顕示選好理論についてのメモ

細矢祐誉

中央大学

May 17, 2024

顕示選好理論の歴史（１）

顕示選好理論は Samuelson (1938) から始まる消費者理論の一部分であり、その後多くの応用を生み出した。このあたりに関連する歴史を振り返ると、以下のようになる。

1) Samuelson (1938) による顕示選好の弱公理 (WARP) の提出
2) Houthakker (1950) による顕示選好の強公理 (SARP) の提出
3) 論争の期間。SARP は WARP より強いか
4) Gale (1960) による反例。WARP を満たし SARP を満たさない需要関数
5) Richter (1966) による顕示選好の適合性公理 (CARP) の導出

顕示選好理論の歴史（２）

一方で、現代的な消費者理論の一部としての顕示選好理論は需要関数ではなくデータを扱うが、こちらは以下のようになる。が、これは今回は扱わない。

1) Afriat (1967) による基本定理の提出。
2) Varian (1983) による上記定理の証明の訂正。顕示選好の一般化公理 (GARP) の提出。
3) Chiappori and Rochet (1987) による顕示選好の強強公理 (SSARP) の提出。
4) Matzkin and Richter (1991) による顕示選好の強公理 (SARP) の提出。

モデル（1）

いま、$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は選択できる消費計画の集合とする。
$x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$ のとき、x_i が計画されている第 i 財の消費である。これに対して、正の価格ベクトル $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ を取ると、この消費計画 x を購入するための費用は $p \cdot x$ という内積の値で表せる。これが当初予算 $m > 0$ を越えないような点の集合を $\Delta(p, m)$ で表現する。つまり、

$$\Delta(p, m) = \{x \in \Omega | p \cdot x \leq m\}$$

である。$\Delta(p, m) \neq \emptyset$ となる $(p, m) \in \mathbb{R}^{n+1}_{++}$ の集合を P としておく。
関数 $f : P \to \Omega$ は、$f(p, m) \in \Delta(p, m)$ をすべての $(p, m) \in P$ に対して満たすとき、**需要関数**と呼ぶことにする。また、非空値の多価関数 $f : P \twoheadrightarrow \Omega$ を扱うこともあり、この場合は**需要対応**と呼ぶ。

モデル（2）

Ω 上の弱順序 $\succsim$ とは、Ω^2 の部分集合で、かつ完備性と推移性を満たすものを言う。ここで完備性とは $x, y \in \Omega$ であるときには $(x, y) \in \succsim$ か $(y, x) \in \succsim$ のどちらかを満たすことであり、また推移性とは $(x, y) \in \succsim$ かつ $(y, z) \in \succsim$ ならば $(x, z) \in \succsim$ であることである。$(x, y) \in \succsim$ は、以後 $x \succsim y$ と略記する。また、$x \succsim y$ かつ $y \not\succsim x$ であることは $x \succ y$ と、$x \succsim y$ かつ $y \succsim x$ であることは $x \sim y$ と略記する。仮に実数値関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ に対して

$$x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

であるときには、u は $\succsim$ を**表現する**と言う。

モデル（3）

Ω 上の弱順序 $\succsim$ に対して、関数 $f^{\succsim}$ を以下のように定義する。

$$f^{\succsim}(p,m)=\{x\in\Omega|x\in\Delta(p,m) \text{ and } \forall y\in\Delta(p,m),\ x\succsim y\}.$$

この関数を $\succsim$ に**対応する**需要対応と呼ぶ。$f^{\succsim}$ が一価であるときは、$\succsim$ に対応する需要関数と呼ぶ。弱順序 $\succsim$ が実数値関数 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ で表現される場合には、$f^{\succsim}$ は f^u とも書く。この場合、f^u は u に対応するとも言う。

顕示選好の弱公理

$f: P \to \Omega$ が需要関数であるとする。いま、ある (p, m) に対して $x = f(p, m)$ かつ $y \in \Delta(p, m)$ であり、かつ $x \neq y$ であるとき、$x \succ_r y$ と書く。f が**顕示選好の弱公理** (WARP) を満たすとは、$\succ_r$ が非対称であること、つまり

$$x \succ_r y \Rightarrow y \not\succ_r x$$

を意味する。
いま $f = f^{\succsim}$ である場合、$x \succ_r y$ ならば $x \succ y$ である。これを用いると、

$$x \succ_r y \Rightarrow x \succ y \Rightarrow y \not\succ x \Rightarrow y \not\succ_r x$$

として、容易に WARP を得る。したがって、f がなんらかの弱順序に対応するための必要条件として WARP を捉えることができる。

顕示選好の強公理

$\succ_r$ の推移的閉包を $\succ_{ir}$ と書く。f が**顕示選好の強公理** (SARP) を満たすとは、$\succ_{ir}$ が非対称であることを意味する。
良く知られた事実として、$x \succ_{ir} y$ であることは、有限列 $x_0, ..., x_k$ が存在して、$x_0 = x, x_k = y$ であり、かつ $x_i \succ_r x_{i+1}$ が常に成り立つということと同値である。$\succ$ は推移的であることが知られているため、$x \succ_{ir} y$ ならば $x \succ y$ である。これを用いると、

$$x \succ_{ir} y \Rightarrow x \succ y \Rightarrow y \not\succ x \Rightarrow y \not\succ_{ir} x$$

となって、SARP を得る。したがって、やはり SARP もまた、f がなんらかの弱順序に対応するための必要条件である。ところが Houthakker (1950) は、これが十分条件でもあると主張したのであった。

