経済学のための数学：第４章

細矢祐誉

テーマ：ラグランジュの未定乗数法とその応用

この章では、次の形の最大化問題

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{subject to.}\ & x \in U \\ & g(x) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

の解法を扱う。ただし、$U \subset \mathbb{R}^n$ は開集合で、$f : U \to \mathbb{R}$ と $g : U \to \mathbb{R}^m$ は共に連続微分可能であるとする。$x^* \in U$ がこの問題の**解** (solution) であるとは、$g(x^*) = 0$ であり、かつ $g(x) = 0$ であるどんな $x \in U$ に対しても $f(x^*) \geq f(x)$ になることを言う[*1]。最大化問題の代わりに最小化問題を考えることもあり、その場合は max の代わりに min と書き、解の条件は $f(x^*) \leq f(x)$ となる。しかしこの差は実はほとんどどうでもいい：なぜなら、f の最大化問題の解は $-f$ の最小化問題の解であるから、両問題に本質的な差はほとんどまったくないのである。

よくこういう場合に取りざたされるのが、ラグランジュの未定乗数法 (Lagrange's multiplier rule) と呼ばれる方法である。これは、上の問題を見たらただちに下のような関数（ラグランジュ関数と呼ぶ）を作る：

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x).$$

そして、

$$D_x L(x^*, \lambda^*) = 0,\ D_\lambda L(x^*, \lambda^*) = 0$$

となる (x^*, λ^*) を求めると、それが問題の答えだという方法である。

初見だとまず、なぜこれが解けるのかというのがまったくわからないと思われる。この方法は本質的には関数 g の等高面と f の等高面が接する点を求めるものなのだが、上の式がなぜそれを意味するのかも、なぜ接する点を求めると解けるのかも意味不明であろう。ただ、意味不明でもなぜか問題は解けてしまうので、なんとなく使っている人間が多いだろう。

[*1] 以下、いろいろな問題で解と呼んだら似たような条件を満たす点である。いちいち定義するのは面倒なのでその都度書かないが、適宜理解してもらいたい。

この章では、ラグランジュの未定乗数法の原理を数学的に厳密なやり方で導出する。その際にキーになるのは前の章で出した陰関数定理である。また、ラグランジュの未定乗数法の経済学への応用に触れ、特に**ラグランジュの未定乗数法では絶対に解けない**いくつかの問題を紹介する。これらの問題はラグランジュの未定乗数法が誤った答えを出すのである。

・基礎理論：一階条件と二階条件

まずすべての基礎理論として、区間 I 上で定義された実数値関数 f について考えよう。$x \in I$ が f の**極大点**であるとは、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、$|y - x| < \varepsilon$ かつ $y \in I$ であれば $f(x) \ge f(y)$ が常に成り立つことを言う。当然ながら、最大の点は極大の点でもあるので、極大点についての定理は最大点についても同様に成り立つ。

基礎となるのは次のふたつの定理である。片方は一階条件、もう片方は二階の必要条件と呼ばれる。

定理１ (フェルマーの定理) : I は実数の区間であるとし、$f : I \to \mathbb{R}$ であるとする。このとき、x が f の極大点であれば、次の 3 つのうちのいずれかが成り立つ。

1) f は x で微分可能でない。
2) x は区間 I の端の点である。
3) $f'(x) = 0$ である。

証明 : 1) と 2) が成り立たなければ 3) が成り立つことを示せばよい。いま、f は x で微分可能であり、x は I の内部にあるので、十分小さく $\varepsilon > 0$ を取れば、

$$|y - x| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \ge f(y)$$

が成り立つ。そこでもし $f'(x) > 0$ であれば、

$$0 < f'(x) = \lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

であるから、十分 0 に近い $h > 0$ については $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ は常に分子が正でなければならず、したがって $f(x+h) > f(x)$ となるがこれは上の事実に矛盾する。逆に $f'(x) < 0$ であっても、十分 0 に近い $h < 0$ については $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ は常に分子が正でなければならず、よって $f(x+h) > f(x)$ となるがこれは上の事実に矛盾する。よって結局、

$$f'(x) = 0$$

だけが許容可能である。以上で証明が完成した。 ■

定理２ (二階の必要条件)：I は実数の区間であるとし、$f : I \to \mathbb{R}$ であり、x は I の端の点ではなく、f は x で二階微分可能であるとする。このとき、x が f の極大点であれば、$f''(x) \le 0$ が成り立つ。

証明：まず、x が f の極大点であるから、定理 1 によって $f'(x) = 0$ である。$f''(x) > 0$ であるとしよう。すると、十分 $|h|$ が小さい $h \neq 0$ については、

$$\frac{f'(x+h)}{h} > 0$$

でなければならない。$f'(x) = 0$ なので、これは $h > 0$ のときには $f'(x+h) > 0$ で、$h < 0$ のときには $f'(x+h) < 0$ であることを意味する。したがって f は x より少し小さいところでは減少しており、逆に少し大きいところでは増加していて、極大ではあり得ない。以上で証明が完成した。 ■

