クラーク微分とその経済学への応用

細矢祐誉

中央大学

December 10, 2024

一階条件 (1)

我々が通常用いる一階条件は、「最大点では水平線がグラフの接線となる」という事実に基づいている。次の図はこのケースを描いたものである。この関数は微分可能なので $f'(x^*) = 0$ を得る。

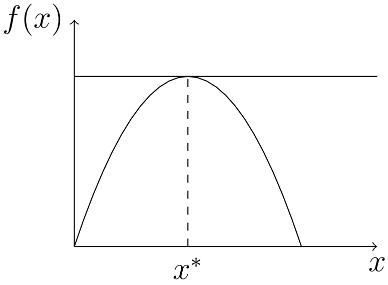

Figure: 微分可能な場合

一階条件 (2)

しかし、「最大点では水平線がグラフの接線となる」という事実は、別に関数が微分可能でなくとも成立する。次の図のように接線が複数引ける場合にも、水平線は接線のひとつにはなっている。

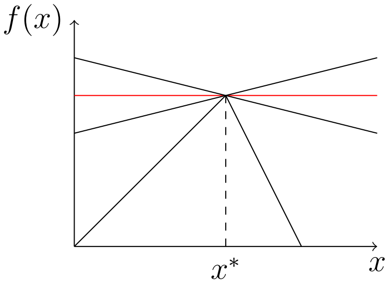

Figure: 微分不可能な場合

一階条件 (3)

実のところ、f が x^* で微分可能という条件は「点 $(x^*, f(x^*))$ を通る f のグラフの接線は $f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*)$ 以外に存在しない」という条件になっている。そして、一階条件の記述にこの一意性は必要ない。
特に f が凹関数である場合、劣微分

$$\partial f(x) = \{p | p(y - x) \geq f(y) - f(x)\}$$

によって接線を特徴づけられるので、一階条件は $0 \in \partial f(x)$ と書き直せる。しかし、関数の凹性はしばしば**強すぎる条件**となる。実際、たとえばミクロ経済学の標準的教科書で扱われる、限界費用 $c'(x)$ が U 字になるモデルでは、対応する利潤関数
$\pi(x) = px - c(x)$ は凹関数にはならない。

一階条件 (4)

凹関数ではないが接線は引ける関数のグラフの例を図に示した。

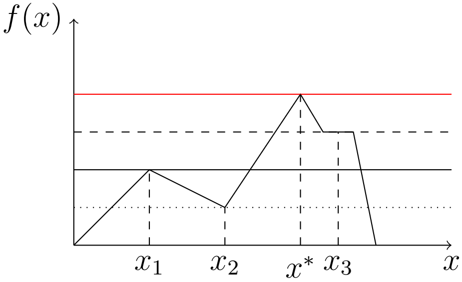

Figure: 問題となる関数

一階条件 (5)

この図では、x^* で関数 f の値は最大になる。したがって水平線が接線として引けるのだが、一方で x_1 と x_2 においても水平線が接線として引けることに気づく。注意すべきは、x_1 では水平線はグラフの上側、x_2 では水平線がグラフの下側にあるという意味で、同じ「接線」と言ってもその意味するものが異なっている。さらに厄介なのは x_3 で、ここでは水平線が局所的にはグラフに重なるのだが、実のところこの線はグラフを貫いており、これを接線と呼んでよいかどうかには疑問の余地がある。
この問題は、「接線」と呼ばれる概念の持つあいまいさに起因する。よく、関数 f の点 $(x^*, f(x^*))$ における接線は次の関数

$$g(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) \tag{1}$$

のグラフとして解釈される。

一階条件 (6)

ところが、たとえば関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ の変曲点 $(2, 2)$ における (1) 式を満たす $g(x)$ のグラフは次の図の直線になる。

