

問題 1.2：まず、

$$\begin{aligned}
E^x[X_t^{(i)} - x_i] &= E^x \int_0^t b_i(X_s) ds + \sum_{j=1}^r E^x \int_0^t \sigma_{ij}(X_s) dW_s^{(j)} \\
&= E^x \int_0^t b_i(X_s) ds \\
&= tb_i(x) + E^x \int_0^t (b_i(X_s) - b_i(X_0)) ds \\
&= tb_i(x) + \int_0^t E^x[b_i(X_s) - b_i(X_0)] ds \\
&= tb_i(x) + o(t)
\end{aligned}$$

である。ただし、最後の式評価には X_s の連続性を用いた。よって (1.3) は正しい。同様に、

$$E^x \int_0^t b_i(X_s) ds \int_0^t b_k(X_s) ds = o(t)$$

が簡単に示せるため、

$$\begin{aligned}
E^x[(X_t^{(i)} - x_i)(X_t^{(k)} - x_k)] &= E^x \int_0^t b_i(X_s) ds (X_t^{(k)} - x_k) + E^x \int_0^t b_k(X_s) ds (X_t^{(i)} - x_i) \\
&\quad - E^x \int_0^t b_i(X_s) ds \int_0^t b_k(X_s) ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^r \sum_{\ell=1}^r E^x \int_0^t \sigma_{ij}(X_s) dW_s^{(j)} \int_0^t \sigma_{k\ell}(X_s) dW_s^{(\ell)} \\
&= E^x \int_0^t b_i(X_s) ds (X_t^{(k)} - x_k) + E^x \int_0^t b_k(X_s) ds (X_t^{(i)} - x_i) \\
&\quad - E^x \int_0^t b_i(X_s) ds \int_0^t b_k(X_s) ds \\
&\quad + E^x \int_0^t a_{ik}(X_s) ds
\end{aligned}$$

という変形の最後の項以外は $o(t)$ であることが示せる。また最後の項は $ta_{ik}(x) + o(t)$ であるため、(1.4) も正しい。

一般に、 $f : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ が C^2 で一階微分と二階微分が有界であると仮定した場合、テイ

ラーの定理から、 $h_{ik}(x) = 0$ を満たす連続関数 h_{ik} を使って

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x)(y_i - x_i)(y_k - x_k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r h_{ik}(y)(y_i - x_i)(y_k - x_k) \end{aligned}$$

を得る。ここから、

$$E^x[f(X_t) - f(x)] = t(\mathcal{A}f)(x) + o(t) + E^x \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r h_{ik}(X_t)(X_t^{(i)} - x_i)(X_t^{(k)} - x_k)$$

が示せるが、最後の項が $o(t)$ であることは容易に示せる。以上で証明が完成した。

例 2.4 について：まず、

$$B_t^i \equiv \int_0^t b(s, X_s^i) ds = \int_0^t b^+(s, X_s^i) ds - \int_0^t b^-(s, X_s^i) ds$$

から、この B_t の部分は非減少過程の差として表せる。よって $X_t^i = X_0 + W_t + B_t^i$ は半マルチンゲールであり、伊藤の公式が適用できる。そして、 $\Delta_t^2 = (B_t^1 - B_t^2)^2$ なので、これに伊藤の公式を適用すれば例 2.4 の結論を得ることができる。

問題 2.7：ヒントの通り。

問題 2.10：ヒントのところどころに疑問があったので少し補足する。まず (9.2) の導出について。これは、

$$\begin{aligned} \|v_1 + \dots + v_k\|^2 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k v_i \cdot v_j \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \|v_i\| \|v_j\| \\ &\leq k^2 \max_i \{\|v_i\|^2\} \leq k^2 (\|v_1\|^2 + \dots + \|v_k\|^2) \end{aligned}$$