系１：f は開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された実数値関数で、$x \in U$ で最大になるとする。このとき、もし f が x で微分可能ならば、

$$Df(x) = 0$$

が成り立つ。また、もし f が x で二階微分可能ならば、$D^2 f(x)$ は半負値定符号である*2。

証明：前半は $g(t) = f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, ..., x_k)$ として定理 1 を適用すれば、

$$0 = g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

となって示せる。後半は $g(t) = f(x + tv)$ に定理 2 を適用すれば、

$$0 \ge g''(0) = v^T D^2 f(x) v$$

*2 わかると思うが、

$$D^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}(x) \end{pmatrix}$$

である。また、行列 A が半負値定符号であるとは、どんなベクトル v に対しても、

$$v^T A v \le 0$$

が成り立つことを言う。

となってやはり示せる。 ■

・ラグランジュの未定乗数法

定理３ (ラグランジュの未定乗数法) : U は $\mathbb{R}^n$ の開部分集合、f は U から $\mathbb{R}$ への連続微分可能な関数、g は U から $\mathbb{R}^m$ への連続微分可能な関数とし、$x^* \in U$ が問題 (1) の解であるとする。また、行列 $Dg(x^*)$ の階数は m に等しいと仮定する。このとき、ある $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ が存在して、

$$Df(x^*) + (\lambda^*)^T Dg(x^*) = 0$$

が成り立つ。

　上の定理が正しいとすれば、前節で述べたラグランジュ未定乗数法の考え方は解の**必要条件**を与えることがわかる。つまり、x^* が解であるとすれば（$Dg(x^*)$ の階数条件に目をつぶれば)、

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$$

とした場合、$D_\lambda L(x^*, \lambda^*) = 0$ は $g(x^*) = 0$ を意味し、また $D_x L(x^*, \lambda^*) = 0$ は

$$Df(x^*) + (\lambda^*)^T Dg(x^*) = 0$$

を、つまりは上の定理の条件を意味する。このふたつはたしかに x^* が解であるために「必要」である。「十分」ではない。これは後で深く解説する。

定理３の証明：最も一般的に示すにはリュステルニクの定理を用いるのがよいのだが、難しすぎる。ここではそれは避けて、Sundaram の “A First Course in Optimization Theory” の第 5 章の証明を参照することにする。まず、$Dg(x^*)$ の階数が m である以上、$n \geq m$ でなければならない。そして $Dg(x^*)$ は $m \times m$ の正則な部分行列を持つはずである。ここで面倒な記号法を避けるために、$Dg(x^*)$ の最後の m 列を取ってきてできた行列が正則であるということを仮定してしまおう。そして、$x \in U$ に対して $x = (z, w)$ と書くことにしよう。z は x のうち最初の $n - m$ 個の要素で、w は残りの m 個の要素である。すると $g(x) = g(z, w)$ となり、$D_w g(z^*, w^*)$ は正則である。よって陰関数定理が使えて、z^* を内部に含む立方体 I_1 と w^* を内部に含む立方体 I_2、それから連続微分可能な関数 $w : I_1 \to I_2$ が存在して、$(z, w) \in I_1 \times I_2$ に対して、$g(z, w) = g(z^*, w^*) = 0$ と $w = w(z)$ であることが同値になる。

そこで、$h(z) = f(z, w(z))$ としよう。このとき、$g(z, w(z)) = 0$ がすべての $z \in I_1$ に対して成り立つのだから、関数 h は z^* で最大になる。よって先ほどの系 1 から、

$$Dh(z^*) = 0$$

がわかる。次に合成関数の微分の公式から、

$$0 = Dh(z^*) = D_z f(z^*, w^*) + D_w f(z^*, w^*) Dw(z^*)$$

となる。ところで $g(z, w(z)) \equiv 0$ の方に合成関数の微分の公式を使うと、

$$0 = D_z g(z^*, w^*) + D_w g(z^*, w^*) Dw(z^*)$$

であるので、$D_w g(z^*, w^*)$ が正則であることから、

$$Dw(z^*) = -(D_w g(z^*, w^*))^{-1} D_z g(z^*, w^*)$$

だとわかる。代入して整理すれば、

$$D_z f(z^*, w^*) + (-D_w f(z^*, w^*)(D_w g(z^*, w^*))^{-1}) D_z g(z^*, w^*) = 0$$

が成り立つことを意味する。また当たり前だが、

$$D_w f(z^*, w^*) + (-D_w f(z^*, w^*)(D_w g(z^*, w^*))^{-1}) D_w g(z^*, w^*) = 0$$

であるので、

$$(\lambda^*)^T = -D_w f(z^*, w^*)(D_w g(z^*, w^*))^{-1}$$

とすればこれが定理の要件を満たす。■

ところで上の定理は $n - m > 0$ でないとうまく機能しないように思える。$n = m$ のときはどのように証明すればよいだろうか？　これはしかし、受講者諸君に任せることにしよう。線形代数の理解を試すよい機会である。

・応用：消費者の効用最大化問題

消費者の効用最大化問題は、通常次のように書かれる。

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x) \\ \text{subject to.} \quad & x \geq 0, \\ & p \cdot x \leq m. \end{aligned} \tag{2}$$