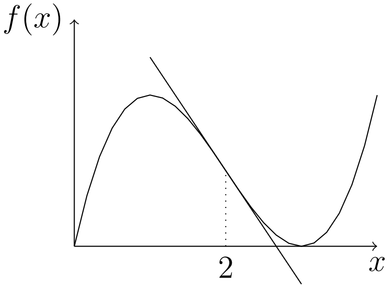

Figure: 接線がグラフを貫通する場合

一階条件 (7)

見ての通り、関数のグラフを「接線」であるはずのものが貫通しているのがわかる。このように、通常の微分ですら、「接線」と呼んでいるものと、我々が接線だと認識するものの間に乖離がある。これを踏まえて、微分の拡張概念をなんらかの形で定義する場合には、それが必ずしも「接線の傾き」であることにはこだわらず、「接線の傾きの**候補**」を探すような議論をしなければならない。今回の報告では、Clarke (1983) が考案した**クラーク微分** (Clarke differential) を概観する。これは上のような意味で、「接線の傾きの候補の集合」を与えるものとして定義される。この微分概念は必ずしも「接線の傾き」と解釈はしにくいが、一階条件は適切に定義される。しかも、凹関数や凸関数については劣微分と一致することも示せる。

予備知識 (1)

以降、特段の断りがない限り X, Y はバナッハ空間、U は X の非空な開部分集合とする。また、x を中心とする半径 $r > 0$ の開球を $B_r(x)$ と書く。
$f : U \to Y$ が L-**リプシッツ** (L-Lipschitz) であるとは、以下の不等式

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

がすべての $x, y \in U$ に対して成り立つことを言う。なんらかの $L > 0$ に対して L-リプシッツである関数は**リプシッツ** (Lipschitz) と呼ばれ、またどんな $x \in U$ に対してもある $r > 0$ が存在して、f の $U \cap B_r(x)$ への制限がリプシッツであるような関数は**局所リプシッツ** (locally Lipschitz) と呼ばれる。クラーク微分を考える場合、開集合 U 上で定義された局所リプシッツ関数が主に扱われる。

予備知識 (2)

一方、$T : X \to Y$ が**線形作用素** (linear operator) であるとは、$T(ax+by) = aT(x) + bT(y)$ がすべての $a, b \in \mathbb{R}$ と $x, y \in X$ に対して成り立つことを言う。なお、上の式では $T(x)$ と書いたが、Tx と括弧を省略して書く方が普通である。線形作用素については連続性とリプシッツ性が同値であることが知られており、そのリプシッツ定数の最小値を T の**作用素ノルム** (operator norm) と呼んで、$\|T\|$ と表す。このノルムの下に線形作用素の空間はバナッハ空間となることが知られている。また、以下の等式が成り立つ。

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| | \|x\| \leq 1\}.$$

なお、$Y = \mathbb{R}$ のときには線形作用素は**線形汎関数** (linear functional) と呼ばれる。p が線形汎関数のとき、$p(x)$ と書く代わりに $\langle p, x \rangle$ と書くのが通例であり、よって本報告でもこの記述を踏襲する。X 上の連続な線形汎関数の空間は X の**双対空間** (dual space) と呼び、通常 X' と表す。

予備知識 (3)

$f : U \to Y$ に対して、ある $x \in U$ において連続な線形作用素 T が存在して

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Th\|}{\|h\|} = 0$$

が成り立つとき、T を f の x における**フレシェ微分の値** (Fréchet derivative) と呼んで $Df(x)$ と書く。f がすべての点でフレシェ微分の値を持つとき、Df は x に対して $Df(x)$ を返す写像と解釈できるが、これが連続であるときには f は**連続微分可能** (continuously differentiable)、あるいは C^1 と呼ばれる。

予備知識 (4)

一方、フレシェ微分可能でない場合にも、次の値

$$f'(x;v) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

は定義できる場合がある。これを f の x における v 方向の**方向微分** (directional derivative) と呼ぶ。ある連続線形作用素 T について、すべての $v \in X$ に対して

$$Tv = f'(x;v)$$

が成り立つ場合、T を f の x における**ガトー微分の値** (Gâteaux derivative) と言う。$Df(x)$ があれば必ずガトー微分の値であるが、逆は成り立つとは限らない。