を確かめておく。これを用いて、

$$\begin{aligned} E\|X_t^{(k+1)}\|^2 &= E\left\|\xi + \int_0^t b(s, X_s^{(k)}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s\right\|^2 \\ &\leq 9E\|\xi\|^2 + 9E\left\|\int_0^t b(s, X_s^{(k)}) ds\right\|^2 + \sum_{i=1}^d E \sum_{j=1}^r \left|\int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s^{(k)}) dW_s^{(j)}\right|^2 \\ &\leq 9E\|\xi\|^2 + 9tE \int_0^t \|b(s, X_s^{(k)})\|^2 ds + 9E \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^r \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s^{(k)}) dW_s^{(j)}\right)^2 \\ &\leq 9E\|\xi\|^2 + 9TE \int_0^t \|b(s, X_s^{(k)})\|^2 ds \\ &\quad + 9E \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r \sum_{\ell=1}^r \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s^{(k)}) \sigma_{i\ell}(s, X_s^{(k)}) d\langle W_s^{(j)}, W_s^{(\ell)} \rangle \\ &= 9E\|\xi\|^2 + 9TE \int_0^t \|b(s, X_s^{(k)})\|^2 ds + 9E \int_0^t \|\sigma(s, X_s^{(k)})\|^2 ds \\ &\leq 9E\|\xi\|^2 + 9(T+1)K^2 \int_0^t (1 + E\|X_s^{(k)}\|^2) ds \end{aligned}$$

を得る。後は $C = \max\{9(T+r)K^2, 1\}$ とすればよい。最後の不等式は帰納法で容易に示せる。

問題 2.11：ヒントの通り。

問題 2.12：ヒントの通り。

命題 2.13 への注： $h^{-2}(u)$ というのは $(h(u))^{-2}$ の意味。

また、(2.27) が満たされない場合について注記しておく。この場合、定義 2.1 の (iii) と問題 1.2.19 から、 $|\sigma(s, X_s^{(i)})|^2$ は 3.2 節で議論されていた集合 $\mathcal{P}^*$ に属することがわかる。したがって $Y_t^i = \int_0^t \sigma(s, X_s^{(i)}) dW_s$ は局所マルチンゲールであり、よって $P(\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^i = +\infty) = 1$ となる非減少な停止時刻の列 (T_n^i) で、 $Y_{t \wedge T_n^i}^i$ が二乗可積分マルチンゲールになるものが存在する。同様に定義 2.1 の (iii) を用いることで、一般性を失うことなく、 $Z_t^i = \int_0^t |b(s, X_s^{(i)})| ds$ に対しても、 $EZ_{t \wedge T_n^i}^i < +\infty$ を仮定してよい。 $T_n = T_n^1 \wedge T_n^2$ とする。本文と同様、

$$\begin{aligned} \Delta_t &\equiv X_t^{(1)} - X_t^{(2)} = \int_0^t [b(s, X_s^{(1)}) - b(s, X_s^{(2)})] ds \\ &\quad + \int_0^t [\sigma(s, X_s^{(1)}) - \sigma(s, X_s^{(2)})] dW_s \end{aligned}$$

を定義する。右辺第一項は連続な有界変分過程で、第二項は $\mathcal{M}^{c, loc}$ に含まれるため、伊藤の公式が適用できて、本文と同じ評価が成り立つ。したがって任意の m に対して

$$\begin{aligned} \psi_n(\Delta_{t \wedge T_m}) &= \int_0^{t \wedge T_m} \psi'_n(\Delta_s) [b(s, X_s^{(1)}) - b(s, X_s^{(2)})] ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge T_m} \psi''_n(\Delta_s) [\sigma(s, X_s^{(1)}) - \sigma(s, X_s^{(2)})]^2 ds \\ &\quad + \int_0^{t \wedge T_m} \psi'_n(\Delta_s) [\sigma(s, X_s^{(1)}) - \sigma(s, X_s^{(2)})] dW_s \end{aligned}$$

