Identification and Testable Implimentation for Ramsey-Cass-Koopmans Model

細矢祐誉

中央大学

April 17, 2021

ラムゼイモデル

離散時間のラムゼイモデルは以下の最大化問題で表現される。

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(c_t) \\
\text{subject to.} \quad & k_t \geq 0,\ c_t \geq 0, \\
& k_{t+1} = f(k_t) - c_t, \\
& k_0 = \bar{k} > 0 \text{ is given.}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ただし $\delta \in]0,1[$ であると仮定される。

ラムゼイモデルの背景

念のために、このモデルの背景を確認しておく。c_t は t 期の消費、k_t は t 期の資本ストックを表す。モデル (1) には出てきていないが、生産関数 $g(k)$ と資本減耗率 $d \in]0,1]$ があって、経済は t 期に資本ストック k_t を使って $g(k_t)$ だけの生産を行い、それを消費 c_t と投資 i_t に分ける。したがって $c_t + i_t = g(k_t)$ である。次に、$t+1$ 期の資本ストック k_{t+1} は、t 期に減耗しなかった資本 $(1-d)k_t$ と、投資 i_t の合計である。これらをまとめると関係

$$k_{t+1} = i_t + (1-d)k_t = g(k_t) + (1-d)k_t - c_t$$

となるので、$f(k) = g(k) + (1-d)k$ と定義すれば (1) の制約条件が出てくることになる。

モデルの変形

ラムゼイモデルは、c_t を消して以下の形に変形しておいた方が扱いやすい。

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_t) - k_{t+1}) \\
\text{subject to.} \quad & 0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t), \\
& k_0 = \bar{k} > 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

以後、我々はこの形式のモデルを扱う。

本日の目的（1）

問題 (2) は、一変数の非常に単純な離散時間動学モデルであり、この種の問題は解を一階の差分方程式

$$k_{t+1}^* = p(k_t^*),\ k_0 = \bar{k}$$

で特徴づけることができることが知られている。この関数 p を**政策関数**と呼ぶ。

本日の目的（2）

かつて、積分可能性理論について他分野の研究者と話したとき、動学的なモデルへの拡張可能性を尋ねられたことがあった。すぐに考えたのは、それは難しいだろうということだった。なぜなら、積分可能性、つまり購買行動を表す関数から効用を逆算する理論の前提にあるのは、購買行動が観測可能であるということであるが、動学モデルには未来が含まれ、未来の購買行動はまだ見えないからである。
しかし、政策関数なら観測可能なのではないか。これは時系列データに対応しているため、少なくとも推定は容易にできそうに思える。ここから積分可能性理論のような議論はできないだろうか？

本日の目的（3）

政策関数の候補 p と生産技術 f を与えられたものとして、消費者の好みを表す δ と u を逆算する理論はできないものかと考えてみたところ、どうやらこの (2) については、いくつかの仮定の下でできることがわかった。同時に、実際に p が (2) の政策関数になるような δ と u が存在するための p と f の満たすべき条件も、完全に調べることができた。つまり、f が与えられた下で、ラムゼイモデルの政策関数になりうる p の完全な特徴づけを見つけたということである。
本日の報告は、この研究の概要の説明、そして一般化の方向性をいくつか探ることである。

生産技術への仮定

仮定 1

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ は連続で増加的な狭義凹関数で、$\mathbb{R}_{++}$ 上では連続微分可能であり、$f(0) = 0$ で、また次の極限評価

$$\lim_{k\to 0} f'(k) = +\infty, \ \lim_{k\to\infty} f'(k) < 1$$

を満たす。

最後の不等式は、g が稲田条件を満たしていると、$\lim_{k\to\infty} g'(k) = 0$ となることから $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 1 - d$ となって、満たされることが簡単にわかる。ここからただちに、$f(k) = k$ となる $k > 0$ の存在と一意性がわかる。(Hosoya (2014) には $\lim_{k\to\infty} f'(k) = +\infty$ がないが、これがないと証明が破綻するので、これは間違い)

効用関数への仮定（1）

仮定 2

$u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ は連続で増加的な狭義凹関数で、$\mathbb{R}_{++}$ 上で連続微分可能である。また次の極限評価

$$\lim_{c \to 0} u'(c) = +\infty$$

を満たす。

この仮定は標準的だが、とある技術的な事情によってもうひとつだけ、類似の仮定を用意しなければならない。

効用関数への仮定（２）

仮定２'