予備知識 (5)

ガトー微分を強めた条件として、以下の条件を考える。いま、連続な線形作用素 T に対して、条件

$$Tv = \lim_{y\to x, t\downarrow 0} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t}$$

をすべての $v \in X$ に対して満たす場合、f は**強微分可能** (strictly differentiable) と呼び、T を $D_s f(x)$ と書く。定義から、$D_s f(x)$ はガトー微分の値になっているが、実は**アダマール微分の値** (Hadamard derivative) となっていることが示せる。
$X = \mathbb{R}^n$ の場合、アダマール微分はフレシェ微分と一致しているため、$D_s f(x)$ は自動的に $Df(x)$ となる。一方で X が無限次元のバナッハ空間の場合にはアダマール微分とフレシェ微分の間に差があるため、$D_s f(x)$ があったとしても $Df(x)$ となるかどうかはわからない。また、フレシェ微分可能であっても強微分可能にならない例は後で議論する。

一般化方向微分とクラーク劣微分 (1)

強微分の概念に近い考え方で、方向微分を一般化したのが、以下の**一般化方向微分**である。いま、与えられた実数値関数 $f : U \to \mathbb{R}$ と $x \in U, v \in X$ に対して、

$$f^\circ(x; v) = \limsup_{y \to x, t \downarrow 0} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}$$

と定義する。上極限が定義できないと f° が定義できないので、f の値域は $\mathbb{R}$ でないとならない。
これを利用して、f の x における**クラーク劣微分** (Clarke subdifferential) を以下のように定義する。

$$\partial^\circ f(x) = \{p \in X' | \forall v \in X, \ \langle p, v \rangle \leq f^\circ(x; v)\}.$$

一般化方向微分とクラーク劣微分 (2)

以下の定理がクラーク劣微分の最も重要な性質である。

定理 1

$f: U \to \mathbb{R}$ が局所リプシッツであれば、$\partial^\circ f(x)$ は非空、*弱コンパクトな凸集合である。

このために次の補題を用いる。

補題 1

$\varphi(v) = f^\circ(x; v)$ と定義すると、φ は次の 3 つの性質を満たす。

(1) $a \geq 0$ なら $\varphi(av) = a\varphi(v)$ である。

(2) $\varphi(v + w) \leq \varphi(v) + \varphi(w)$ である。

(3) f が x の近傍上で L-リプシッツなら、φ も L-リプシッツである。

一般化方向微分とクラーク劣微分 (3)

補題１の (1)(2) は φ が**劣線形** (sublinear) と呼ばれる性質を満たすことを意味する。ここから φ にはハーン＝バナッハの定理が適用できて、線形汎関数 p で

$$\langle p, v\rangle \leq \varphi(v)$$

を満たすものが存在することがわかる。さらに補題１の (3) から p は L-リプシッツで、したがって $p \in X'$ であり、よって $p \in \partial^\circ f(x)$ であることがわかる。
$\partial^\circ f(x)$ が凸で＊弱閉であることはすぐに示せるが、一方上で示したように $\partial^\circ f(x)$ に含まれるすべての p は $\|p\| \leq L$ を満たすので、$\partial^\circ f(x)$ は有界な＊弱閉集合である。これにアラオグルの定理を適用することで定理１の証明が完成する。

一般化方向微分とクラーク劣微分 (4)

また、初等的な操作によって、

$$f^\circ(x; -v) = (-f)^\circ(x; v)$$

を得られる。これを用いることで容易に次の命題を得る。

命題 1

$f : U \to \mathbb{R}$ が局所リプシッツであれば、以下が成り立つ。

$$\partial^\circ f(x) = -\partial^\circ(-f)(x).$$

たとえば $f(x) = |x|$ だとすれば、$f^\circ(0; 1) = f^\circ(0; -1) = +1$ なので、$\partial^\circ f(x) = [-1, 1]$ である。$g(x) = -|x|$ とすれば、命題 1 から $\partial^\circ g(x) = [-1, 1]$ が得られる。f は凸関数で g は凹関数であるが、どちらにおいてもクラーク劣微分は接線の傾きの集合になっていることが確認できる。

