経済学のための数学　試験問題

細矢祐誉

次の問題に解答しなさい。解答の順番は任意だが、どの問題を解いているかはわかるように書くこと。

問１：消費者の効用最大化問題

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x) \\ \text{subject to.} \quad & x \in \mathbb{R}^n_+, \\ & p \cdot x \le m \end{aligned}$$

を考える。

(1) $u(x) = x_1 x_2$ だったときの需要関数 $f(p,m)$ とスルツキー行列 $S_f(p,m)$ を計算しなさい。（ヒント：スルツキー行列の (i,j)-要素は $\frac{\partial f_i}{\partial p_j}(p,m) + \frac{\partial f_i}{\partial m}(p,m) f_j(p,m)$ である）

(2) $u(x) = x_1^2 + x_2^2$ だったとき、ラグランジュ未定乗数法から解こうとすると間違った需要関数

$$f(p,m) = (\frac{p_1}{p_1^2 + p_2^2} m, \frac{p_2}{p_1^2 + p_2^2} m)$$

が出てくることを授業で示した。これのスルツキー行列を求め、それが半負値定符号でないことを証明しなさい。（一般論が難しければ、$p_1 = p_2 = 1, m = 10$ で考えてよい）

問２：ワルラス型の価格模索過程

$$\dot{p} = z(p)$$

について考え、ただし z は零次同次性 $z(ap) = z(p)$ とワルラス法則 $p \cdot z(p) = 0$ を常に満たすとする。p^* は均衡、つまり $z(p^*) = 0$ を満たす点とし、また $\|p^*\| = 1$ とする。このとき、次の問いに答えなさい。

(1) $p(0) = p$ から始まる任意の上の方程式の解について、$\|p(t)\| = \|p\|$ がすべての t に対して成り立つことを証明しなさい。（ヒント：$\|p(t)\|^2$ という関数を t で微分してみるとわかる）

(2) 上の過程で p^* が安定的であるための条件は

$$p^* \cdot z(p) > 0$$

がすべての $p \neq p^*$ について成り立つことだということを授業で示した。ここで需要法則

$$(p - p') \cdot (z(p) - z(p')) < 0$$

がすべての p, p' に対して成り立っていれば十分であることを示しなさい。（ヒント：ワルラス法則 $p \cdot z(p) = 0$ と p^* が均衡であることを用いる）

問３：授業で、問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_t) - k_{t+1}), \\ \text{subject to. } & k_t \geq 0, f(k_t) - k_{t+1} \geq 0, k_0 = \bar{k} \end{aligned}$$

を考え、生産関数 $f(k) = \sqrt{k}$ と政策関数 $p(k) = 0.4\sqrt{k}$ から、$u(x) = \log x$ と $\delta = 0.8$ を導いた。これを一般化し、$f(k) = k^a, p(k) = bk^a$ のときの $u(x)$ と δ を求めなさい。ただし $0 < b < a < 1$ である。（ヒント：$p(k^*) = k^*$ となる k^* を求めると、$\delta = \frac{1}{f'(k^*)}$ である。また、$u(x)$ の候補は $\prod_{n=1}^{\infty} \delta f'(p^n(c^{-1}(x)))$ の原始関数である）