を得るが、 T_m の取り方から第三項は $t = 0$ で 0 を取るようなマルチンゲールであり、したがって期待値は 0 である。後の評価は同様にしてやれば

$$\begin{aligned} E\psi_n(\Delta_{t \wedge T_m}) &\leq K \int_0^{t \wedge T_m} E|\Delta_s| ds + \frac{t}{n} \\ &\leq K \int_0^t E|\Delta_s| ds + \frac{t}{n} \end{aligned}$$

を得る。 $n \rightarrow \infty$ として

$$E|\Delta_{t \wedge T_m}| \leq K \int_0^t E|\Delta_s| ds$$

であるが、ここからファトゥの補題によって

$$E|\Delta_t| \leq K \int_0^t E|\Delta_s| ds$$

を得る。後の証明は同じである。

補題 2.23 への注：証明内部で

$$\int_0^t (s + \check{V}_s)^k d(s + \check{V}_s) = \frac{1}{k+1} (t + \check{V}_t)^{k+1}$$

が使われている。ここで扱われている関数は連続な増加関数だけなので、普通にリーマン＝スティルチェス和を取って極限を取れば証明できる。実際、中間値の定理を用いて、 $t_i^n + \check{V}_{t_i^n} = \frac{i}{n}(t + \check{V}_t)$ となる t_i^n の存在を示せて、 $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = t$ である。よって、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (t_i^n + \check{V}_{t_i^n})^k (t_i^n + \check{V}_{t_i^n} - t_{i-1}^n - \check{V}_{t_{i-1}^n}) \\ &= \frac{(t + \check{V}_t)^{k+1}}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i^k}{n^k} \end{aligned}$$

であり、最後の項の足し算の部分

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i^k}{n^k}$$

は、 x^k の $[0, 1]$ 区間の等間隔分割のリーマン和と一致しているため、 $n \rightarrow \infty$ とすれば $\frac{1}{k+1}$ に収束する。

注意 3.3 について：確かめておきたい。まず例 2.4 については、 W_t が同一であることから特に変更はない。定理 2.5 については、 S_n の可測性は証明中では問題にならないため、特に証明を変更しなくともよい。命題 2.13 も同様。命題 2.21 はそもそも局所化していない。

命題 3.6 について：怪しい。具体的に言うと、Brown 族 X_t に対して $b(t, X_t)$ が可測であるための条件がない。通常、この種の問題で与えられる仮定はカラテオドリの条件、つまり $b(t, x)$ の x についての連続性であるが、これが仮定されていないため、証明が正しいかどうか判定できない。ここは上のカラテオドリの条件を追加で仮定しなければいけないように思える。後で述べるように命題 3.10 の証明も b が連続でない場合には適用できないように見えるため、ここは注意してチェックすべきであると考えられる。

命題 3.10 の証明：(3.10) 式がまるでわからなかったので、自分なりに考えてみた。

まず、Novikov の条件に関係する部分がとても難しかったので、ここではまず b が連続、かつ確率 1 で

$$\max_{t \in [0, T]} \|b(t, X_t^i)\| \leq K$$

を満たす K が存在する場合を考える。この場合、Novikov の条件は $Y_t^i = -b(t, X_t^i)$ に対してダイレクトに成り立っているため、

$$\xi_t(X^i) = \exp \left(- \int_0^t b(s, X_s^i) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|b(s, X_s^i)\|^2 ds \right)$$

はマルチンゲールであり、

$$X_t^i - X_0^i = \int_0^t b(s, X_s^i) ds + W_t^i$$

は $\tilde{P}^i$ の下で原点から出発するブラウン運動でなければならない。これを踏まえて、

$$\int_{\Omega^i} \frac{1}{\xi_T(X^i)} 1_{\Gamma}(X_{t_0}, W_{t_0}, \dots, X_{t_n}, W_{t_n}) d\tilde{P}^i$$