ハウタッカーのアイデア（1）

ハウタッカーのアイデアは限界代替率に関係している。いま、$n=2$として、$\mathbb{R}^2_{++}$上でxに対してその場所での限界代替率を与える関数$\phi(x)$を取る。無差別曲線は限界代替率の-1倍を傾きに持たなければならないので、微分方程式

$$\dot{x}_2(x_1)=-\phi(x_1,x_2(x_1)),\ x_2(x_1^*)=x_2^*$$

を解けばx^*を通る無差別曲線$x_2(x_1)$を構成できる。この微分方程式のオイラー近似を取ろう。$h>0$を固定する。$x_1^0=x_1, x_2^0=x_2$とし、$x_1^i=x_1^*+ih$として、

$$x_2^{i+1}=x_2^i-h\phi(x_1^i,x_2^i)$$

と定義する。hが十分小さいとき、x_2^iは$x_2(x_1^i)$を近似することで知られているのだが、実はこの近似列が顕示選好の強公理と関係している。

ハウタッカーのアイデア（2）

定義から、

$$\phi(x_1^i, x_2^i)x_1^{i+1} + x_2^{i+1} = \phi(x_1^i, x_2^i)x_1^i + x_2^i$$

である。(x_1^i, x_2^i) が買われる価格を p^i とすると、$\phi(x_1^i, x_2^i) = \frac{p_1^i}{p_2^i}$ である。したがってこれは

$$p_1^i x_1^{i+1} + p_2^i x_2^{i+1} = p_1^i x_1^i + p_2^i x_2^i$$

を意味し、よって $(x_1^i, x_2^i) \succ_r (x_1^{i+1}, x_2^{i+1})$ である。ここからわかることは、$x^* \succ_{ir} x^i$ だということである。このとき、SARP は $x^i \not\succ_r x^*$ を意味するが、少し確かめてみると、実はこれは無差別曲線の近似解の原点に対する凸性を意味している。
したがって、SARP を満たす場合には無差別曲線が凸なので効用最大化で表現できる、というのがハウタッカーの主張の骨子であると言える。

リクターの定理

これに対して、リクターの導出した定理はハウタッカーとはまったく別のアイデアで導出されている。リクター自身は需要対応を含む広範囲に適用できる理論を提出したのだが、それは難しいので、ここではあくまで需要関数に限定して議論しよう。彼が考えたのは以下の理屈である。いま、$\succ_{ir}$ が与えられているとき、$\succ_{ir}\subset\succ$ となるような Ω 上の弱順序 $\succsim$ をうまく構成できたと仮定する。このとき、$f = f^{\succsim}$ である。実際、$x = f(p,m)$ かつ $y \in \Delta(p,m)$ としよう。このとき、$y = x$ ならば $x \sim y$ である。$y \neq x$ ならば、$x \succ_r y$ であるから、仮定から $x \succ y$ であり、よって $x = f^{\succsim}(p,m)$ である。すべての $(p,m) \in P$ についてこれが成り立つので、たしかに $f = f^{\succsim}$ であると言える[1]。したがって、後は上のような弱順序の存在が示せればよい。

[1] $f(p,m)$ の非空値性は本質的である。

シュピルラインの拡張定理（1）

リクターが弱順序の構成に用いたのは Szpilrajn (1930) による以下の定理である。

定理 1

X は非空集合であり、$\succ^*$ はその上の非対称かつ推移的な二項関係であるとする。このとき、$\succ^* \subset \succ$ を満たす全順序 $\succsim$ が存在する。

ここで $\succsim$ が全順序であるとは、それが弱順序で、かつ $x \sim y$ ならば $x = y$ であるという追加条件を満たすことを言う。

シュピルラインの拡張定理（２）

シュピルラインの拡張定理の証明は、ツォルンの補題によって行うのが一般的である。いま、$\succ^* \subset \succ$ となるような非対称かつ推移的な二項関係すべての集合を Y と置く。この集合は $\subset$ という関係に関して半順序集合となるが、任意の鎖が上界を持つことは、合併を取ることで容易に示すことができる。したがってツォルンの補題より、Y は極大元 $\succ^+$ を持つ。ここで、

$$\succsim^+ = \succ^+ \cup \{(x,x) | x \in X\}$$

と置く。この $\succsim^+$ が完備性と推移性を満たせば、それが求める全順序である。
$\succsim^+$ の推移性は場合分けで容易に示せるため、議論を省略する。

シュピルラインの拡張定理（3）

$\succsim^+$ が完備でない、つまり $x \not\succsim^+ y$ かつ $y \not\succsim^+ x$ であるような $x, y \in X^2$ が存在するとしよう。$\succsim^+$ の定義から、$x \neq y$ である。ここで順序

$$\succ = \succ^+ \cup \{(z,w) \in X^2 | z \succsim^+ x,\ y \succsim^+ w\}$$

とする。$x \not\succ^+ y$ だが $x \succ y$ なので、$\succ$ は $\succ^+$ を真に含む。場合分けによって容易に、$\succ$ の推移性と非対称性が示せる。したがって $\succ \in Y$ で、かつ $\succ^+$ は $\succ$ の真部分集合なので、$\succ^+$ は極大ではないことになるが、仮定に矛盾。これでシュピルラインの拡張定理の証明が完成した。後はこれを $\succ_{ir}$ に適用することで、次の定理を得る。

系 1

需要関数 $f : P \to \Omega$ が SARP を満たすことと、$f = f^{\succsim}$ となる弱順序が存在することは同値である。

疑問点

リクターは、ツォルンの補題ではなく、ブール代数の極大イデアルの存在定理を用いるだけでシュピルラインの拡張定理が示せる、と記述してある。極大イデアルの存在定理は選択公理よりも弱い集合論の公理であることが知られている。したがって、もしこれが正しいならば、ツォルンの補題を用いた上の証明よりは小さい仮定で証明できることになる。
残念ながら、このリクターの主張が正しいかどうかはまだわかっていない。

Thank you for your attention.