Relationship between Consumer Theories with and without Utility Maximization

細矢祐誉

中央大学

October 22, 2024

問題意識 (1)

消費者理論の現代の手法は、効用最大化問題を通じて消費者行動を記述することにある。効用最大化問題は以下の問題である。

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x) \\ \text{subject to.} \quad & x \in \Omega, \\ & p \cdot x \leq m. \end{aligned}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は**消費集合**と呼ばれ、消費者の選択対象ベクトル x を表す。x_i は第 i 財の消費量であり、対応して p_i は第 i 財の価格で、p はそれを並べてできた価格ベクトルである。m は所得で、$p \gg 0$ と $m > 0$ が仮定される。上の問題の解を $f^u(p,m)$ と書いて、この f^u を**需要関数**と呼ぶ。

問題意識 (2)

この効用最大化問題を通じて需要行動を導き出す手法は、太古の昔から経済学で行われていたというわけではなかった。限界革命と呼ばれる思想的変遷を経て、定番になったものである。では、限界革命以前の消費者理論はどうなっていたのかというと、第 i 財の「主観的価値」を計測するやり方が主流であったようである。いま、$x \in \Omega$ が現在の手持ちのベクトルであったときに、$g_i(x)$ を第 i 財が微少量追加された際の消費者の喜びの上昇率とする。この $g_i(x)$ を消費者の第 i 財についての「主観的価値」とすると、その比率 $\frac{g_i(x)}{g_j(x)}$ はこの消費者にとって適正な第 i 財と第 j 財の交換比率、すなわち「主観的交換比率」になる。一方で客観的交換比率は $\frac{p_i}{p_j}$ であり、この二つが一致しない限り、消費者は x で取引を終了しようとはしないであろう。

問題意識 (3)

以上の考察から、消費者が取引の終了に同意するための条件は主観的交換比率と客観的交換比率が一致すること、言い換えればベクトル $g(x)$ が p の正の定数倍になることであると言える。これに対して限界革命で追加された考え方は、「主観的価値」を「限界効用」で置き換える考え方である。こうすると、取引停止条件 $\nabla u(x) = \lambda p$ はラグランジュの一階条件と一致するため、$u(x)$ の最大化を行うことで取引が停止することになる。これは消費者行動の仮説をアップデートしたという考え方もできるが、別の言い方をすれば、「仮定を追加した」という見方もできる。つまり、主観的価値が限界効用で表現できること、またはもう少し弱く、主観的交換比率が限界代替率で表現できることを仮定している。

問題意識 (4)

では、その仮定、つまり「$g(x)$ が $\nabla u(x)$ の定数倍である」という仮定を追加することは、消費者になにを仮定したことになるのだろうか？　これが本研究の問題意識である。ただし、問題なのは古い消費者理論も、限界革命の頃の消費者理論も、数学で記述されていないことである。したがって、まずは本研究では、古い消費者理論を数学的に表現する方法を考えることから始めることとする。その際、静学的表現と動学的表現が存在するが、本研究ではどちらも扱うことにする。

主結果

古い消費者理論の静学的表現は需要関数で表される。つまり、取引停止条件を満たす点の集合を表す集合値関数を需要関数とする選好関係が存在するための主観的価値関数 g の条件を探る問題が考えられる。一方で動学的表現では、消費者は主観的価値を、現在の手持ちの状態のときの値しか見ることができず、したがって x を所持しているときには $g(x)$ は見えても g という関数自体は見えないと考える。この場合、消費者が地道な改善を通じて最終的に取引停止点にたどり着くことを保証するために、g にはどんな条件があればよいかを考察する。驚くべきことに、二つの表現において導出される条件は同一であり、したがって消費者の行動が効用最大化で表現できることは、取引停止点を最終的に必ず見つけられることを保証するための必要十分条件となっている。これが本研究の主結果であると言える。

モデル (1)