ただしここで p はすべての座標が正の $\mathbb{R}^n$ のベクトル、m は正の数である。p は**価格ベクトル** (price vector) と呼ばれ、m は**所得** (income) と呼ばれる。$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (2) の**解** (solution) であるとは、$x^* \geq 0, p \cdot x^* \leq m$ で、かつ $x \geq 0, p \cdot x \leq m$ であるようなすべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $u(x^*) \geq u(x)$ が成り立つことを言う。

この問題を解く際によくやられるのが、ラグランジュの未定乗数法をそのまま使うやり方である。つまり、

$$L(x, \lambda) = u(x) + \lambda(m - p \cdot x)$$

と定義して、

$$D_x L(x^*, \lambda^*) = 0, D_\lambda L(x^*, \lambda^*) = 0$$

となるような (x^*, λ^*) を見つけたら、x^* はこの問題の解だというやり方である。

受講者諸君はもう気づいたと思うが、(2) の問題は (1) の問題とまったく違う形状をしている。なにしろ、制約条件式は不等式制約であって、等式制約ではない。それに、関数 L には $p \cdot x \leq m$ の情報はなんとなく反映されているように見えるが、$x \geq 0$ の情報はまったく反映されていない。これはどういうことなのだろうか？

不等式制約を扱う定理を使っているという見方もできなくはないが、ここでは消費者理論特有の事情があることを考えてもらいたい。つまり、消費者の好みを表す関数 u は、ほとんどの場合、**増加的** (increasing) である——つまり、x よりも y のほうがすべての座標で大きいベクトルならば、必ず $u(y) > u(x)$ になる。このような関数については、$p \cdot x < m$ であるような点は (2) の解ではあり得ない。なぜかと言うと、x のすべての座標をもう少しだけ大きくしたベクトル y をうまく取れば、やはり $p \cdot y < m$ が成り立つからである。u が増加的である以上 $u(x) < u(y)$ なので、x は (2) の解ではない。裏返すと、解が存在する可能性があるのは $p \cdot x = m$ となる x のみなのである。そこで (2) を変形して、

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x) \\ \text{subject to.} \quad & x \geq 0, \\ & p \cdot x = m \end{aligned} \tag{3}$$

という問題を考えてみれば、(3) の解は (2) の解と一致するはずである。そして、(3) は (2) より少しだけ、(1) に近い。

しかしまだ問題がある。それは $x \geq 0$ という制約の存在である。経済学でよく使われる記号に $\mathbb{R}^n_+$ という集合があって、これは $x \geq 0$ となる $x \in \mathbb{R}^n$ をすべて集めてできた集

合であり、**非負象限** (nonnegative orthant) と呼ばれる。この記号を使うと、(3) は

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x) \\ \text{subject to.}\ & x \in \mathbb{R}^n_+, \\ & m - p \cdot x = 0 \end{aligned}$$

となって、この問題は (1) と同じような形に見える——しかしやはり同じではない。(1) の U は開集合だったが、上の問題の $\mathbb{R}^n_+$ は開集合ではないのである。

そこで、新たな記号を導入しよう。$x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して、すべての座標で $x_i > y_i$ となるとき、$x \gg y$ と書くことにする。そして、$\mathbb{R}^n_{++}$ という記号で、$x \gg 0$ となる $x \in \mathbb{R}^n$ をすべて集めてできた集合を表すことにする。この集合は**正象限** (positive orthant) と呼ばれる。そして、

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x) \\ \text{subject to.}\ & x \in \mathbb{R}^n_{++}, \\ & m - p \cdot x = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

とすれば、これでようやく (1) と同じ形になり、(4) の関数 L を (1) のやり方で作れば、それは (2) で紹介した L と同じ形になることが確認できる。

しかし (4) と (2) は違う問題である。特に、(2) や (3) は制約条件を満たす x の集合がコンパクトで、したがって u が連続関数でさえあれば必ず解を持つ。しかし (4) ではそうではないので、解を持つとは限らない。そこで、「(4) は解を持たないが (2) は解を持つ」問題を作ると、ラグランジュ未定乗数法では解けない問題ができあがるのである。

ただし、次のことには注意が必要である：もし u が $\mathbb{R}^n_+$ 上で連続であり、さらに (4) に解が存在したとすれば、それは (3) の解でもある。そして u が増加的ならば、上で述べたように (3) の解と (2) の解は同一なので、(4) の解は (2) の解でもある。これは、集合 $\{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0, p \cdot x \leq m\}$ が $\{x \in \mathbb{R}^n | x \gg 0, p \cdot x \leq m\}$ の閉包であることからただちに従う：実際、仮に x^* が (4) の解であるにもかかわらず、$x \geq 0, p \cdot x \leq m$ かつ $u(x) > u(x^*)$ となる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在したとすれば、u の連続性から、十分小さな $r > 0$ を取れば、$\|y - x\| < r$ である限りやはり $u(y) > u(x^*)$ である。そしてそのような y の中には、$y \gg 0, p \cdot y \leq m$ を満たすものが存在するので、x^* が (4) の解でないことになり矛盾が生ずる。よって、u が連続かつ増加的ならば、(4) の解は (2) の解である。