クラーク劣微分と強微分 (1)

クラーク劣微分と強微分の間には次の関係がある。

定理 2

$f : U \to \mathbb{R}$ が局所リプシッツであるとき、$p \in X'$ に対して以下の二つは同値である。

1) $\partial^\circ f(x) = \{p\}$ となる。
2) f は x で強微分可能で、$p = D_s f(x)$ である。

定理 2 から、f が強微分可能でないならば、たとえ f がフレシェ微分可能であったとしても $\partial^\circ f(x)$ は一点にならない。以下、そのような例を見てみよう。

クラーク劣微分と強微分 (2)

以下の関数を考える。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0, \\ x^2 \sin(1/x) & \text{if } x \neq 0. \end{cases}$$

この関数はすべての点で微分可能で、

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0, \\ 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{if } x \neq 0 \end{cases}$$

となる。形から、$f'(x)$ の $x \to 0$ のときの極限点の集合は $[-1, 1]$ となるが、実はこれが $\partial^\circ f(0)$ と一致する。したがって、f は 0 で微分可能であるが、強微分可能ではなく、クラーク劣微分も一点ではない。

クラーク劣微分と強微分 (3)

実のところ、次の二つの命題が成り立つ。

命題 2

$f : U \to \mathbb{R}$ は局所リプシッツとする。もし f が x で微分可能であれば、$Df(x) \in \partial^\circ f(x)$ が成り立つ。

命題 3

$f : U \to \mathbb{R}$ が $x \in U$ の近くで連続微分可能ならば、f は x で強微分可能で、$\partial^\circ f(x) = \{Df(x)\}$ である。

以上のように、f の微分とクラーク劣微分の間には関係があるものの、連続微分可能でない場合には、その間の関係はやや複雑である。

凸関数 (1)

ここからしばらく、$X = \mathbb{R}^n$ で、U が凸であるときを考える。関数 $f : U \to \mathbb{R}$ の**エピグラフ** (epigraph) を

$$E = \{(x, a) | a \geq f(x)\}$$

と定義する。E が凸であるとき、f を**凸関数** (convex function) と呼ぶ。凸関数については、支持超平面定理を適用することで、$x \in U$ に対して

$$f(x) + \langle p, y - x\rangle \leq f(y)$$

を満たす $p \in \mathbb{R}^n$ が存在する。そこでそのような p の集合を $\partial f(x)$ と書き、f の x における**劣微分** (subdifferential) と呼ぶ。
特に $n = 1$ のとき、$p \in \partial f(x)$ は $f(x) + p(y - x) \leq f(y)$ をすべての y について満たすという意味であり、この左辺の式が f のグラフの $(x, f(x))$ を通る接線で、その傾きが p である。

凸関数 (2)

実は凸関数は必ず局所リプシッツであり、次の定理が成り立つ。

定理 3

$X = \mathbb{R}^n$ で、U は X の非空開凸集合、$f : U \to \mathbb{R}$ は凸関数とする。このとき、

$$\partial f(x) = \partial^\circ f(x)$$

がすべての $x \in U$ に対して成り立つ。

したがって、凸関数についてはクラーク劣微分とただの劣微分は一致する。

凹関数

$-f$ が凸関数である関数 f を**凹関数** (concave function) と呼ぶ。このとき、凹関数の劣微分は

$$\partial f(x) = -\partial(-f)(x)$$

として定義する。凹関数については $\partial f(x)$ は

$$f(x) + \langle p, y - x \rangle \geq f(y)$$

となる p の集合であり、不等号が凸関数と逆転している。しかし命題 1 から

$$\partial f(x) = -\partial(-f)(x) = -\partial^\circ(-f)(x) = \partial^\circ f(x)$$