技術的な観点から、消費集合 $\Omega = \mathbb{R}^n_{++}$ を固定する。また、主観的価値関数 $g : \Omega \to \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ は局所リプシッツであると仮定する。与えられた主観的価値関数 $g : \Omega \to \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ に対して、もしベクトル v が $g(x) \cdot v > 0$ を満たしているとすると、十分小さな $t > 0$ に対してはこの消費者は x よりも $x + tv$ を魅力的に思うと解釈することにする。すると、$p \cdot (x + tv) \le m$ が満たされるような $t > 0$ が存在すれば、消費者は取引を停止しないであろう。この観点から、消費者が行動を停止するための条件は次の二つである。第一に、$p \cdot x = m$。第二に、$g(x)$ が p の定数倍であること。この二つの条件を満たす点の集合を $f^g(p, m)$ と書く。すなわち、

$$f^g(p, m) = \{x \in \Omega | \exists \lambda > 0, \ (p, m) = \lambda(g(x), g(x) \cdot x)\}$$

である。

モデル(2)

一方、Ω 上の二項関係 $\succsim$ が与えられたとき、$x \succ y$ をいつものように $x \succsim y$ かつ $y \not\succsim x$ として定義し、

$$f^{\succsim}(p,m) = \{x \in \Omega | p \cdot x \le m \text{ and } p \cdot y \le m \Rightarrow y \not\succ x\}$$

として需要多価関数 $f^{\succsim}$ を定義する。たまたまある実数値関数に対して、

$$x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \ge u(y)$$

が成り立っていた場合（この場合、u は $\succsim$ を**表現する**と言う）には、$f^{\succsim}$ を f^u とも書く。
以降のために一つ条件に名前をつけておく。Ω 上の二項関係が **LNST 条件**を満たすとは、任意の $x, y \in \Omega$ に対して、$y \succsim x$ であれば、y の任意の近傍 U の中に $z \succ x$ となる z が存在することを言う。$\succsim$ が反射的であればこの条件は局所非飽和より強いが、一方で局所非飽和＋推移性よりは弱いことに注意。

条件 F

また、一階条件を少し一般化したものを仮定しておく。開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ と、その上のベクトル場 $g : U \to \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ が与えられたとするとき、U 上の局所リプシッツ関数 $u : U \to \mathbb{R}$ が**条件 F** を満たすとは、次の二条件が成り立つことである。第一に、$u^{-1}(c)$ は $n-1$ 次元の C^1 多様体であること。第二に、$g(x)$ は $u^{-1}(c)$ の法線ベクトル場であること。
u が C^1 かつ非退化であれば、この条件は $\nabla u(x) = \lambda(x)g(x)$ となるような正値関数 $\lambda(x)$ の存在と同値である。実際、u が局所リプシッツなのでほとんどの点で微分可能であり、したがって $\nabla u(x) = \lambda(x)g(x)$ は必ずほとんどすべての点で成り立つ。

弱弱公理

主観的価値関数 g が**弱弱公理**を満たすとは、

$$g(x) \cdot y \leq g(x) \cdot x \Rightarrow g(y) \cdot x \geq g(y) \cdot y$$

が成り立つことを言う。あるいは対偶を取れば、

$$g(x) \cdot y < g(x) \cdot x \Rightarrow g(y) \cdot x > g(y) \cdot y$$

と書いてもよい。弱弱公理は、現在の消費者の手持ちが x であるとき、ここから y へ近づいていく取引を望ましくないと感じる（つまり、$g(x) \cdot (y - x) < 0$）ならば、消費者の手持ちが y に変わった際には、そこから x へ近づいていく取引を望ましいと感じる（つまり、$g(y) \cdot (x - y) > 0$）という、好みに対するある種の整合性のような条件である。

弱公理

これをもう少し強めたのが、以下の**弱公理**である。

$$g(x)\cdot y\le g(x)\cdot x\Rightarrow g(y)\cdot x>g(y)\cdot y.$$

後で議論するが、この条件は f^g が一価関数で、かつ顕示選好の弱公理

$$f^g(p,m)\neq f^g(q,w),\ p\cdot f^g(q,w)\le m\Rightarrow q\cdot f^g(p,m)>w$$

を満たすことと同値である。

ヴィーユの公理(1)