D は $\mathbb{R}_+$ であるか、ある $M > 0$ に対して $[0, M]$ であるかのどちらかで、$u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ は連続で増加的な狭義凹関数で、D の内部で連続微分可能である。また次の極限評価

$$\lim_{c \to 0} u'(c) = +\infty$$

を満たす。

なぜこれが必要なのかというと、政策関数の候補が特殊な形をしていると、ある一定の消費以上は「絶対にしない」可能性がある。そうすると、それ以上の消費についてはデータが得られないので、原理的に絶対に逆算できないのである。なので、後で D は逆算できる最大の大きさの区間になる。

定理１（１）

定理１

ラムゼイモデル (2) が仮定１と仮定２を満たしているならば、その政策関数 $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ は以下の６つの条件を満たす。

1) p は連続で増加的であり、$k > 0$ ならば $0 < p(k) < f(k)$ を満たす。
2) 方程式 $p(k^*) = k^*$ を満たす正の k^* はただひとつに定まる。
3) $p^0(k) = k$ とし、$p^{n+1}(k) = p(p^n(k))$ と定義する。このとき $k > 0$ であれば、
$$\lim_{n\to\infty} p^n(k) = k^*$$
が必ず成り立つ。

(続く)

定理１（２）

定理１（続き）

4) $f'(k^*) > 1$ である。
5) $c(k) = f(k) - p(k)$ と定義すると、関数 $c(k)$ も増加的である。
6) $k > 0$ とすると、以下の無限積

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{f'(p^n(k))}{f'(k^*)} \tag{3}$$

は正の値に収束する。

（続く）

定理１（３）

定理１（続き）

このとき、

$$\delta = \frac{1}{f'(k^*)} \tag{4}$$

である。また、$c^* = f(k^*) - p(k^*)$ と定義すると、関数 $c(k)$ の値域に属するすべての x に対して、

$$u(x) = u(c^*) + u'(c^*) \int_{c^*}^{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{f'(p^n(c^{-1}(y)))}{f'(k^*)} dy \tag{5}$$

が成り立つ。

定理 2

定理 2

f が仮定 1 を満たし、f と $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が定理 1 の条件 1)-6) を満たしているとする。このとき、適当に $u(c^*) \in \mathbb{R}$ と $u'(c^*) > 0$ を決めて (4) 式と (5) 式で δ と u を定めると、u は仮定 2' を満たし、u と δ と f からなるラムゼイモデルにおいて p は政策関数である。

したがって、f が与えられた下で、仮定 2 や 2' の下でのラムゼイモデルの政策関数の特徴づけは、定理 1 の 1)-6) で与えられることがわかった。また、割引率や効用関数を逆算するための手続きは (4) と (5) の二式で与えられることもわかった。

定理の証明のアイデア（1）

以下、定理の証明のアイデアを概観しよう。まず、よく知られていることをおさらいする。$V(k)$ を問題 (2) の価値関数とすると、ベルマン方程式

$$V(k) = \max\{u(f(k) - k') + \delta V(k') | 0 \le k' \le f(k)\} \tag{6}$$

が成り立つ。この右辺の最大値を達成する k' が $p(k)$ である。
$0 \neq p(k) \neq f(k)$ は、仮定 $\lim_{c \to 0} u'(c) = +\infty$ から簡単に示せる。ベンベニスト＝シャインクマンの包絡線定理から V は微分可能で、

$$V'(k) = u'(f(k) - p(k))f'(k) \tag{7}$$

が成り立つ。

定理の証明のアイデア（2）

(6) 式の最大値が内点で達成されることから、最大化の一階条件により、

$$-u'(f(k)-p(k))+\delta V'(p(k))=0$$

が出てくる。(7) 式を代入して整理すると、

$$u'(f(k)-p(k))=\delta u'(f(p(k))-p^2(k))f'(p(k)) \tag{8}$$

となって、**オイラー方程式**が得られる。

定理の証明のアイデア（3）

定常状態 k^* では $p(k^*) = p^2(k^*) = k^*$ なので、オイラー方程式に代入して、

$$u'(f(k^*) - k^*) = \delta u'(f(k^*) - k^*)f'(k^*)$$

を得る。ここからただちに関係

$$\delta f'(k^*) = 1$$

を得る。条件 4)、および (4) 式はここから出てくる。

定理の証明のアイデア（4）

オイラー方程式の右辺にある $u'(f(p(k)) - p^2(k))$ の部分は左辺と相似形なので、左辺と見なして右辺を代入することで、繰り返し変形ができる。つまり、

$$
\begin{aligned}
u'(f(k) - p(k)) &= \delta u'(f(p(k)) - p^2(k)) f'(p(k)) \\
&= \delta^2 u'(f(p^2(k)) - p^3(k)) f'(p(k)) f'(p^2(k)) \\
&= \dots \\
&= \delta^n u'(f(p^n(k)) - p^{n+1}(k)) \prod_{i=1}^{n} f'(p^i(k))
\end{aligned}
$$

