経済学のための数学：第 1 章

細矢祐誉

テーマ：序論

本講義の目標は、限られた時間の中で経済学で数学を使うやり方とその利用例をできる限り多く見せることである。しかしあまりにも短いので、取捨選択が必要である。マクロ経済学とミクロ経済学で両方とも使える技術として、さしあたり微分方程式というものが比較的よいように思えたので、本講義では微分方程式とその応用をメインの軸にして、必要あらばそれ以外のトピックも拾っていくことにしたい。

ところで受講者諸君は、微分方程式というのがどういうものかを知っておられるだろうか。そもそも「微分」を知らない方もおられるかもしれないが、それはさすがに自習してもらうとして——上に述べたように本講義で使える時間は少ないので、基礎から固めている時間はないのである——微分方程式なるものに出会ったのがこの授業が初めて、という方もそれなりにおられるかもしれない。微分方程式にはいろいろな形があるが、さしあたり次のように記述されるものが比較的よく出てくる：

$$\dot{x} = f(t, x).$$

ここで x は t の関数だと思ってもらいたい。また上の点は微分を表す記号である（ニュートンが主に用いたため、伝統になっているようだ）。したがって正確に書こうと思えば、上の問題は次のようになる：

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)).$$

ある連続微分可能な関数 x が上の問題の**解** (solution) であるとは、その関数が実数上の幅を持った区間 I で定義され、任意の点 $t \in I$ において t における関数 x の微分 $\dot{x}(t)$ が $f(t, x(t))$ と一致していることを言う。

さて、こんな話をしていても一向に話が始まらないので、典型的な問題を考えてみよう。

$$\dot{x} = x$$

この微分方程式の解を見つけろ、という問題を考える。一般的な微分方程式の教科書には、次のような解法が書いてあることが普通である：両辺を x で割ると、

$$\dot{x}/x = 1$$

という形になる。左辺は $\log x(t)$ を微分した形になっているので、不定積分を取れば、

$$\log x(t) = t + C$$

という形が現れる。ただし C は積分定数である。両辺を e^x の x に代入して整理すれば、

$$x(t) = e^C e^t = C' e^t$$

となるので、上の方程式の解は $x(t) = C'e^t$ である。ただし C' はなんでもよい。

上の論法は数学的にはかなり乱暴なのだが（どこが乱暴なのか考えてみよ）、しかし結論としてはおおむね正しい。ただしひとつだけ注意が必要で、C' という積分定数によって定まる項が決まらないのである。そこで微分方程式では多くの場合、「初期値」と呼ばれるものを指定して解くことが行われる。一般形では

$$\dot{x} = f(t, x),\ x(t^*) = x^*$$

などという風に、$x(t^*) = x^*$ じゃなければいけませんよという追加条件を与えるのである。たとえば

$$\dot{x} = x,\ x(0) = 1$$

などと置けば、この解は $x(0) = C'e^0 = 1$ でなければいけないのだから、$C' = 1$ でなければならず、よって

$$x(t) = e^t$$

という形で確定する。

さて、微分方程式とはこのようなものである、ということはおおむね感覚的にはわかったと思う。この微分方程式は、マクロ経済学とミクロ経済学を問わず、様々な場所で多くの応用がある。それを見ていくのが今回の主たる目標である。

繰り返すが、最初に述べた通り、本講義は本当に時間がない。よって講義で紹介できない箇所は自習してもらうことになる。たとえばイプシロン＝デルタ論法や線形代数の初歩などを詳細に講義している時間は本講義にはない。以下に述べるのは自習用の教材である：高木貞治『解析概論』の第１章と第２章。杉浦光男『解析入門Ｉ』の第１章第１節から第３節まで。丸山徹『経済数学』の全部。またさらに必要ならば、位相と微分については丸山徹『数理経済学の方法』の第２章から第５章までと第８章を、積分については丸山徹『積分と関数解析』の第１章から第５章まで。線形代数についても本当はいい教材を紹介したいのだが、現時点で講師側にいい教材の心当たりがない（ストラング『線形代数とその応用』がよいと知人に聞いたが未読である）。微分方程式について予習したければポントリャーギン『常微分方程式』の第４章を使うとよい。