経済学のための数学：第５章

細矢祐誉

テーマ：需要関数から効用関数を逆算する

消費者の最大化問題

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x) \\ \text{subject to. } & x \in \Omega, \\ & p \cdot x \leq m \end{aligned} \tag{1}$$

を思い出そう。Ω という記号は見慣れないが、さしあたりは $\mathbb{R}^n_+$ だと思っておいてよい。すべての p, m に対してこの問題の解がただひとつであると仮定すると、その解は $f(p, m)$ という関数の形で書ける。関数 f を需要関数と呼ぶのであった。

教科書的なミクロ経済学ではここまでで終わりである。しかし、実用的に考えると次の問題が発生する。実際の消費者の問題を考えるときには、なんらかの形で u の形を特定しないと議論が始まらない。だが u は消費者の好みを表す関数なので、手に入るデータの中に u を見つける方法がない。要するに、計量経済学的に u の推定というのはえらく難しい問題になるのである。

そこで、f の方に着目する。これは消費者がなにを買うかを表す関数であり、これは実際の購買行動と紐付けできている。つまり、u よりは推定しやすいであろう。では、u から f を計算したように、逆に f から u を逆算できないだろうか？——こうして生まれたのが積分可能性問題と言われる一連の理論である。

今回は、この積分可能性問題について解説する。鍵となるのは (1) の**双対問題** (dual problem) と呼ばれる次の問題：

$$\begin{aligned} \min \quad & p \cdot y \\ \text{subject to. } & y \in \Omega, \\ & u(y) \geq u(x) \end{aligned} \tag{2}$$

である。この問題の解の持つ値（解の方ではなく、最小値の方）を $E^x(p)$ と書くことにしよう。この関数 E^x を**支出関数** (expenditure function) と呼ぶ。実は上の問題に解がなくてもこの支出関数は定義できて、フォーマルな定義は

$$E^x(p) = \inf\{p \cdot y | u(y) \geq u(x)\}$$

である。

実はこの $E^x(p)$ には素晴らしい性質がひとつある。というのも、$\bar{p}$ をひとつ固定した場合、u についてのそれほど強くない仮定の下で

$$u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow E^x(\bar{p}) \geq E^y(\bar{p})$$

がすべての x と y について成り立つからである。したがって u を計算する問題は、$E^x(\bar{p})$ を計算する問題に還元される。E^x がわかれば u はわかったも同然である——実はこれは言い過ぎなのだが、いまは気にしないでおこう。

一方で、もちろん u がわかっていないときには $E^x(\bar{p})$ もわからないので、問題が変わっていないじゃないかと思う受講者もいるかもしれない。たしかにそれはその通りだが、しかし実は盲点がここにひとつあって、もし $x = f(p, m)$ ならば、$E^x(p) = m$ だということが証明できるのである。よって $E^x(\bar{p})$ は計算できなくても、$E^x(p)$ ならば計算できる。ここから $E^x(\bar{p})$ を計算できないか？

ここで鍵となるのは、シェパードの補題 (Shephard's lemma) と呼ばれる次の関係である。

$$DE^x(q) = f(q, E^x(q)). \tag{3}$$

これと合成関数の微分の公式を用いると、$c(t) = E^x((1-t)p + t\bar{p})$ としたとき、この関数 c は

$$\dot{c}(t) = f((1-t)p + t\bar{p}, c) \cdot (\bar{p} - p),\ c(0) = E^x(p) \tag{4}$$

という微分方程式の解であることになる。f が連続微分可能であれば、これは第一種の微分方程式であり（第 3 章の練習問題を参照)、よって解はただひとつしかない。そこでこの微分方程式を解いて、$c(1)$ を計算すれば、その値が $E^x(\bar{p})$ のはずである。

例をひとつ挙げよう。需要関数

$$f(p, m) = (\frac{\alpha_1}{p_1}m, ..., \frac{\alpha_n}{p_n}m)$$

を考え、ただし α_i はすべて正の数で、足し合わせるとちょうど 1 になると仮定しよう。この関数は、$p \cdot f(p, m) = m$ という条件を常に満たすことに注意する。$\bar{p}$ はなんでもよかったからここでは $(1, 1, ..., 1)$ ということにして、(4) の微分方程式を具体的に書くと、

$$\dot{c} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{1 - p_i}{p_i + t(1 - p_i)}\right) c,\ c(0) = m$$

ということになる。これはどうやって解けばよいだろうか？　しかし実は、この種の微分方程式には公式がある。方程式

$$\dot{c} = a(t)c$$

の解は、

$$c(t) = c(0)e^{\int_0^t a(s)ds}$$

だということが、微分方程式の教科書によく載っている（直接確かめれば解であることは簡単にわかる)。そこでこれを当てはめると、解くためには

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{1-p_i}{p_i + t(1-p_i)}$$

の原始関数がわかればよいということがわかる。幸いにも今回はとても簡単に、

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \log(p_i + t(1-p_i))$$

がそれであることがわかる。よって当てはめると、

$$c(1) = m\prod_{i=1}^n p_i^{-\alpha_i}$$

という計算結果を得る。次に、$x = f(p, m)$ となる p と m を見つけなければならないが、今回の場合は $m = 1$ を代入すればすぐに、$x_i = \frac{\alpha_i}{p_i}$ から、$p_i = \frac{\alpha_i}{x_i}$ を得る。そこでこれを上に代入すれば、

$$c(1) = \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i^{-\alpha_i}\right) \times x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$$