そして、思い出してもらいたい。ラグランジュ未定乗数法は、解の「必要条件」だった。よって、(4) に先ほどの定理を適用すれば、ただちに次の結果を得る。

定理４：$u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ は連続微分可能かつ増加的であるとし、$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (2) の解で、し

かも $x^* \gg 0$ だったとする。このとき、ある数 λ^* が存在して[*3]、

$$Du(x^*) - \lambda^* p = 0$$

$$m - p \cdot x^* = 0$$

の 2 つの式が成り立つ。別の書き方をすると、

$$L(x, \lambda) = u(x) + \lambda(m - p \cdot x)$$

とすれば、

$$D_x L(x^*, \lambda^*) = 0, D_\lambda L(x^*, \lambda^*) = 0$$

が成り立つ。

こうして、ラグランジュの未定乗数法の解き方は、若干消極的ではあるが正当化される。ただし、やはり「必要条件」に過ぎないことは押さえておかなければならない。ラグランジュ未定乗数法は解の「十分条件」ではない。それは、以下の例を見ていけばわかるだろう。

・例示：ラグランジュ未定乗数法で (2) が解けない問題

例 1 ：$u(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ とする。このとき、問題 (2) のラグランジュ関数は

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$$

であるから、それぞれ偏微分して、

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - \lambda p_1 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - \lambda p_2 &= 0, \\ m - p_1x_1 - p_2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

[*3] ここで、$Du(x^*)$ は横ベクトルで p は縦ベクトルだから引き算できないのではないか、と考えた受講者がいたとすれば、その考えは正しい。正しいが、しかし実際のところ、たいして重要な問題ではない。p を転置すれば正しい表記になるが、そうしないことで誤解が起こる余地があるようにも思えないので、わざわざ転置記号を付けて表記を煩雑にすることは避けた。このようなことはよくあるので、今後も「縦ベクトルか横ベクトルかを厳密に議論しなければならないとき以外は、転置記号は省略する」という理解をしていただきたい。

という方程式を得る。まず、最後の式から x_1 と x_2 のどちらかは 0 ではないので、$\lambda > 0$ でなければならない。すると上の 2 つの式が意味するのは

$$p_1 = \frac{2x_1 + 2x_2}{\lambda} = p_2$$

ということである。しかし p_1 と p_2 はあらかじめ決まっている数であるので、どこかでおかしなことが起こっている。特にたとえば $p_1 = 1, p_2 = 2, m = 10$ などを代入してみれば、上の式は $1 = 2$ を意味することになるので、明らかにおかしい。

この問題の解釈は簡単である：$p_1 = p_2$ のときを除いて、ラグランジュの未定乗数法の条件を満たすような $x \gg 0$ は**存在しない**のである。したがって (4) の解も存在しない。(2) の解は存在するが、それは $x_1 = 0$ か $x_2 = 0$ のどちらかを満たさなければならない。幸い、この場合には $x_1 = 0$ と $x_2 = 0$ をそれぞれ代入してみれば、どちらが高いかはすぐ比較できて、$p_1 > p_2$ ならば $x_1 = 0, x_2 = \frac{m}{p_2}$ が、$p_1 < p_2$ ならば $x_1 = \frac{m}{p_1}, x_2 = 0$ が解だとわかる。

$p_1 = p_2$ のときはどうだろうか？　この場合には、実は $m = p \cdot x$ を満たす**すべての** x がラグランジュの未定乗数法の条件を満たす。そして簡単な計算でわかることだが、この場合そのような**すべての** x が解である。

実は $u(x) = (x_1 + x_2)^2$ であり、よってこの関数の等高線は直線である。よってミクロ経済学的には、無差別曲線と予算線の傾きが一致するときを除いては、無差別曲線と予算線は常に交差し、接している点がない。これが上で述べたような問題が起こる病根である。

例２：$u(x) = x_1^2 + x_2^2$ とする。このとき、問題 (2) のラグランジュ関数は

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

なので、それぞれ偏微分して

$$\begin{aligned} 2x_1 - \lambda p_1 &= 0, \\ 2x_2 - \lambda p_2 &= 0, \\ m - p_1 x_1 - p_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

という方程式を得る。やはり最後の式から x_1 と x_2 のどちらかは 0 ではないので、$\lambda > 0$ である。よって

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

という関係を得る。よって、

$$m = p_1x_1 + p_2x_2 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{p_2}x_2$$

となって、

$$x_2 = \frac{mp_2}{p_1^2 + p_2^2},\ x_1 = \frac{mp_1}{p_1^2 + p_2^2}$$

という形で解を得た。

しかし実はこの上の解は間違っている。$p_1 = p_2 = 1, m = 10$ を代入してみよう。すると

$$x_1 = x_2 = 5$$

が上の解である。しかし、$u(5,5) = 50 < 100 = u(10,0)$ なので、明らかにこれは問題 (2) の解ではない。

これは u の等高線が円周であり、したがって予算線と無差別曲線が接するときに無差別曲線が下側に来ることから生じる問題である、というのがミクロ経済学的な説明である。

例３：$u(x) = \sqrt{x_1} + x_2$ とする。このとき、問題 (2) のラグランジュ関数は

$$L(x,\lambda) = \sqrt{x_1} + x_2 + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$$