$n \geq 3$ の場合には、結果のために追加条件が必要になる。まず、与えられた g に対して、区分的に C^1 な閉曲線 $x : [0, T] \to \Omega$ が**ヴィーユ曲線** (Ville curve) であるとは、以下の条件

$$g(x(t)) \cdot \dot{x}(t) > 0$$

が、微分可能なすべての点で成り立つことを言う。g が**ヴィーユの公理** (Ville's axiom) を満たすとは、ヴィーユ曲線が存在しないことを言う。
仮に $\nabla u(x) = \lambda(x) g(x)$ となる正値関数 λ と微分可能な関数 u があったとすると、ヴィーユ曲線は

$$\frac{d}{dt} u(x(t)) > 0$$

を常に満たすことになるが、これは $u(x(T)) > u(x(0))$ を意味し、$x(T) = x(0)$ と矛盾する。よってこれはあり得ず、ヴィーユ曲線は存在し得ない。つまり、ヴィーユの公理が成り立つ。

ヴィーユの公理(2)

実は、ヴィーユの公理が成り立っていないとすると、ある $t > 0$ に対して $x(t) = ax(0)$ となるような $a < 1$ が存在するヴィーユ曲線を構成することができる。したがって、この消費者はこのヴィーユ曲線に沿って取引することで常に得をしていると感じているのだが、時刻 t に至ると時刻 0 よりも手持ちの消費量が減っていて、結果として損をしているのである。Samuelson (1950) はこのような個人を 'easily cheated' と評した。逆に言えば、ヴィーユの公理はこの意味で 'hardly cheated' であることを意味する。

第一の主結果(1)

以下の結果が第一の主結果である。

定理 1

$g : \Omega \to \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ は局所リプシッツとすると、以下の結果が成り立つ。

(I) g が弱弱公理を満たすことと、完備で LNST 条件を満たす二項関係 $\succsim$ が存在して $f^g = f^{\succsim}$ となることは同値である。

(II) g がヴィーユの公理を満たすことと、条件 F を満たす増加的な関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ が存在することは同値である。さらにこのとき $v \in \Omega$ を固定すると、条件 F を満たし、かつ $u^g_v(av) = a$ をすべての $a > 0$ について満たす増加的関数 u^g_v は一意に定まり、あらゆる条件 F を満たす増加関数は u^g_v の単調変換である。さらに g が C^k なら u^g_v も C^k である。(続く)

第一の主結果(2)

定理 1（続）

(III) 以下の三条件は同値である。

- (1) g は弱弱公理とヴィーユの公理を満たす。
- (2) $f^g = f^{\succsim}$ となる弱順序 $\succsim$ が存在する。
- (3) (II) で出てきた u_v^g は準凹である。

さらにこのとき、$f^g = f^{u_v^g}$ である。

(IV) g が弱公理を満たすことと、f^g が一価関数で顕示選好の弱公理を満たすことは同値である。もし g がヴィーユの公理を満たす場合には、g が弱公理を満たすことと u_v^g が狭義準凹であることは同値である。

したがって、弱弱公理とヴィーユの公理が、限界革命および効用最大化によって消費者に追加的に仮定された合理性の仮定であると言える。

改善過程 (1)

通常の消費者理論では、効用関数 u が与えられ、その効用を最大化する消費者が考えられている。しかし、いま考えている理論では、主観的交換比率 g が与えられ、消費者に見えるのは u ではなく、x を持っているときに $g(x)$ が見えているだけである。この場合、消費者は自分の手持ちを、予算制約が満たす範囲で、
$g(x) \cdot v > 0$ が成り立つ v 方向に動かすことで状況を改善しようとするだろう。このような状況を数式で表してみよう。
(p, m) が与えられているとし、$\Delta(p, m) = \{x \in \Omega | p \cdot x \leq m\}$ とする。この領域上で、主観的交換比率 $g(x)$ が与えられているとき、自分がよりよいと思う方向へ取引を行おうとする消費者行動は、
$p \cdot x = m$ ならば $p \cdot h(x) = 0$ が常に成り立ち、また $p \cdot x < m$ であるか $g(x)$ が p の定数倍でないときには必ず $g(x) \cdot h(x) > 0$ であるような連続関数 $h(x)$ を用いて、次の微分方程式で表現できる。

$$\dot{x}(t) = h(x(t)),\ x(0) = \bar{x}.$$

この過程を**改善過程** (improving process) と呼ぶことにする。

改善過程 (2)