となるので、以下の系を得る。

系 1

f が凹関数の場合も、$\partial f(x) = \partial^\circ f(x)$ が成り立つ。

一階条件の一般化 (1)

再度、一般のバナッハ空間 X に議論を戻す。$f : U \to \mathbb{R}$ が局所リプシッツで、x^* で極小であるとすると、$v \in X$ に対して

$$f^\circ(x^*; v) \geq \limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x^* + tv) - f(x^*)}{t} \geq 0 = \langle 0, v \rangle$$

が成り立つため、$0 \in \partial^\circ f(x^*)$ である。また、f が x^* で極大であるときには、$-f$ が x^* で極小なので、命題 1 から

$$0 \in -\partial^\circ(-f)(x^*) = \partial^\circ f(x^*)$$

が成り立つ。以上から次の命題を得る。

命題 4

$f : U \to \mathbb{R}$ が局所リプシッツで、x^* で極小あるいは極大であれば、$0 \in \partial^\circ f(x^*)$ が成り立つ。

これが、クラーク微分による一階条件の一般化である。

一階条件の一般化 (2)

ハーン＝バナッハの定理を適切に使うことで、この結果は容易に線形制約の最適化問題に拡張できる。問題

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{subject to} \quad & x \in U, \\ & \langle p, x \rangle = m \end{aligned} \tag{2}$$

について、以下の結果が成り立つ。

定理 4

$f : U \to \mathbb{R}$ が局所リプシッツで、x^* が問題 (2) の解とする。このとき、ある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して $\lambda p \in \partial^\circ f(x^*)$ が成り立つ。

なお、命題１から、最小化でなく最大化でも同じ結果が成り立つ。Clarke (1976) はこれをさらに一般のＫＫＴ定理まで拡張しているが、ここではその紹介は省略する。

ヴェーバー集合 (1)

$N=\{1,...,n\}$ に対してTUゲーム $v:2^N \to \mathbb{R}$ を考える。ただし $v(\emptyset)=0$ である。N から N への全単射を**置換** (permutation) と呼び、その集合を Π_N とする。与えられた $\pi \in \Pi_N$ に対して、

$$S_i^\pi = \{\pi(j) | 1 \leq j \leq \pi^{-1}(i)\},$$

$$a_i^\pi(v) = v(S_i^\pi) - v(S_i^\pi \setminus \{i\})$$

と定義する。$a_i^\pi(v)$ を並べてできたベクトル $a^\pi(v)$ を π に基づく v の**限界貢献度ベクトル** (marginal contribution vector) と呼び、それらの凸包

$$W(v) = \mathrm{co}\{a^\pi(v) | \pi \in \Pi_N\}$$

を**ヴェーバー集合** (Weber set) と呼ぶ。

ヴェーバー集合 (2)

一方で、与えられたベクトル $s \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$s_{\pi(1)} \geq s_{\pi(2)} \geq \ldots \geq s_{\pi(n)}$$

となるように置換 π を選び、

$$S_i = \{j \in N | s_j \geq s_{\pi(i)}\},$$

$$F_L^v(s) = \sum_{i=1}^{n-1} (s_{\pi(i)} - s_{\pi(i+1)}) v(S_i) + s_{\pi(n)} v(N)$$

と定義された関数 F_L^v は v の**ロバス拡張** (Lovász extension) と呼ぶ。
F_L^v はファジィゲームの一種で、$F_L^v(s)$ はそれぞれのプレイヤー i がコミットメント s_i を支払った際の得られる利得の合計を指す。

ヴェーバー集合 (3)

F_L^v の定義の際に出てきた π は複数あるが、どれを用いても値は変わらないことが知られている。特に、1_S を $i \in S$ のとき 1、そうでないとき 0 のベクトルとすると、$F_L^v(1_S) = v(S)$ が成り立つ。また、F_L^v は一次同次な局所リプシッツ関数で、v が凸ゲームである、つまりすべての $S, T \subset N$ について