が、 i に依存しないことを示さなければならない。 Γ が閉集合の場合に示せば単調族の補題から主張は正しい。そこで $f_\varepsilon : \mathbb{R}^{(n+1)d} \rightarrow [0, 1]$ を、 Γ 上で 1 を取り、 Γ からの距離が ε を越えると 0 になるような連続関数とし、 1_Γ を f_ε で置き換えて証明できればよい。

アイデアを理解するために、 $n = 0$ かつ $t_0 = T$ の場合の証明を書こう。ここで $t_0^{k,m} = \frac{k-1}{m}t_0$ と定義する。このとき、

$$\xi_T(X^i) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \exp \left(\sum_{j=1}^d b_j(t_0^{k,m}, X_{t_0^{k,m}}^i) (W_{t_0^{k+1,m}}^{i,j} - W_{t_0^{k,m}}^{i,j}) - \frac{1}{2m} \|b(t_0^{k,m}, X_{t_0^{k,m}}^i)\|^2 t_0 \right)$$

と書ける。ただしこの収束は、 K が存在することから有界収束定理が適用できて、 L^1 の意味での収束として捉えることができる。さらに、 $t_0^{k,\ell,m,\mu} = \frac{\mu-\ell}{\mu}t_0^{k,m} + \frac{\ell}{\mu}t_0^{k+1,m}$ とすると (3.9) 式から

$$W_{t_0}^i = X_{t_0}^i - X_0^i - \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{m\mu} \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^{\mu} b(t_0^{k,\ell,m,\mu}, X_{t_0^{k,\ell,m,\mu}}^i) t_0,$$

$$W_{t_0^{k+1,m}}^i - W_{t_0^{k,m}}^i = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{m\mu} \sum_{\ell=1}^{\mu} b(t_0^{k,\ell,m,\mu}, X_{t_0^{k,\ell,m,\mu}}^i) t_0$$

であるため、これを代入して有界収束定理を用いることで^{*1}、閉集合である Γ に対して

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^i} \frac{1}{\xi_T(X^i)} f_\varepsilon(X_{t_0}, W_{t_0}) d\tilde{P}^i \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{\Omega^i} \prod_{k=1}^m \exp \left(- \sum_{j=1}^d \sum_{\ell=1}^{\mu} \frac{1}{m\mu} b_j(t_0^{k,m}, X_{t_0^{k,m}}^i) b_j(t_0^{k,\ell,m,\mu}, X_{t_0^{k,\ell,m,\mu}}^i) t_0 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2m} \|b(t_0^{k,m}, X_{t_0^{k,m}}^i)\|^2 t_0 \right) \times f_\varepsilon(X_{t_0}^i, W_{t_0}^i) d\tilde{P}^i \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^m \exp \left(- \sum_{j=1}^d \sum_{\ell=1}^{\mu} \frac{1}{m\mu} b_j(t_0^{k,m}, x_{(k-1)m}) b_j(t_0^{k,\ell,m,\mu}, x_{\ell+(k-1)\mu}) t_0 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2m} \|b(t_0^{k,m}, x_{(k-1)m})\|^2 t_0 \right) \\ & \quad \times f_\varepsilon \left(x_{m\mu}, x_{m\mu} - x_0 - \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^{\mu} \frac{1}{m\mu} b(t_0^{k,\ell,m,\mu}, x_{\ell+(k-1)\mu}) t_0 \right) \\ & \quad \times \prod_{k,\ell=1}^m \prod_{j=1}^d p((m\mu)^{-1} t_0, x_{\ell+(k-1)m}^j, x_{\ell-1+(k-1)m}^j) d\mu(x_0) dx_1 \dots dx_{m\mu} \end{aligned}$$