なので、それぞれ偏微分して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - \lambda p_1 &= 0, \\ 1 - \lambda p_2 &= 0, \\ m - p_1x_1 - p_2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

という方程式を得る。二番目の式からただちに $\lambda = \frac{1}{p_2}$ を得るので、

$$\frac{1}{2\sqrt{x_1}} = \frac{p_1}{p_2}$$

であり、よって

$$x_1 = \frac{p_2^2}{4p_1^2}$$

となる。よって最後の式から

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_2}{4p_1}$$

という形で計算が終わる。

しかしここで疑問が生じる。x_2 は 0 以上だろうか？　実際、$p_1 = 1, p_2 = 1, m = 0.1$ とすれば $x_2 = -0.15 < 0$ であることが簡単にわかる。この場合、このような x_1, x_2 は選べないので、当然ながら (2) の解ではあり得ない。

この問題は、ラグランジュの未定乗数法の解が制約条件を満たさないという例であって、したがって $m \le \frac{p_2^2}{4p_1}$ のときには (4) の解は存在せず、よって $x \gg 0$ となる x の中に (2) の解は存在しない。残った可能性は $x_1 = 0, x_2 = \frac{m}{p_2}$ と $x_1 = \frac{m}{p_1}, x_2 = 0$ のどちらかである。前者の場合、

$$u(x) = \frac{m}{p_2}$$

となる。後者の場合、

$$u(x) = \sqrt{\frac{m}{p_1}}$$

となる。どちらが高いだろうか？　両者とも正なので、両者を自乗して比べるのがよい。すると、

$$\frac{m^2}{p_2^2} - \frac{m}{p_1} = \frac{m}{p_2^2}(m - \frac{p_2^2}{p_1}) < \frac{m}{p_2^2}(m - \frac{p_2^2}{4p_1}) \le 0$$

となって、後者のほうが高いことがわかる。よって $x_1 = \frac{m}{p_1}, x_2 = 0$ がこの場合の解である。

図で解くとこの問題はもっと簡単に解けるので、興味がある受講者は図を書いて考えていただきたい。

・解の十分性

上で見たようにラグランジュの未定乗数法は不完全であり、様々な問題を抱えていることがわかる。このうち特に問題なのは例 2 であって、例 1 や例 3 はラグランジュ未定乗数法で出てくる点がないとか、制約条件を満たさないとかいう問題だったのに対し、例 2 はラグランジュ未定乗数法で解けたように見えるのに実は解けていないという一段階深刻な問題である。u になんらかの追加的仮定をして、このような問題を禁止できないか？

本質的には、これは無差別曲線が予算線の下側から触るのを禁止する条件はなにか、という問題である。そこで出てくるのが**準凹性** (quasi-concavity) の仮定である。まず、次のことを思いだそう：集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ が**凸** (convex) であるとは、どんな $x, y \in U$ と $t \in [0, 1]$ に対しても $(1-t)x + ty \in U$ となることを言う。ここで凸集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された実数値関数 u が準凹であるとは、どんな $x, y \in U$ と $t \in [0, 1]$ に対しても

$$u((1-t)x + ty) \ge \min\{u(x), u(y)\}$$

が成り立つことを言う。さらに $x \neq y$ かつ $0 < t < 1$ のときに必ず

$$u((1-t)x + ty) > \min\{u(x), u(y)\}$$

が成り立つときには、u は**狭義準凹** (strictly quasi-concave) であると言う。

以下の定理は証明が簡単な割にとても強力である。

定理 5 (準凹関数についてのキューン=タッカーの定理)：f は $\mathbb{R}^n$ の凸集合 U 上で定義された実数値関数で準凹であるとし、また $h_1, ..., h_k$ は U 上で定義された実数値関数で、準凹であるとする。ここで問題

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{subject to.} \quad & x \in U, \\ & h_1(x) \geq 0, \\ \cdots \quad & \\ & h_k(x) \geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

を考える。$x^* \in \mathrm{int}\, U$ は $h_1(x^*) \geq 0, ..., h_k(x^*) \geq 0$ を満たし、f と $h_1, ..., h_k$ はすべて x^* で微分可能で、さらに $Df(x^*) \neq 0$ で、0 以上の数 $\lambda_1, ..., \lambda_k$ が存在して、キューン=タッカー条件

$$Df(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Dh_i(x^*) = 0$$

と、相補性条件

$$\lambda_i h_i(x^*) = 0,\ i = 1, ...k$$

を満たすとする。このとき x^* は (5) の解である。さらに f が狭義準凹であれば、解は x^* 以外には存在しない。

証明：まず、x^* が解でないと仮定する。すると、$x \in U, h_1(x) \leq 0, ..., h_k(x) \leq 0$ で、かつ $f(x^*) < f(x)$ となるような x が存在することになる。ここで

$$\phi(t) = f((1-t)x^* + tx) = f(x^* + t(x - x^*))$$

と置くと、f の準凹性から $t \in [0,1]$ ならば $\phi(t) \geq \phi(0)$ でなければならない。もし $\phi'(0) < 0$ ならば十分小さな $t > 0$ について $\phi(t) < \phi(0)$ でなければならないので、これはあり得ず、$\phi'(0) \geq 0$ でなければならない。