を得る。

定理の証明のアイデア（5）

ここに (4) 式を代入し、$f(k) - p(k) = c(k)$ を使って整理すると、

$$u'(c(k)) = u'(c(p^n(k))) \prod_{i=1}^{n} \frac{f'(p^i(k))}{f'(k^*)}$$

を得る。
なんらかの議論を経て 3) が証明できたとしよう。すると $n \to \infty$ のとき $p^n(k) \to k^*$ なので、右辺の最初にある $u'(c(p^n(k)))$ は $u'(c^*)$ に収束し、左辺は n に依存しない。よって積の部分もどこかに収束しなければならない。これで 6) が得られる。さらにこのとき、

$$u'(c(k)) = u'(c^*) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{f'(p^n(k))}{f'(k^*)}$$

が得られたことになる。

定理の証明のアイデア（6）

さらに、5) も証明できたとしよう。すると $c(k)$ は増加的なので逆関数 $c^{-1}(x)$ が存在する。数 x が $c(k)$ の値域に入っているとき、先ほどの式の k に $c^{-1}(x)$ を代入すると、

$$u'(x) = u'(c^*) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{f'(p^n(c^{-1}(x)))}{f'(k^*)}$$

が得られる。後はこれの原始関数を求めれば u の逆算が完了するが、それは積分定数 C を使って

$$u(x) = C + u'(c^*) \int_{c^*}^{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{f'(p^n(c^{-1}(y)))}{f'(k^*)} dy$$

ということである。$C = u(c^*)$ は簡単にわかるので、これで (5) 式が得られたことになる。

定理の証明のアイデア（７）

以上は3)や5)を仮定して6)を示すやり方であるが、実際のところ1)-3)まではラムゼイモデルの性質としては有名で、多くの書籍に載っている。4)も、応用研究でδを推定するときに普通に使われている。5)は有名ではないが、Van and Dana (2003)に書いてある。よってHosoya (2014)を書くときに知られていなかったのは6)だけだった。したがって本質的には定理１は6)の証明だけを埋めれば、後の箇所はいずれも知られた内容であって、埋めるのは難しくない。

定理の証明のアイデア（8）

なお、定理 2 はさらに簡単で、$k_0 = \bar{k}, k_{t+1} = p(k_t)$ と定義した数列 (k_t) が (4) と (5) で与えられた δ と u についてオイラー方程式と横断性条件を満たすことを確かめるだけでよい。

技術的な補足

なお、$0 < k < k^*$ ならば $k < p(k) < k^*$ であり、逆に $k^* < k$ ならば $k^* < p(k) < k$ であることが簡単に示せる。したがって有限積

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{f'(p^i(k))}{f'(k^*)}$$

は n について単調である。これをうまく用いることで、この有限積の無限積

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{f'(p^n(k))}{f'(k^*)}$$

への収束が広義一様であることを示すことができる。これが、(5) で与えられた u が連続微分可能である理由になっている。

命題

具体的に f や p が与えられたときに、6) の無限積の収束を判定する方法が難しいかもしれない。そこで、収束の十分条件を与える命題をひとつ追加する。

命題

f は仮定 1 を満たし、p は 1)-5) を満たすとする。もし $f''(k^*)$ が存在し、かつ $p'(k^*) < 1$ ならば、6) が成り立つ。

3) から、$p'(k^*) \leq 1$ まではわかっていることに注意。つまり、$p'(k^*) < 1$ という追加条件は $p'(k^*) \neq 1$ という意味であり、それほど強い条件ではない。

命題の補足

この命題から、局所安定性条件 $p'(k^*) < 1$ と無限積 (3) の収束がなんらかの関係を持っていることがわかる。もしかすると、無限積の収束条件は、安定性についてのなんらかの条件と関係があるのだろうか？　しかし、これについてはまだ詳しいことはわかっていない。なお、定常状態の一意性があるので、定常状態の局所安定性と大域安定性は同値であることに注意。

計算例（1）

ここでは、$f(k) = k^a$ かつ $p(k) = bk^a$ という場合について考える。ただし $0 < b < a < 1$ を仮定する。この f と p の組が仮定 1 と 1)-5) を満たすことは非常に簡単に示せる。また、$k^* = b^{\frac{1}{1-a}}$ であるが、$p'(k^*) = a < 1$ なので、命題より 6) も満たされる。したがって、定理 2 が適用可能である。$f'(k^*) = \frac{a}{b}$ なので、(4) 式から $\delta = \frac{b}{a}$ がただちに定まる。

