４－２

問題 2.4：$\bar{D}$ はコンパクトなので u は $\bar{D}$ のどこかで最大値を持つが、D 上に最大値を持つなら D で定数であるから ∂D でも定数で、よって ∂D にも最大値を持つ。D 上に最大値を持たなければ ∂D に最大値を持つので、最初の主張はこれで示せた。二番目については、$v-u$ は調和な連続関数なので ∂D 上に最大値を持つが最大値が 0 なので D 上全体で 0 以下、$u-v$ も同様なので $u=v$ しかあり得ない。

問題 2.8：関数 $u(x_1,x_2)=x_1x_2$ は解の条件を満たすが、ブラウン運動の座標ごとの独立性から、(2.12) で定義される関数 $u(x_1,x_2)$ は x_1 に依存してはならない。

問題 2.16：正しいように見えるが複素数との位相同型を取るときに可微分性が保たれない可能性が気になった。simple arc というのが滑らかなものだったら可能なのかもしれない。

4.2.4 節について：あまり興味がなかったので追わなかったことだけ書いておく。

４－３

問題 3.1：ちょっと評価が間違っていると思われる式が出てきたが、一応論理はつながるので解答の通りでよいかと思われる。

問題 3.2：解答の通り。

問題 3.8：(i) 実際、$u(t-s, W_s)$ は $s \to t$ のとき 0 に概収束するので、問題 1.3.19 の結果を使えば、これは $[0,t]$ 上の一様可積分マルチンゲールであり、よって $u(t,x)=0$ が成り立たなければならない。

(ii) よくわからなかった。$|f(x)|$ が有界ならば問題 3.2 などからこれが解になることがわかるので、(i) を使って解の一意性を言えばよいと思う。有界性を外して言えるかどうかは疑問が残る。

問題 3.11：(3.36) については、問題 1.3.28 を $Z_t = v(s, W_t)$ に適用すればほとんど明白である。(3.37) については、やはり同じ問題から

$$P^0[\sup_{t \geq s} Z_t \geq b] = P^0[Z_s \geq b] + \frac{1}{b} E[Z_s 1_{Z_s < b}]$$

を得る。まずは右辺の関数を計算すると、

$$\begin{aligned} P^0[Z_s \geq b] = P^0[W_s \geq A(s,b)] &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{-\infty}^{A(s,b)} e^{-\frac{x^2}{2s}} dx \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{A(s,b)}{\sqrt{s}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \Phi\left(\frac{A(s,b)}{\sqrt{s}}\right) \end{aligned}$$

と、

$$
\begin{aligned}
E[Z_s 1_{Z_s<b}] &= \int_{W_s<A(s,b)} \int_{0+}^{\infty} e^{yW_s - \frac{1}{2}y^2 s} dF(y) dP^0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{0+}^{\infty} \int_{-\infty}^{A(s,b)} e^{yx-\frac{1}{2}y^2 s} e^{-\frac{x^2}{2s}} dx dF(y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{0+}^{\infty} \int_{-\infty}^{A(s,b)} e^{-\frac{(x-sy)^2}{2s}} dx dF(y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0+}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{A(s,b)-ys}{\sqrt{s}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx dF(y) \\
&= \int_{0+}^{\infty} \Phi\left(\frac{A(s,b)}{\sqrt{s}} - y\sqrt{s}\right) dF(y)
\end{aligned}
$$

となる。最後に残ったのは、$P^0[\exists t \geq s \text{ s.t. } W_t \geq A(t,b)]$ と $P^0[\sup_{t\geq s} Z_t \geq b]$ の差であるが、実際のところ $A = \{\exists t \geq s \text{ s.t. } W_t \geq A(t,b)\}$ とすれば、

$$P^0[\sup_{t\geq s} Z_t \geq b] \leq P^0(A) \leq P^0[\sup_{t\geq s} Z_t \geq b+\varepsilon]$$

なので、$\varepsilon \downarrow 0$ とすればはさみうちの原理から

$$P^0(A) = P^0[\sup_{t\geq s} Z_t \geq b]$$

となって証明が完成する。

４－４

注意 4.10 に出てくるラプラス変換：まず、$\xi \neq 0$ として

$$\Phi(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{\xi^2}{2t}} dt$$

と定義する。単調収束定理から容易に、

$$\Phi'(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{\xi^2}{2t}} dt$$

という計算を得る。一方で、

$$s = \frac{\xi^2}{2\alpha t}$$

という変数変換をしてみると、

$$dt = -\frac{\xi^2}{2\alpha s^2} ds$$

となるため、

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= -\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{2s}} \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{2\pi\xi^2 s}} e^{-\alpha s} ds \\ &= -\frac{\sqrt{2\alpha}}{|\xi|} \Phi'(\alpha) \end{aligned}$$

となる。変形して

$$\Phi'(\alpha) = -\frac{|\xi|}{\sqrt{2\alpha}} \Phi(\alpha)$$

となる。この問題の解は

$$\Phi(\alpha) = A(\xi) e^{-|\xi|\sqrt{2\alpha}}$$

と書けるため、

$$\Phi'(\alpha) = -\frac{A(\xi)|\xi|}{\sqrt{2\alpha}} e^{-|\xi|\sqrt{2\alpha}}$$

という形が定まる。

あとは関数 $A(\xi)$ を決定する作業だけが残っている。Φ は $\alpha = 0$ でも定まっているので、代入すると

$$\Phi(0) = A(\xi)$$

が得られる。一方で、

$$\Phi(0) = -\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{\xi^2}{2t}} dt$$

であるから、これの計算をしなければならない。ふたたび $s=\frac{\xi^2}{2t}$ とすると

$$dt=-\frac{\xi^2}{2s^2}ds$$

であるから、

$$\Phi(0)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}|\xi|}\int_0^\infty s^{-1/2}e^{-s}ds=-\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}|\xi|}=-\frac{1}{|\xi|}$$

となる。以上で、

$$\Phi'(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-|\xi|\sqrt{2\alpha}}$$

が示せた。この結果は $\xi\neq 0$ であるときに得られたが、両辺は ξ について連続なので $\xi=0$ のときも同じ式が成り立つ。以上で証明が終わった。