簡単化のために、$f^g(p,m)$ が一点 x^* であるときを考えてみよう。改善過程について、二つの安定性条件を定義する。まず、x^* の十分近くに $\bar{x}$ が存在しているときには、改善過程の任意の延長不能解が x^* に収束するとき、この改善過程は**局所安定**であると言う。次に、改善過程の延長不能解の軌道が Ω のコンパクト集合に含まれているときには必ず x^* に収束しているとき、この改善過程は**コンパクト安定**と言う。
もし改善過程が大域安定であれば、それは局所安定かつコンパクト安定である。しかしながら、改善過程の条件にはいわゆる viability の条件がないため、大域安定の前提条件である、解が $\mathbb{R}_+$ 上で定義できるというものが満たされない。そのためにこういう条件を考える必要があるのである。

改善過程 (3)

いま、g が弱弱公理とヴィーユの公理を満たしているとしよう。このとき、

$$L(x) = u_v^g(x^*) - u_v^g(x)$$

と定義する。実は比較的簡単に、$L(x)$ はどんな改善過程においてもリャプノフ関数になっていることが示せる。リャプノフ関数がある以上、局所安定性とコンパクト安定性は容易に証明できる。

改善過程 (4)

一方、g がヴィーユの公理を満たさない場合、実は連続微分可能なヴィーユ曲線の存在が示せる。その勾配ベクトルを $h(x(t))$ にするような h を構築することで、ヴィーユ曲線が改善過程の解となるようにできる。これはコンパクト安定性が満たされないことを意味する。
g がヴィーユの公理を満たしつつ弱弱公理は満たさない場合、u_v^g は準凹ではない。したがって (p,m) を適切に選べば、
$x^* = f^g(p,m)$ が予算制約下における u_v^g の極大点にならないようにできる。このとき、$L(x) = u_v^g(x^*) - u_v^g(x)$ とすると、x^* のどんな近くにも $p \cdot \bar{x} \leq m$ かつ $L(\bar{x}) < 0$ となる $\bar{x}$ が存在する。この場合、改善過程のどんな解も x^* には絶対に収束しない。これは局所安定性が成り立たないことを意味する。

改善過程 (5)

以上の考察から、次の結果が成り立つことがわかる。

定理 2

f^g が一価関数であると仮定する。このとき、任意の (p, m) の下で、どんな改善過程も局所安定かつコンパクト安定であるための必要十分条件は、g がヴィーユの公理および弱弱公理を満たすことである。

つまり、消費者が自然な改善プロセスで自分の納得できる取引状態を見つけられるためには、ヴィーユの公理と弱弱公理が成り立っていなければならないのである。定理 1 から、これはまさに効用最大化で f^g が表される条件と同値である。したがって、効用最大化仮説は、消費者が取引停止点を必ず見つけることができるための必要十分条件であると言える。

公理の数学的評価 (1)

合理性の基準としての弱弱公理とヴィーユの公理は理解できるものの、その数学的評価はまだよくわからない。ここでは次の３条件を考えてみよう。まず g が条件 (A1) を満たすとは、$g(x) \cdot v = 0$ ならば必ず

$$\liminf_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} v \cdot [g(x + tv) - g(x)] \le 0$$

が成り立つことを言う。次に g が条件 (A2) を満たすとは、$g(x) \cdot v = 0$ かつ $v \neq 0$ ならば必ず

$$\liminf_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} v \cdot [g(x + tv) - g(x)] < 0$$

が成り立つことを言う。最後に g が条件 (B) を満たすとは、次の式

$$g_i \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_k} - \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \right) + g_j \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_i} - \frac{\partial g_i}{\partial x_k} \right) + g_k \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} - \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) = 0$$

がほとんどすべての x で成り立つことを言う。

公理の数学的評価 (2)

次の定理が有用である。

定理 3

弱弱公理と条件 (A1) は同値であり、ヴィーユの公理は条件 (B) と同値である。また、条件 (A2) が成り立てば g は弱公理を満たす。

公理の数学的評価 (3)

特に、$g_n \neq 0$ のときを考えよう。$\bar{g}(x) = \frac{1}{g_n(x)} g(x)$ とし、g が x で微分可能であるとき、

$$a_{ij}(x) = \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial x_n}(x) \bar{g}_j(x)$$

として、$(n-1) \times (n-1)$ 行列値関数 $A_g(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{n-1}$ を定義する。この行列を**アントネッリ行列**と言う。すると次が成り立つ。

