と開区間 $U$ で、$\{x \in U | f(x) > \varepsilon\}$ の測度が正であるようなものが存在する。この開区間の中心を $x$ としよう。(6.7) 式から、$\Omega^*$ から $\omega$ を取ってくれば、任意の $t > 0$ に対して

$$\int_0^t f(W_s(\omega))ds = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(y)L_t(y,\omega)dy > 2\int_U \varepsilon L_t(y,\omega)dy$$

が得られる。ここで $t \to \infty$ とすると問題 6.18 から右辺がほとんどすべての $\omega$ について $+\infty$ に発散するので、ここから (6.55) が得られる。

次の主張がよくわからなかった。中心極限定理が使えるかと思ったが、$X_t$ がブラウン運動でないためどうも違うような気がする。この問題をどうしても使わなければならなくなったら戻ってくることにして、ひとまず先に進む。

３－７

問題 7.3：解答の通り。なお、本文中日本語版は (7.5) 式が余分で、これ以降の番号が全部ずれているので注意。

補題 7.5 の証明について：念のために、$\alpha > 1$ でないと (7.15) 式が怪しいことに注意。あと局所化から全体に修正する方法について記述しておく。いま $T_n$ という停止時刻の列で $T_n \to \infty$ が確率 1 で成り立ち、また

$$I_t^n(a) = I_{t \wedge T_n}(a)$$

に対する補題の要件を満たす $\tilde{I}_t^n(a)$ が存在することまでは示された。仮定から、あらゆる有理点 $(t, a)$ とあらゆる $n$ に対して $I_t^n(a) = \tilde{I}_t^n(a)$ となる確率が 1 である。そのような点 $\omega$ において、$n < m$ のとき、

$$\tilde{I}_{t \wedge T_n}^m(a) = \tilde{I}_t^n(a)$$

であることは容易にわかる。そこで、

$$\tilde{I}_t(a) = \tilde{I}_t^n \text{ if } t \le T_n$$

と定義する。上記 $\omega$ において $\tilde{I}_t(a)$ は連続である。また $\tilde{I}_t(a) = \lim_{n\to\infty} \tilde{I}_t^n(a)$ であるから、上記 $\omega$ に対して、$t, a$ が有理数の場合には $\tilde{I}_t(a) = I_t(a)$ を得る。次に、$a$ が有理数でない場合を考えよう。$(a_n)$ は有理数列で $a_n \uparrow a$ のとき、$1_{(a_n,\infty)}(X_s)$ は $1_{(a,\infty)}(X_s)$ に単調に収束するので、$L^2$ 収束しており、よって必要ならば部分列を取って、定理 6.22 の証明と同様にして、

$$\int_0^t 1_{(a_n,\infty)}(X_s)dM_s \to \int_0^t 1_{(a,\infty)}(X_s)dM_s$$

がすべての有理数 $t$ とほとんどすべての $\omega$ で成り立つことを示せる。このとき、そのようなところで

$$\tilde{I}_t(a) = I_t(a)$$

がすべての有理数 $t$ に対して成り立つ。両辺とも $t$ については連続なので、$t$ は有理数でなくとも成り立つ。以上で証明が完成した。

問題 7.7：解答の通り。