一方で、合成関数の微分の公式とキューン＝タッカー条件から

$$\phi'(0) = Df(x^*)(x - x^*) = -\sum_{i=1}^{k} \lambda_i Dh_i(x^*)(x - x^*)$$

である。いま、もしも $h_i(x^*) > 0$ ならば、$\lambda_i = 0$ である。$h_i(x^*) = 0$ であるとき、$\psi(t) = h_i(x^* + t(x - x^*))$ とすると、$h_i(x) \geq 0$ なので、$t \in [0, 1]$ ならば $\psi(t) \geq \psi(0)$ であり、よって先ほどと同様に

$$\psi'(0) = Dh_i(x^*)(x - x^*) \geq 0$$

であることがわかる。$\lambda_i \geq 0$ なので、先ほどの式の右辺は 0 以下であり、故に $\phi'(0) = 0$ であることがわかる。まとめると、

$$Df(x^*)(x - x^*) = 0$$

である。

さて、$Df(x^*) \neq 0$ であった。よって $Df(x^*)w < 0$ となるベクトル w が存在する。$z = x^* + w$ と置き、

$$x^*(t) = (1 - t)x^* + tz,\ x(t) = (1 - t)x + tz$$

と定義すると、$0 < t < 1$ のとき、

$$Df(x^*)(x^*(t) - x^*) = tDf(x^*)w < 0$$

$$Df(x^*)(x(t) - x^*(t)) = (1 - t)Df(x^*)(x - x^*) = 0$$

であるから、足し合わせることで

$$Df(x^*)(x(t) - x^*) < 0$$

を得る。そこで $\chi(s) = f(x^* + s(x(t) - x^*))$ と置けば、$\chi'(0) = Df(x^*)(x(t) - x^*) < 0$ なので、十分小さな $s > 0$ に対して $\chi(s) < f(x^*)$ であるが、f は準凹なので、

$$\chi(s) \geq \min\{\chi(0), \chi(1)\}$$

であり、$\chi(0) = f(x^*)$ だから、$f(x(t)) = \chi(1) < \chi(s) < f(x^*)$ でなければならない。$t \to 0$ として極限を取れば、$f(x) \leq f(x^*)$ を得るが、これは当初の仮定に矛盾。よってこれはあり得ず、x^* は解である。

最後に、f が狭義準凹だったとしよう。仮に y^* も解であれば、$f(x^*)=f(y^*)$ である。もし $x^*\neq y^*$ ならば $t=\frac{1}{2}$ として

$$f((1-t)x^*+ty^*)>\min\{f(x^*),f(y^*)\}$$

である。一方で U は凸集合だから $(1-t)x^*+ty^*\in U$ で、h_i はすべて準凹なので

$$h_i((1-t)x^*+ty^*)\geq\min\{h_i(x^*),h_i(y^*)\}\geq 0$$

となるので、$(1-t)x^*+ty^*$ は制約条件をすべて満たすのに x^* より f の値が大きいことになり、x^* が解だという前提に矛盾する。以上で証明が完成した。■

この定理の系として、ただちに次の結果を得る。

系２：u は $\mathbb{R}^n$ の凸集合 U 上で定義された実数値関数で、増加的かつ準凹であるとする。ここで問題

$$\begin{array}{ll}\max & u(x)\\ \text{subject to.} & x\in U,\\ & p\cdot x\leq m\end{array}\tag{6}$$

を考える。$x^*\in\mathbb{R}^n$ は、$x^*\in\text{int }U$ と $p\cdot x^*=m$ を満たし、また u は x^* で微分可能で、$Du(x^*)=\lambda^*p$ となる $\lambda^*\neq 0$ が存在するとする（つまり、(x^*,λ^*) はラグランジュ未定乗数法の解である）。このとき、x^* は問題 (6) の解である。さらに u が狭義準凹であれば、問題 (6) の解はこの x^* しか存在しない。

証明：$h_1(x)=m-p\cdot x$ として定理を適用すればよい。

問題 (6) の U は $\mathbb{R}^n_+$ であれば問題 (2) になることに注意。一方で、$\mathbb{R}^n_{++}$ にしてもまったく問題なくこの定理は成り立つ。実のところ、後で述べるように準凹性を確認するには微分を計算するのが最も容易で、そして経済学で扱う u の中には $u(x)=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ のように $\mathbb{R}^n_+$ の端では微分できない関数や、$u(x)=(x_1^{-1}+x_2^{-1})^{-1}$ のようにそもそも端で定義されていない関数も多い。そのため、そのような関数でも使えるようにあえて (6) のような変形をしているのである。

ちなみに、系２の x^* が U の内部になければならないという条件は、実は u が連続で、かつ $p\cdot x^+<m$ となる $x^+\in U$ が存在すれば取ることが可能である。証明するには、定理５の要領で $\phi'(0)=0$ を出した後、x の代わりに $(1-s)x+sx^+$ を用いて（$s>0$ は十