命題 2

条件 (B) はアントネッリ行列 $A_g(x)$ がほとんどすべての点で対称であることと同値である。また、g が C^1 のときには、条件 (A1) は $A_g(x)$ の半負値定符号性と同値であり、条件 (A2) は $A_g(x)$ の負値定符号性と同値である。

公理の数学的評価(4)

$n=2$ の場合には $A_g(x)$ は 1×1 行列だから対称であり、よって g はヴィーユの公理を満たす。しかしながら、$n\geq 3$ の場合には、対称行列は行列全体の中では非常に少ない。よって次の定理が成り立つことになる。

系 1

$n\geq 3$ のとき、凸結合 $(1-t)g+th$ が連続であるような任意の位相に関して、ヴィーユの公理を満たす g の集合は nowhere dense である。

したがってヴィーユの公理は、少なくとも数学的にはかなり強い公理であることがわかる。

選好の構成法 (1)

実は、定理 1 から 3 までの証明では、g から具体的に選好関係 $\succsim^g$ を計算するやり方を取っている。この選好の構成法について説明しよう。まず、$x, v \in \Omega$ を取り、微分方程式

$$\dot{y} = (g(y) \cdot x)v - (g(y) \cdot v)x, \ \ y(0) = x \tag{1}$$

を考える。この方程式の延長不能解を $y(t; x, v)$ と書く。このとき、$y(t; x, v)$ が v の定数倍となるような $t \geq 0$ が存在するため、そのうち最小のものを $t(x, v)$ と置く。そして、

$$u_v^g(x) = u^g(x, v) = \frac{\|y(t(x,v); x, v)\|}{\|v\|}$$

と定義し、

$$x \succsim^g v \Leftrightarrow u^g(x, v) \geq 1$$

と定義する。

選好の構成法 (2)

定理１の背後にあるのは、本質的には次の定理である。。

定理４

$g:\Omega\to\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}$ が局所リプシッツであるとき、以下が成り立つ。

(i) $\succsim^g$ は完備、連続、単調で、任意の二次元平面に限定すると推移的である。

(ii) g が弱弱公理を満たすことと $\succsim^g$ が弱凸であること、そして $f^g=f^{\succsim^g}$ となることはすべて同値である。

(iii) 仮に $f^g=f^{\succsim}$ が成り立つような、完備、連続で、任意の二次元平面に限定すると推移的な二項関係 $\succsim$ が存在したとすれば、それは $\succsim^g$ である。

(iv) g が弱公理を満たすことと $\succsim^g$ が強凸であることは同値である。（続く）

選好の構成法 (3)

定理 4（続）

(v) g がヴィーユの公理を満たしていること、u_v^g が条件 F を満たすこと、u_v^g が $\succsim^g$ を表現すること、$\succsim^g$ が推移的であることはすべて同値である。

(vi) $h : \Omega \to \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ も局所リプシッツであるとき、$\succsim^g = \succsim^h$ であることと、g と h が各点で正の定数倍であることは同値である。

(vii) $g \mapsto \succsim^g$ は広義一様位相と閉収束位相のペアについて連続である。

定理４から定理１へ(1)

(i) の性質から、この $\succsim^g$ は LNST 条件を満たしているため、(ii) から、g が弱弱公理を満たしていれば $f^g = f^{\succsim}$ となる LNST 条件を満たす完備な二項関係があることがわかる。逆は容易に示せるため、これで定理１の (I) の証明が終わる。
(v) の性質があると、g がヴィーユの公理を満たしているならば u_v^g は条件 F を満たし、さらに定義から $t(av, v) = 0$ なので、
$u_v^g(av) = a$ である。逆に条件 F を満たす u が存在した場合、その u とヴィーユ曲線 $x(t)$ の合成は増加関数になることが示せるが、ヴィーユ曲線は閉曲線なのでこれはあり得ず、したがってヴィーユ曲線は存在し得ない。よって g はヴィーユの公理を満たし、定理１の (II) が示される。

定理４から定理１へ(2)