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$$

であることと、F_L^v が凹関数であることは同値である。一方、凹関数でなくとも、劣微分

$$\partial F_L^v(s) = \{p \in X | F_L^v(s) + \langle p, t - s \rangle \geq F_L^v(t)\}$$

を定義することはできて、特に $\partial F_L^v(1_N)$ は v のコア $C(v)$ と一致していることが知られている。ただし、F_L^v が凹関数でない場合には、当然この集合は空集合になる可能性がある。

ヴェーバー集合(4)

次の定理はSagara (2015) による。

定理 5

以下の関係が成り立つ。

$$W(v) = \partial^\circ F_L^v(1_N).$$

定理 5 と系 1 から、v が凸ゲームならば $C(v) = W(v)$ が成り立つことがわかる。しかし v が凸ゲームでなければ限界貢献度ベクトルの中にコアに所属しないものが存在することが知られており、よって $W(v) \neq C(v)$ となる。別の言い方をすると、$\partial F_L^v(1_N)$ が $\partial^\circ F_L^v(1_N)$ と一致するための条件が、v の凸性である。

ヴェーバー集合 (5)

補足事項として、元の Sagara (2015) の論文では、

$$f^*(x;v) = \liminf_{y\to x, t\downarrow 0} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t}$$

を用いて、**クラーク優微分** (Clarke superdifferential) を

$$\partial_C f(x) = \{p \in X' | \forall v \in X,\ \langle p, v\rangle \geq f^*(x;v)\}$$

と定義し、$W(v) = \partial_C F_L^v(1_N)$ を示している。しかし、実は $f^*(x;v) = -(-f)^\circ(x;v)$ であり、よって

$$\langle p, v\rangle \geq f^*(x;v) \Leftrightarrow \langle -p, v\rangle \leq (-f)^\circ(x;v)$$

なので、命題 1 から

$$\partial_C f(x) = -\partial^\circ(-f)(x) = \partial^\circ f(x)$$

を得る。つまり、クラーク優微分はクラーク劣微分と同一の集合なのである。

ベルマン方程式(1)

次の応用として、縮約形動学モデル

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t w(x_t, x_{t+1}) \\ \text{subject to} \quad & x_{t+1} \in \Gamma(x_t), \\ & x_0 = \bar{x} \in W \end{aligned} \tag{3}$$

を考える。$W \subset \mathbb{R}$ はなんらかの開集合で $\bar{W}$ はその閉包、$w(x, y)$ は $\bar{W}^2$ 上で定義された広義実数値関数、$\Gamma : \bar{W} \twoheadrightarrow \bar{W}$ は非空コンパクト値で連続な集合値写像である。
与えられた $\bar{x} \in W$ に対して、与えられた問題に対する目的関数の値の上限値を $\bar{V}(\bar{x})$ と書き、$\bar{V}$ を**価値関数** (value function) と呼ぶ。以降、価値関数は有限値であると仮定する。

ベルマン方程式 (2)

与えられた $x \in W$ に対して次の最大化問題

$$\begin{aligned} \max \quad & w(x,y) + \delta \bar{V}(y) \\ \text{subject to} \quad & y \in \Gamma(x) \end{aligned} \tag{4}$$

の解の集合を $G(x)$ と書く。実は、いくつかの仮定の下で、(3) の制約条件を満たす数列 (x_t) が次の関係

$$x_{t+1} \in G(x_t)$$

を満たすことと、(x_t) が元問題の解であることは同値であることが知られている。これをベルマンの最適性原理と呼ぶ。また $\bar{V}$ は、未知関数 V に対する次の関数方程式

$$V(x) = \sup\{w(x,y) + \delta V(y) | y \in \Gamma(x)\} \tag{5}$$

の一意解になることが知られており、(5) を**ベルマン方程式** (Bellman equation) と呼ぶ。

ベルマン方程式 (3)