分小さく取る)、$\phi'(0) \neq 0$ を出して矛盾を導けばよい。簡単なので受講者諸君が試みられたい。

例４：$u(x) = x_1x_2$ として、問題 (2) を考えてみよう。後で証明するが、$\mathbb{R}^2_{++}$ 上では u は狭義準凹である。しかし $\mathbb{R}^2_+$ 上では、u は狭義準凹ではない：これは、$x = (1,0), y = (2,0)$ として $t = \frac{1}{2}$ とすれば、

$$0 = u((1-t)x + ty) = u(x) = u(y)$$

となって狭義準凹性に反する結果が出てしまうことからすぐにわかる。すると定理 3 の解の一意性部分は使えない。u が準凹であることは証明できるから定理 3 はたしかに成り立つのだが、その証明は（連続性を用いることに慣れていない者には）若干やっかいである。

しかし実のところ、$x_1 = 0$ と $x_2 = 0$ のどちらかが成り立っていれば $u(x) = 0$ であり、一方で $x \gg 0$ ならば $u(x) > 0$ なので、(2) の $x \geq 0$ を $x \gg 0$ に変えた次の問題：

$$\begin{array}{rl} \max & u(x) \\ \text{subject to.} & x \in \mathbb{R}^2_{++}, \\ & p \cdot x \leq m \end{array}$$

の解は (2) の解でもある。そしてこの問題は (6) の問題であるから、ラグランジュ未定乗数法の解は自動的に (6) のただひとつの解になることがわかる。そこでラグランジュ関数

$$L(x,\lambda) = x_1x_2 + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$$

を偏微分してゼロと置くと、

$$\begin{aligned} x_2 - \lambda p_1 &= 0, \\ x_1 - \lambda p_2 &= 0, \\ m - p_1x_1 - p_2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

という方程式体系を得る。$x_1, x_2 > 0$ なので明らかに $\lambda > 0$ であり、よって最初のふたつの式から

$$p_1x_1 = p_2x_2$$

という計算ができる。故にこれを代入して整理すれば、

$$x_1 = \frac{m}{2p_1}, x_2 = \frac{m}{2p_2}$$

という解を得る。これが (6) の解であり、したがって (2) の解でもあることは上で述べた通りである。

・狭義準凹性の十分条件

いま、u は開凸集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された実数値関数だとしよう。この u が狭義準凹であることを判定するためにはどうすればよいだろうか？　例 4 を見ればわかるとおり、これは重要な問題である：狭義準凹であるかどうかが判定できないと、定理 3 を使えないのである。いま、u が二階連続微分可能だと仮定しよう。ここで、

$$v \neq 0, Du(x)v = 0 \Rightarrow v^T D^2 u(x) v < 0 \tag{7}$$

という性質が成り立っていたとすれば、u は狭義準凹である。これは簡単に示せる——実際、この条件が成り立っていて、$x, y \in U$ だとし、$x \neq y$ だとしよう。このとき、

$$\phi(t) = u((1-t)x + ty) = u(x + t(y-x))$$

と定義しよう。もしも $0 < t^* < 1$ となる点 t^* で ϕ が極小になるならば、一変数関数の最小化の一階の条件と二階の必要条件から、

$$\phi'(t^*) = 0, \phi''(t^*) \geq 0$$

が成り立たなければならない[*4]。それを計算してみれば合成関数の微分の公式から簡単に、

$$Du((1-t^*)x + t^*y)(y-x) = 0,\ (y-x)^T D^2 u((1-t^*)x + t^*y)(y-x) \geq 0$$

という結論が出てしまって、これは (7) 式に矛盾する。

というわけで (7) 式が成り立てば u は狭義準凹であることがわかった。しかし、(7) 式もまだ、確かめるのは難しそうに見える。ところが Debreu (1952) は、$Du(x) \gg 0$ という仮定の下で、この性質が

$$(-1)^k \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_k}(x) & \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_k}(x) & \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) & 0 \end{vmatrix} > 0,\ k = 2, 3, ..., n \tag{8}$$

と同値であることを証明した。ここまで行けば、後は行列式を計算するだけなのでそう難しくはない。この (8) を**強い縁付きヘッセ行列の符号条件** (strict bordered Hessian condition) と呼ぶ。

[*4] 定理 1 と定理 2 を $-\phi$ に適用するだけである。

逆に、狭義準凹であるにもかかわらず (7) や (8) 式が成り立たない例はあるのだろうか？　Katzner (1968) がこれに答えた。彼は、

$$u(x) = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$$

が狭義準凹でありながら (7) 式を満たさないことを示した。これは実は深刻な問題を後に引き起こすが、さしあたりいまはそういうものかと思っておけばよい。

上の (8) 式の威力を見るために、たとえば $u(x) = x_1 x_2$ について計算してみよう。証明しなければならないのは $k = 2$ のときだけなので簡単である。実際、$x \gg 0$ ならば、

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{vmatrix} = 2x_1 x_2 > 0$$

となって、確かに (8) が成り立っている。よってこれは狭義準凹である。

例 2 で出した、$u(x) = x_1^2 + x_2^2$ はどうだろうか？　これもやってみると、

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2x_1 \\ 0 & 2 & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{vmatrix} = -8(x_1^2 + x_2^2) \le 0$$