(ii) と (v) から、g が弱弱公理とヴィーユの公理を満たしている場合には、$f^g = f^{u_v^g}$ であることと、u_v^g が準凹であることがわかる。
また、$f^g = f^{\succsim}$ となる弱順序 $\succsim$ が存在した場合、次の関係

$$u_v^g(x) > u_v^g(y) \Rightarrow x \succ y$$

は比較的簡単に示せる。これらの関係から定理１の (III) を得る。
最後に定理１の (IV) は (iv) と (v) を組み合わせるだけで示せる。したがって、いくつか追加的なステップはあるものの、おおむね定理１は定理４から導出することができることがわかった。
よって、定理１の帰結のためには定理４こそが証明の中核となる。以下、定理４のアイデアを簡単に示そう。

定理４の証明のスケッチ (1)

定理４での選好 $\succsim^g$ の構成方法は、無差別曲線を用いたものである。いま、$x, v \in \Omega$ を二つ取ってくる。この二つが単に定数倍であれば、単に長い方が好まれると仮定すればよいので、一次独立であることを仮定する。V を x, v が張る平面と Ω の共通部分とし、この平面上で x を通る無差別曲線 $y(t)$ が定義できたとすれば、$y(t)$ が v の定数倍になる $t = t^*$ がただ一つ存在するはずである。そこで $y(t^*) = cv$ となる c を $u^g(x, v)$ と定義し、$\succsim^g = (u^g)^{-1}([1, +\infty[)$ とすれば選好の妥当な構築が完了する。
後は $y(t)$ の定義法だけを考えればよい。もし $g(y(t))$ の通常の理論のように $y(t)$ が買われる価格と解釈すると、$y(t)$ の軌道は $g(y(t))$ と常に直交しているはずである。そこでそのような微分方程式を立てればよい。今回、x, v が張る平面上において $g(y)$ と直交する関数として以下を用いる。

$$f(y) = (g(y) \cdot x)v - (g(y) \cdot v)x. \tag{2}$$

定理４の証明のスケッチ (2)

(2) 式の $f(y)$ を用いて、次の微分方程式を考える。

$$\dot{y}(t) = f(y(t)),\ y(0) = x. \tag{3}$$

$g(y(t)) \cdot f(y(t)) = 0$ なので、確かに我々が要請した条件を満たしている。この方程式の延長不能解を $y(t; x, v)$ と書こう。この関数の様子を見るために、$n = 2$ の状況を仮定し、x から見て v が反時計回り方向にある（つまり、$\det(x, v) > 0$）状況を考えてみよう。この場合、実は $f(y)$ は $g(y)$ を反時計回りに９０度回転させるタイプの関数となる。したがって $f(y)$ は必ず第二象限、つまり第一座標が負で第二座標が正の方向を向き、この帰結として $y(t; x, v)$ は、少なくとも $t > 0$ が小さいうちは、次の図の三角形の中を動くことがわかる。

定理４の証明のスケッチ (3)

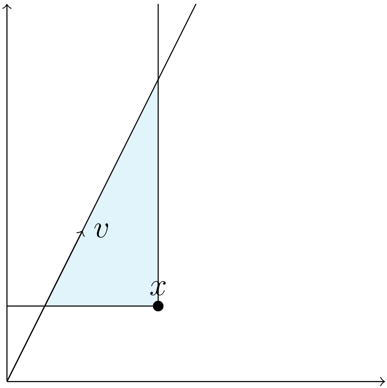

Figure: 三角形

定理 4 の証明のスケッチ (4)

もし延長不能解 $y(t;x,v)$ が $t>0$ となるすべての t で定義されているのならば、その速度には正の最小値が存在し、したがっていつかはこの三角形を脱出しなければならない。もしそうでなく、有限の時刻で $y(t;x,v)$ が定義できなくなるのならば、今度は微分方程式の一般論から、$y(t;x,v)$ は任意のコンパクト集合を有限時刻で脱出しなければならない。したがってやはり、$y(t;x,v)$ はいつかはこの三角形を脱出しなければならない。$f(y)$ が第二象限に位置していることから、この脱出は図の斜め線を通過する形で行われる。まとめると、我々の微分方程式の解は必ず v 方向の半直線を通過し、結果として $y(t^*;x,v)$ が v の定数倍となる t^* が存在することがわかる。この t^* が $t(x,y)$ であり、

$$u^g(x,v)=\frac{\|y(t(x,y);x,v)\|}{\|v\|},\ \succsim^g=\{(x,v)|u^g(x,v)\ge 1\}$$