以上のことから、まずベルマン方程式を解いて $\bar{V}$ を特定し、(4) を解いて $G(x)$ を求めて問題の解を見つける、というモデル (3) の解法が考えられるようになり、多くの動学的最適化モデルで用いられている。この $\bar{V}$ については、W が凸集合で、$w : \bar{W}^2 \to \mathbb{R}$ が C^1 の凹関数、Γ のグラフ T が凸集合で、$G(x)$ のグラフと T の内部の共通部分が非空であるという仮定の下、y をその共通部分の元として

$$\bar{V}'(x) = \frac{\partial w}{\partial x}(x, y)$$

となることが知られている（Benveniste–Scheinkman の包絡線定理)。これを用いて一階条件を導出すると**オイラー方程式**が容易に得られる。
しかし、政策の入った最適成長モデルなどでは、T の凸性が保証できない場合がある。その場合でもクラーク微分を用いて類似の結果を得たのが次の結果である。

ベルマン方程式 (4)

定理 6 (Mordukhovich and Sagara, 2018)

$\bar{x} \in W$ かつ $G(\bar{x}) \subset W$ とし、以下の 2 条件を仮定する。

I) $\bar{x}$ のある開近傍 $V \subset W$ が存在して、$x, x' \in V$ ならば $G(x) \neq \emptyset$ かつ $G(x) \subset \Gamma(x')$ となる。

II) $w : \bar{W}^2 \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ は V^2 上で実数値かつ局所リプシッツで、すべての $\bar{y} \in G(\bar{x})$ に対して $w^\circ(\bar{x}, \bar{y}; h, 0) = \frac{\partial w}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})h$ が必ず成り立つ。

このとき $\bar{V}$ は $\bar{x}$ の近くで局所リプシッツで、かつ $\bar{x}$ では微分可能であり、

$$\bar{V}'(\bar{x}) = \frac{\partial w}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})$$

が成り立つ。

ベルマン方程式(5)

この証明の基本的なアイデアは、以下の関数

$$V(x) = w(x, \bar{y}) + \delta \bar{V}(\bar{y})$$

にある。$V(\bar{x}) = \bar{V}(\bar{x})$ であり、また $x \neq \bar{x}$ としても $V(x) \leq \bar{V}(x)$ が成り立つ。この不等式関係から、もし $\bar{V}$ と V が両方凹関数なら、

$$p \in \partial\bar{V}(\bar{x}) \Rightarrow p \in \partial V(\bar{x}) \Rightarrow p = V'(\bar{x})$$

となって、$\partial\bar{V}(\bar{x}) = \{V'(\bar{x})\}$ となるため、$\bar{V}'(\bar{x}) = V'(\bar{x})$ となって Benveniste–Scheinkman の包絡線定理が導出できる。しかし $\bar{V}$ と V が凹でなくとも、V が強微分可能であれば同じロジックで同じ結論が得られる。これが定理 6 である。

ベルマン方程式(6)

なお、本来の Mordukhovich and Sagara (2018) では W がバナッハ空間 X である場合のみを扱っているのと、w に有界性を仮定している。なので定理 6 は、$W \neq \mathbb{R}$ の場合を許し、また w の有界性を仮定しないという意味で、若干の一般化となっている。また、元論文では II) の条件の $\bar{y}$ が、「ある」$G(\bar{x})$ の要素であればよいことになっているが、この条件だと証明にギャップが生ずる。
それから、元論文では確率項も入ったモデルを扱っているため、ベルマン方程式が成り立つためにだいぶ多くの追加の条件を入れている。特に、$\bar{V}$ が可測にならないモデルでは (5) が成り立つことも (4) の解関数 G と (3) の解の関係もあやふやになるため、そうならないための条件が必要である。幸いにも確率項が入らないモデルではそのような面倒な条件は不要で、その結果だいぶ定理 6 はシンプルな形になっている。

Thank you for your attention.