となってしまうので、うまくいかない。例 2 の u は実は狭義準凹ではないので、こういう結果が出てきてしまうのである。

ところで、狭義準凹が (7) や (8) などで特徴付けられるならば、準凹も似たようなもので特徴づけられるのではないか？　と思うかもしれない。たとえば次の条件：

$$Du(x)v = 0 \Rightarrow v^T D^2 u(x) v \le 0 \tag{9}$$

が準凹と同値だったりしないだろうか？　実は同値ではない。準凹ならばこの条件が成り立つことは簡単に示せるが、逆が言えないのである（MWG の数学付録は間違っている)。反例は

$$u(x_1, x_2) = x_1^4$$

を考えればよい（これが反例になっていることは各自計算せよ)。

ところが実は Otani (1982) が素晴らしい結果を出していて、彼は $Du(x) \neq 0$ が常に成り立つという追加仮定の下で、(9) が u の準凹性と同値であることを示した。しかしその証明は若干面倒なので、ここでは書かない（ただ、陰関数定理のよいエクササイズなので、余裕があれば各自勉強されたい。たった 2 ページの論文である)。

・需要関数の微分可能性

問題 (2) や問題 (6) などの答えは、p と m の関数になっていることに、そろそろ受講者諸君も気づいてきたことだろう。この関数 $f(p,m)$ は消費者の**需要関数** (demand function) と呼ばれるものである。理論的に、需要関数が微分可能であることが重要なことが多いのだが、需要関数はいつ微分可能になるだろうか？　この問いには、最終的には Debreu (1972) が答えた。彼の答えはなんと、(7) 式こそがその条件だと言うのである。もう少し精密に言うと、$f(p^*,m^*)\gg 0$ で、かつ u が二階連続微分可能で狭義準凹な増加的関数で、さらに $Du(x)\neq 0$ が $f(p^*,m^*)$ の近傍上で常に成り立つとき、f が (p^*,m^*) で微分可能であるための必要十分条件は (7)、あるいは (8) である

$f(p,m)$ が微分可能ならば (7) や (8) が成り立つことの証明はとても難しい。Samuelson (1950) の数学付録が関係しているのだが、ここで書けるレベルを大幅に逸脱している。しかし (7) が成り立てば $f(p,m)$ が (p^*,m^*) で微分可能になることはそれほど難しくなく証明できる。以下、それを書いておこう。まず、

$$F(x,\lambda,p,m)=(Du(x)-\lambda p, m-p\cdot x)$$

と書く。定理 2 から、$x^*=f(p^*,m^*)$ と置くと、ある λ^* が存在して、

$$F(x^*,\lambda^*,p^*,m^*)=(0,0)$$

である。特に $Du(x^*)=\lambda^*p^*$ で、$Du(x^*)\neq 0$ なので、$\lambda^*\neq 0$ である。そして、簡単な計算から、

$$\det(D_{(x,\lambda)}F(x,\lambda,p,m))=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_n}(x) & p_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_n}(x) & p_n\\ p_1 & \cdots & p_n & 0\end{vmatrix}$$

であることがわかるが、(x^*,λ^*,p^*,m^*) でこの値を評価すると、これは

$$\frac{1}{(\lambda^*)^2}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_n}(x^*) & \frac{\partial u}{\partial x_1}(x^*)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n\partial x_1}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_n}(x^*) & \frac{\partial u}{\partial x_n}(x^*)\\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(x^*) & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_n}(x^*) & 0\end{vmatrix}$$

となって、(8) 式からこの値は 0 ではないことがわかる。よって陰関数定理により、(p^*,m^*) の近傍上で定義されたある連続微分可能な関数

$$x(p,m),\lambda(p,m)$$

が存在して、

$$F(x(p,m),\lambda(p,m),p,m)\equiv(0,0)$$

となる。ところが上の式は、$x(p,m),\lambda(p,m)$ がラグランジュ未定乗数法の解であることを意味しており、定理 5 の系 2 からそれは (2) の解であることの十分条件なので、$x(p,m)=f(p,m)$ であることがわかる。$x(p,m)$ が連続微分可能なのだから、$f(p,m)$ も連続微分可能であり、よって f は (p^*,m^*) で微分可能である。

こうして、需要関数の微分可能性というのは、実は (8) 式に本質があることがわかった。と同時に、Katzner (1968) の例 $u(x_1,x_2)=x_1^3x_2+x_1x_2^3$ がなぜ深刻なのかも、わかったと思う。つまり、このなんの変哲もない関数に対応する需要関数は、なんと微分可能ではないのである！

・練習問題

問題 1 ：次の（微分で解けない）最大化問題を解け。

(1)

$$\begin{aligned}\max\quad & \min\{x,1-x\},\\ \text{subject to.}\ & 0\le x\le 1.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\max\quad & \min\{x,y\},\\ \text{subject to.}\ & x\ge 0,\\ & y\ge 0,\\ & x+y\le 10.\end{aligned}$$

問題 2 ：例 2 において、$p_1<p_2$ のときの真の解を求めよ。

問題 3 ：Katzner の例 $u(x_1,x_2)=x_1^3x_2+x_1x_2^3$ が、$x_1=x_2=1$ のところで (8) 式を満たしていないことを計算せよ。