と定義することで、選好 $\succsim^g$ が手に入る。

定理 4 の証明のスケッチ (5)

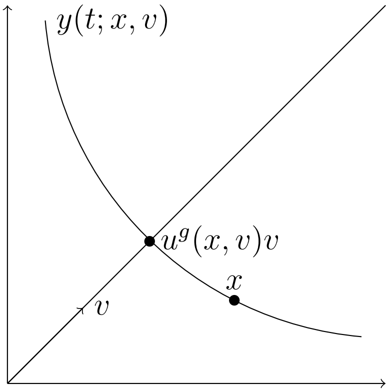

Figure: 無差別曲線

定理４の証明のスケッチ(6)

g が弱弱公理を満たすときに $\succsim^g$ が弱凸になることを示すためには、$y(t;x,v)$ の軌道が原点に対して凸であればよいはずである。そのために、我々はこの軌道を陽的オイラー法で近似することを考える。すなわち、

$$x_0 = x,\ x_{k+1} = x_k + hf(x_k)$$

という点列を考え、$hk \le t \le h(k+1)$ となる t に対して

$$z(t) = \frac{h(k+1)-t}{h}x_k + \frac{t-hk}{h}x_{k+1}$$

と定義する。$z(t)$ の軌道は折れ線になるが、一方で $z(t)$ は $h \to 0$ とすることで $y(t;x,v)$ に広義一様収束することが知られている。

定理 4 の証明のスケッチ (7)

したがって $y(t)$ が原点に対して凸であるためには、$z(t)$ が必ず原点に対して凸であればよい。ところがこの性質は弱弱公理と同値である。たとえば、弱弱公理が成り立っていることを仮定しよう。$x_{k+1} = x_k + hf(x_k)$ であるから、この両辺に $g(x_k)$ をかけ算することで、

$$g(x_k) \cdot x_{k+1} = g(x_k) \cdot x_k$$

を得る。よって弱弱公理から、

$$g(x_{k+1}) \cdot x_{k+1} \leq g(x_{k+1}) \cdot x_k$$

を得るが、これは $g(x_{k+1})$ が $g(x_k)$ よりも時計回り方向に回転していることを意味する。したがって $z(t)$ の軌道の傾きはどんどん急になっていくしかあり得ず、原点に対して凸である。（逆に弱弱公理が成り立っていない場合には $z(t)$ が原点に対して凸にならない場合が必ずあることも示せる）

定理 4 の証明のスケッチ (8)

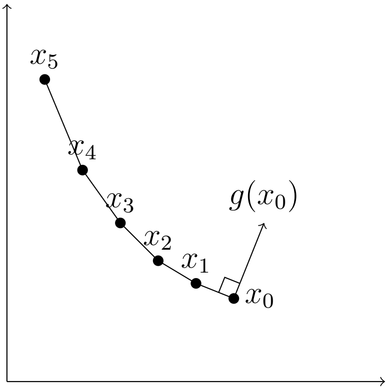

Figure: 近似の折れ線

定理４の証明のスケッチ(9)

弱公理が追加で仮定された場合には、$y(t;x,v)$ の軌道が直線部分を含まないので、$\succsim^g$ は強凸であることに注意する。ここで、微分方程式の解の一意性をうまく援用することによって、方程式

$$u^g(u^g(x,z)z,v)=u^g(x,v) \tag{4}$$

を示すことができる。(4) 式から容易に、

$$x\succsim^g z\Leftrightarrow u^g(x,z)\ge 1\Leftrightarrow u_v^g(x)\ge u_v^g(z)$$

が示されるため、$\succsim^g$ は u_v^g で表現され、したがって $\succsim^g$ は完備、推移的であることがわかる。連続性は容易、単調性はコーシー＝シュワルツの不等式を使って初等的に示せるので、これで定理４の大部分の証明が終わることになる。
ただし、これは $n=2$ の場合である。$n=2$ の場合、ヴィーユの公理は自動的に成り立つことに注意。

定理 4 の証明のスケッチ (10)

