経済学のための数学　試験解答（２０１６年度）

細矢祐誉

問１：

(1)

$$f(p,m)=(\frac{m}{2p_1},\frac{m}{2p_2}),$$

$$S_f(p,m)=\begin{pmatrix}-\frac{m}{4p_1^2} & \frac{m}{4p_1p_2}\\ \frac{m}{4p_1p_2} & -\frac{m}{4p_2^2}\end{pmatrix}$$

(2)

$$S_f(p,m)=\begin{pmatrix}\frac{p_2^2m}{(p_1^2+p_2^2)^2} & -\frac{p_1p_2m}{(p_1^2+p_2^2)^2}\\ -\frac{p_1p_2m}{(p_1^2+p_2^2)^2} & \frac{p_1^2m}{(p_1^2+p_2^2)^2}\end{pmatrix}$$

なので、$v=(1,0)$ とすれば

$$v^TS_f(p,m)v=\frac{p_2^2m}{(p_1^2+p_2^2)^2}>0$$

となって、半負値定符号でないことがわかる。

解説：ただの微分の問題なのでさほど苦労しない。唯一苦労する可能性があるのは (1) の f を計算するところだろうか。これは、u が増加関数であること、$x_1=0,x_2=0$ のどちらかが成り立っていれば $u(x)=0$ であり、$x_1>0,x_2>0$ ならば $u(x)>0$ なので、問題の解が $x_1>0,x_2>0$ を満たすことに注意すれば、問題を

$$\begin{aligned}\max\quad & u(x)\\ \text{subject to.}\ & x\gg 0,\\ & p\cdot x=m\end{aligned}$$

と書き換えても解は変わらない。そして解が必ず存在すること、解の必要条件としてのラグランジュ未定乗数法を利用すれば、

$$L(x,\lambda)=u(x)+\lambda(m-p\cdot x)$$

を偏微分して 0 になるところを求めればよいことに気づく。後はただの計算なので省略する。

なお、スルツキー行列の計算をミスしてないかどうかを検算するときには、

$$p^T S_f(p, m) = 0^T$$

が常に成り立つという事実を用いると便利である。これはワルラス法則から容易に示せる。ワルラス法則「だけ」から示せるので、(2) のように真の需要関数でないものに対しても有用であることに注意。

問２：

(1) 実際、$f(t) = \|p(t)\|^2$ とすれば、

$$f'(t) = 2p(t) \cdot z(p(t)) = 0$$

がワルラス法則から言える。したがって f は定数関数であり、よって

$$\|p(t)\| = \sqrt{f(t)} = \sqrt{f(0)} = \|p(0)\| = \|p\|$$

となる。

(2) すべての p, p' に対して

$$(p - p') \cdot (z(p) - z(p')) < 0$$

であったとする。ここで $p' = p^*$ とすれば $z(p^*) = 0$ から、

$$0 > (p - p^*) \cdot (z(p) - z(p^*)) = (p - p^*) \cdot z(p)$$

がわかる。さらに $p \cdot z(p) = 0$ なので、

$$0 > -p^* \cdot z(p)$$

がわかり、両辺を -1 倍することで

$$p^* \cdot z(p) > 0$$

がわかる。

問３：まず、定常状態 k^* を求める。これは

$$p(k^*) = k^* \Leftrightarrow b(k^*)^a = k^* \Leftrightarrow (k^*)^{1-a} = b \Leftrightarrow k^* = b^{\frac{1}{1-a}}$$

という形で容易に求まる。次に、

$$f'(k) = ak^{a-1}$$

なので、

$$f'(k^*) = ab^{-1} = \frac{a}{b}$$

となり、よって

$$\delta = \frac{b}{a}$$

である。よって

$$\delta f'(k) = bk^{a-1}$$

である。

次に、

$$p^1(k) = bk^a, p^2(k) = b^{1+a}k^{a^2}, ..., p^n(k) = b^{\frac{1-a^n}{1-a}}k^{a^n}$$

というのがわかる。また、

$$c(k) = f(k) - p(k) = (1-b)k^a$$

なので、

$$c^{-1}(x) = \left(\frac{x}{1-b}\right)^{a^{-1}}$$

である。よって

$$p^n(c^{-1}(x)) = b^{\frac{1-a^n}{1-a}}\left(\frac{x}{1-b}\right)^{a^{n-1}}$$

だから、

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{N} \delta f'(p^n(c^{-1}(x))) &= \prod_{n=1}^{N} b(p^n(c^{-1}x))^{a-1} \\
&= \prod_{n=1}^{N} b^{a^n}\left(\frac{x}{1-b}\right)^{a^n - a^{n-1}} \\
&= b^{\frac{1-a^{N+1}}{1-a}}\left(\frac{x}{1-b}\right)^{a^N - 1} \\
&\to (1-b)b^{\frac{1}{1-a}}x^{-1} \text{ (as } N \to \infty)
\end{aligned}$$

を得る。よって、$c^* = c(k^*) = (1-b)b^{\frac{1}{1-a}}$ として、

$$u(x) = \int_{c^*}^{x} \prod_{n=1}^{\infty} \delta f'(p^n(c^{-1}(y)))dy = c^*(\log x - \log c^*)$$

を得る。（実際には、$u(x)$ はこれの正アフィン変換ならなんでもよい。$\log x$ でもよい）

解説：上で何度も使っているが、等比数列の和の公式

$$1 + b + b^2 + ... + b^{n-1} = \frac{1-b^n}{1-b}$$

は重要なので暗記しておくように。

上では精密に計算したが、実のところ $u(x) = a\log x + b$ の形であることだけを示せばよいので、示さねばならないのは

$$\prod_{n=1}^{\infty} \delta f'(p^n(c^{-1}(x))) = C \times x^{-1}$$

となる定数 $C > 0$ の存在だけである。この C が c^* と一致していたのには理由がある。というのも、

$$\delta^{-1} = f'(k^*)$$

であり、また $p^n(k^*) = k^*$ だから、$x = c^* = c(k^*)$ のとき、

$$\prod_{n=1}^{\infty} \delta f'(p^n(c^{-1}(x))) = \prod_{n=1}^{\infty} \delta f'(k^*) = 1$$

となるのである。よって、C は c^* と一致しなければならないことが上からただちにわかる。したがって、実は上の計算の大部分は適当に省略してよく、x のところだけを抜き出して計算すれば十分である。