となる。これで証明が完成した。

^{*1} $\|b(t, X_t)\|$ が有界でないとこのステップがうまくいかない。

以上を一般化するために、まず必要あれば $t_{n+1} = T$ および $\tilde{\Gamma} = \Gamma \times \mathbb{R}^{2d}$ と定義することと、 $t_n = T$ を仮定して問題ないことを確認しておく。この場合、 $t_{-1} = 0$ として、同様に $t_\kappa^{k,m} = \frac{m-k+1}{m}t_{\kappa-1} + \frac{k-1}{m}t_\kappa$ とすると、

$$\xi_T(X^i) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{\kappa=0}^n \prod_{k=1}^m \exp \left(\sum_{j=1}^m b_j(t_\kappa^{k,m}, X_{t_\kappa^{k,m}}^i) (W_{t_\kappa^{k+1,m}}^{i,j} - W_{t_\kappa^{k,m}}^{i,j}) - \frac{1}{2m} \|b(t_\kappa^{k,m}, X_{t_\kappa^{k,m}}^i)(t_\kappa - t_{\kappa-1})\| \right)$$

と書ける。さらに、 $t_\kappa^{k,\ell,m,\mu} = \frac{\mu-\ell}{\mu}t_\kappa^{k,m} + \frac{\ell}{\mu}t_\kappa^{k+1,m}$ として、

$$W_{t_\kappa}^i = X_{t_\kappa}^i - X_0^i - \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{m\mu} \sum_{\iota=0}^\kappa \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^\mu b(t_\iota^{k,\ell,m,\mu}, X_{t_\iota^{k,\ell,m,\mu}}^i)(t_\iota - t_{\iota-1}),$$

$$W_{t_\kappa^{k+1,m}}^i - W_{t_\kappa^{k,m}}^i = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{m\mu} \sum_{\ell=1}^\mu b(t_\kappa^{k,\ell,m,\mu}, X_{t_\kappa^{k,\ell,m,\mu}}^i)(t_\kappa - t_{\kappa-1})$$

であるため、同様に Γ が閉集合のときには

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^i} \frac{1}{\xi_T(X^i)} f_\varepsilon(X_{t_0}, W_{t_0}, \dots, X_{t_n}, W_{t_n}) d\tilde{P}^i \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{\Omega^i} \prod_{\kappa=0}^n \prod_{k=1}^m \exp \left(- \sum_{j=1}^d \sum_{\ell=1}^\mu \frac{1}{m\mu} b_j(t_\kappa^{k,m}, X_{t_\kappa^{k,m}}^i) b_j(t_\kappa^{k,\ell,m,\mu}, X_{t_\kappa^{k,\ell,m,\mu}}^i)(t_\kappa - t_{\kappa-1}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2m} \|b(t_\kappa^{k,m}, X_{t_\kappa^{k,m}}^i)\|(t_\kappa - t_{\kappa-1}) \right) \times f_\varepsilon(X_{t_0}^i, W_{t_0}^i, \dots, X_{t_n}^i, W_{t_n}^i) d\tilde{P}^i \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int \prod_{\kappa=0}^n \prod_{k=1}^m \exp \left(- \sum_{j=1}^d \sum_{\ell=1}^\mu \frac{1}{m\mu} b_j(t_\kappa^{k,m}, x_{(k-1)m,\kappa}) b_j(t_\kappa^{k,\ell,m,\mu}, x_{\ell+(k-1)\mu,\kappa})(t_\kappa - t_{\kappa-1}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2m} \|b(t_\kappa^{k,m}, x_{(k-1)m,\kappa})\|(t_\kappa - t_{\kappa-1}) \right) \\ & \quad \times f_\varepsilon \left(x_{m\mu,0}, x_{m\mu,0} - x_{0,0} - \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^\mu \frac{1}{m\mu} b(t_0^{k,\ell,m,\mu}, x_{\ell+(k-1)\mu,0}) t_0, \right. \\ & \quad \left. \dots, x_{m\mu,n}, x_{m\mu,n} - x_{0,0} - \sum_{\kappa=0}^n \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^\mu \frac{1}{m\mu} b(t_\kappa^{k,\ell,m,\mu}, x_{\ell+(k-1)\mu,\kappa})(t_\kappa - t_{\kappa-1}) \right) \\ & \quad \times \prod_{k,\ell=1}^m \prod_{\kappa=0}^n \prod_{j=1}^d p((m\mu)^{-1}(t_\kappa - t_{\kappa-1}, x_{\ell+(k-1)m,\kappa}^j, x_{\ell-1+(k-1)m,\kappa}^j) d\mu(x_0) dx_{1,0} \dots dx_{m\mu,n} \end{aligned}$$