$n \geq 3$ の場合、$\succsim^g$ が (4) 式を満たすことは、同じ二次元平面に所属している $x, z, v \in \Omega$ に限定すれば、示すことができる。したがって、ほとんど同じ証明から、$\succsim^g$ が完備、単調、連続で、かつ二次元平面に限定すれば推移的であることまでは無条件に示せるし、g が弱弱公理を満たすことと $\succsim^g$ が弱凸であること、g が弱公理を満たすことと $\succsim^g$ が強凸であることが同値だと示すこともできる。しかしながら、推移性は証明できない。ヴィーユの公理こそが、$\succsim^g$ の推移性を証明する鍵なのである。

ヴィーユの公理(1)

$n=2$ の場合と同様、$n \geq 3$ の場合でも、(4) 式が Ω に所属するすべての x, z, v について成り立つことは、$\succsim^g$ が u_v^g によって表現されること、または単に $\succsim^g$ が推移的であることの必要十分条件であることは、比較的容易に示せる。そこで、
$u^g(u^g(x,z)z,v) \neq u^g(x,v)$ がどこかで成り立つと仮定しよう。じつは、この仮定からヴィーユ曲線を構成することができる。したがって対偶を取れば、g がヴィーユの公理を満たしていると (4) 式が無条件に成り立つことになる。

ヴィーユの公理 (2)

逆に、(4) 式が成り立つと仮定しよう。ここで、フロベニウスの定理の証明を、ただしヤコービの積分可能性条件ではなく (4) 式が成り立つことを用いてやり直すことにより、u_v^g が条件 F を満たすことを示すことができる（＊とても難しい）。そして、u_v^g が条件 F を満たしている場合、ヴィーユ曲線が存在しないことはすでに前のスライドで述べたことなので、(4) 式が成り立つことと g がヴィーユの公理を満たすことは同値なのである。これらをつなげることで、定理 4 の大部分を証明できる。残った主張はどれもそれほど難しくないので、この部分が定理 4 の証明の主要部であると言える。

定理３について (1)

後の部分で難しいところは定理３だが、おおざっぱに言うと条件 (A1) は次の関係

$$g(x) \cdot v = 0 \Rightarrow v^T Dg(x) v \le 0$$

を示しており、また条件 (A2) は

$$v \neq 0,\ g(x) \cdot v = 0 \Rightarrow v^T Dg(x) v < 0$$

を示している。これがアントネッリ行列の半負値定符号性、および負値定符号性と同値であることは良く知られている。条件 (B) はヤコービの積分可能性条件であるため、ざっくり言うと**全微分方程式**

$$\nabla u(x) = \lambda(x) g(x)$$

の局所解 (u, λ) の存在と同値な条件である。

定理 3 について (2)

条件 (B) が、条件 F を満たす u の（局所的な）存在の必要十分条件であることは、Hosoya (2021) によって示されている。したがって定理 3 のこの部分の証明は、局所的な存在を大域的な存在に拡張できるか否かという問題であり、さほど簡単ではないが、既存の技術で示すことができる。
条件 (A1) と $\succsim^g$ の弱凸性の同値性の方が難しい。本質的にはこれは小谷の定理 (Otani, 1983) の拡張であり、$\nabla u(x) \cdot v = 0$ ならば $v^T D^2 u(x) v \le 0$ であるという性質と準凹性が同値であるという結果を、∇u を g に変えて、しかも微分可能性を仮定せずに証明し直すという作業になる。かなり難解であったがなんとか解決することができて、たしかに主張は正しい。条件 (A2) から $\succsim^g$ の強凸性が導出できるという議論はこれと比べるとはるかに容易である。

今後の展開

この問題を Smale の非模索過程に適用することを検討中である。非模索過程を考える際に Smale は C^1 な効用関数から出発していたが、これは連続な交換比率関数 $g(x)$ に置き換えられるのではないか。弱弱公理とヴィーユの公理があればパレート最適な状態への移動が証明できるはずである。こちらは g の連続性までしか必要としないのではないか。
また、技術的だが、ヴィーユの公理を満たす局所リプシッツな g で、$g = \lambda\nabla u$ となる C^1 関数 u が存在しないものを探している。g がヴィーユの公理を満たせば、等高面が常に C^1 で、g が u の等高面の法線ベクトル場となる局所リプシッツな u が存在することはほぼ示せている (Hosoya, 2021) が、この u が C^1 にならない例はあるのだろうか？

Thank you for your attention.