計算例（2）

$c(k) = f(k) - p(k) = (1-b)k^a$ なので、$c^{-1}(x) = \frac{1}{(1-b)^{a^{-1}}} x^{a^{-1}}$ と計算できる。一方、正の定数 a_n を用いて $p^n(k) = a_n k^{a^n}$ と書ける。したがってやはり正の定数 b_n を用いて $f'(p^n(k)) = b_n k^{a^n(a-1)}$ と書ける。これを使うと、なんらかの定数 $c > 0$ に対して

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{f'(p^n(c^{-1}(x)))}{f'(k^*)} = cx^{(a-1)\sum_{n=0}^{\infty} a^n} = \frac{c}{x}$$

と計算できる。したがって、これの原始関数の正アフィン変換が $u(x)$ なので、たとえば

$$u(x) = \log x$$

がこれに該当する。以上で逆算が終了した。

関連研究との関係（1）

政策関数の「候補」と生産技術を与えられたものとして、その候補を実際に政策関数として持つ動学的最適化モデルの「存在」を示す研究はいくつもある。それらはどちらかというと、カオスを許容する政策関数を生み出すモデルの存在を示すために研究されてきたという側面がある。Boldrin and Montrucchio (1986) は政策関数の候補が二階連続微分可能ならば、だいたいの場合にうまくモデルを構築できることを示している。しかしながら、そこで作られるモデルは「縮約形」という形のモデルになっている。

関連研究との関係（２）

縮約形の動学モデルというのは下記のように記述される。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(k_t, k_{t+1}) \\ \text{subject to.} \quad & (k_t, k_{t+1}) \in \Gamma, \\ & k_0 = \bar{k} \text{ is given.} \end{aligned}$$

このモデルにおいて Γ という集合が生産技術を表現しており、ラムゼイモデルだと

$$\Gamma = \{(k^1, k^2) \in \mathbb{R}^2_+ | 0 \le k^2 \le f(k^1)\}$$

である。特徴的なのは u で、ただの二変数関数として記述されている。

関連研究との関係（3）

縮約形は非常に一般的なので、ラムゼイモデルではないモデルもたくさん含む。このため、モデルの「存在」については言いやすくなっているものの、「一意性」は逆にほぼ言えないという構造を持つ。
これに対して今回の研究では、ラムゼイモデルという特定の構造をモデル内部に入れる代わりに、「一意性」まで言える構造になっているのが特徴となっている。さらに、u の「計算可能性」も担保できるのがかなり特徴的であると思われる。（なお、p に微分可能性が要らないのも個人的には気に入っている。折れ線でもよい）

拡張の方向性（1）

いままで試みた拡張の方向性について説明する。第一は、確率を入れたラムゼイモデルに話を拡張することである。これについては、いくつかの追加条件の下、逆算の可能性までは担保できているのだが、逆算結果の一意性を担保することがまだできていない。これは難しい未解決問題である。

拡張の方向性（２）

次に、多変数化が挙げられる。少し考えただけでも、この文脈での多変数化はかなりの難しさを問題に与えるであろうことが推察される。特に、資本ストックが複数財に分類されているラムゼイモデルで、そもそも定常状態の安定性を言えるのかどうかについては、実はよくわからない。
証明のアイデアを見ればわかるように、本研究の証明は多分に安定性に頼っているところがあるため、多変数にすることによって問題はとたんにものすごく難しいものになることが予想できる。

拡張の方向性（３）

最後に、資本ストックを複数財にするのではなく、フローの財である労働を内生化して入れるということが考えられる。しかし、労働がフローである以上、政策関数は一変数で、かつ二次元の値を持つ関数 $p(k) = (p_k(k), p_l(k))$ となってしまう。すると、(c, l) という二変数空間の上で、モデル上最適になり得る組み合わせは一次元の曲線になってしまい、結果として大量の $u(c, l)$ の候補が挙がってきて一意性が崩壊する。
$u(c) + v(l)$ という加法分離型を上から仮定するならば、かなりこの問題は緩和され、u と v の一意性は復活する「ようである」。これは２０１４年時点の自分の研究メモに書いてあることだが、ただしこの研究から離れてかなりの時間が経つので、本当に復活するかどうかは当時の自分の数学力にかかっている。（証明をチェックしていない）

Thank you for your attention.