と書ける。これで示せた。

この結果は b の連続性に依存している。実際、 $b(t, X_t)$ が連続でない場合、単過程 $\sum_{k=1}^m b(t_0^{k,m}, X_{t_0^{k,m}}) 1_{(t_0^{k,m}, t_0^{k+1,m}]}$ が $b(t, X_t)$ に収束してくれるかどうかはわからない。関数 b をなんらかの関数で近似することも考えたが、連続性がないために L^∞ では近似列を取れず、うまく行きそうにない。しかし、練習問題 3.12 で扱われている関数は不連続であるため、なにか工夫しなければならない。幸い、 $b(t, X_t) = -\text{sgn}(X_t)$ の場合、不連続な点は $X_t = 0$ となる点のみである。 $\tilde{P}$ の下では $\{\text{meas}\{t | X_t = 0\} > 0\}$ は確率 0 であるため、リーマン和の方はほとんどすべての点で収束してくれる。問題は上の単過程が $b(t, X_t)$ に収束してくれるかどうかであるが、補題 2.4 の (b) の $F_t = \int_0^t b(s, X_s) ds$ を用いて $X^m(t) = m[F_t - F_{(t-m^{-1}) \vee 0}]$ によって議論をやり直す方法が考えられる。この場合、やはり $b(s, X_s)$ がリーマン積分可能であることから、 F の定義をリーマン和でさらに近似することが可能であり、組み合わせることで証明できることが想定される。しかし、練習問題一つのためにそこまでの労力をかけるのが割に合わないので、いったんここで留め置き、命題 3.11 に b の連続性を追加したバージョンだけが証明できたことにして先に進むことにする。次に (3.6) 式しか成り立っていない場合を考える。まず、上の結果を使いたいため、 τ_k^i の定義を

$$\tau_k^i = T \wedge \inf\{t \in [0, T] \mid \|b(s, X_s^i)\| > k\}$$

と改めておく。命題 3.5.12 の前の議論から $\xi_t^k(X^i)$ はマルチンゲールであるが、これが定理 3.5.1 の性質を満たすかどうかについてはわかっていない。詳しく書くと、 $X_t^{i,k} = X_{t \wedge \tau_k^i}^i$ とすることで、

$$Z_t^{i,k} = \exp \left(- \sum_{j=1}^d \int_0^t b_j(s, X_s^{i,k}) dW_s^{i,j} - \frac{1}{2} \int_0^t \|b(s, X_s^i)\|^2 ds \right)$$

はマルチンゲールであることがわかる。任意抽出定理から

$$\xi_t^k(X^i) = Z_{t \wedge \tau_k^i}^{i,k}$$

もマルチンゲールであるが、 ξ_t^k に定理 3.5.1 が適用できるかどうかはわからない。したがって、定理は Z_t^k に対して適用されるべきである。幸い、 $\{\tau_k^i = T\}$ 上では $Z_t^{k,i}$ と $\xi_t^k(X^i)$ は同一であるため、(3.10) の計算式には狂いは生じない。そして、

$$1_{\{\tau_k^i = T\}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} 1_{\{\|b(t_\kappa^{k,\ell,m,\mu}, X_{t_\kappa^{k,\ell,m,\mu}}^i)\| \leq k \text{ for all } k, \ell, \kappa\}}$$

であるから、これを代入して議論することで上と同様に計算することができる。以上でこの場合の証明が完成した。この場合も、 b についての連続性は相変わらず仮定されていることに注意。