ということで、これで u の逆算が終わった。

実はごまかしている部分がひとつあって、$x_i = 0$ だと上の分数の分母が 0 になってしまうため p_i が計算できない。そこをどう処理するかというのは難しい問題である。が、さしあたりしばらくは無視しよう。もっと重要な問題が次で議論される。

・どんなときに u は存在するのか？

上の例でひとつ無視されていた問題がある。それは、$f(p, m)$ に対応する u が存在するとなぜわかったのか？　ということである。

最初に $f_i(p, m) = \frac{\alpha_i m}{p_i}$ という形だけを見て、それに対応する u の存在がわかるだろうか？　わかるかもしれない。なぜなら、この関数はとても有名だからである。有名すぎて名前がついており、コブ＝ダグラス型需要関数と呼ばれている。対応して、

$$u(x) = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}$$

をコブ＝ダグラス型効用関数と呼ぶ。このふたつが対応していることはとても有名なので（そして実際、上の逆算で出てきた $u(x)$ は（定数）×（コブ＝ダグラス型効用関数）だった）、f に対応する u が存在することを知っていたひとがいてもおかしくはない。

しかし、ではこれはどうだろうか？

$$f_i(p,m)=\frac{\alpha_i^{\frac{1}{1-\rho}}p_i^{\frac{-1}{1-\rho}}m}{\sum_{j=1}^n\alpha_j^{\frac{1}{1-\rho}}p_j^{\frac{-\rho}{1-\rho}}}.$$

ここでも $\alpha_i>0$ かつ $\sum_i\alpha_i=1$ で、ただし $\rho<1$ かつ $\rho\neq 0$ とする（実は $\rho=0$ だとコブ＝ダグラスと一致する）。さて、これに対応する u はあるだろうか？　ある、と即答した受講者がいたとすれば、たぶんＣＥＳ効用関数という名の関数を知っていたのだろう。実際、これは次の有名な u に対応している：

$$u(x)=(\alpha_1x_1^\rho+...+\alpha_nx_n^\rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

それは事実だが、しかしやはり一段階見た目が難しくなったことは認めざるを得ないのではないだろうか。少なくとも、経済学を知らない数学者がこれを見てこれに対応する u があるかどうか判定してくれ、と言われたら、たいていの場合は途方に暮れるに違いない。

もちろん、もっとマイナーで、経済学者ですらめったに見たことがないような需要関数だって存在する。その場合の判定は経済学者ですら困難を極める。というわけで、どのような関数 f だったら、対応する u が存在するのか？　というのが次の問題である[*1]。

ところで、先ほど支出関数 E^x を定義して、その性質をふたつ紹介した（まだ証明はしていない）。まず、$x=f(p,m)$ ならば $E^x(p)=m$ である。次に、$DE^x(q)=f(q,E^x(q))$ である。後者の等式、いわゆるシェパードの補題を $q=p$ の点で微分することで、我々は

$$D^2E^x(p)=S_f(p,m)$$

という公式を得る。ただし $S_f(p,m)$ は、i 行 j 列の要素が

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_j}(p,m)+\frac{\partial f_i}{\partial m}(p,m)f_j(p,m)$$

である行列で、**スルツキー行列** (Slutsky matrix) と呼ばれている。行列表現で書くと、

$$S_f(p,m)=D_pf(p,m)+D_mf(p,m)f^T(p,m)$$

[*1] ちなみに、経済学をよく知る受講者ならば、「それは顕示選好の強公理だろう」と即答するかもしれない。これは確かに正しい。Mas-Colell, Whinston, and Green (1995) の 3.J 節を参照。しかし、たとえば上で紹介したややこしい f が顕示選好の強公理を満たすことをどうやって確かめるのか、というと、たぶんたいていの人は頭を抱えるだろう。顕示選好の強公理はとても確かめにくい性質で、この問題を議論するときにはほぼ役立たずである。

である。

需要関数のスルツキー行列は支出関数のヘッセ行列なのだから、当然対称である。さらに、スルツキー行列にはもうひとつ面白い性質があって、それは半負値定符号性である。これは、E^x が次の性質、

$$E^x((1-t)q+tr) \ge (1-t)E^x(q)+tE^x(r)$$

を満たしていることから来る。この性質は、前章で紹介した準凹性よりも少しだけ強い仮定であり、**凹性** (concavity) と呼ばれている。そして凹関数のヘッセ行列は必ず半負値定符号なのである——したがってスルツキー行列も半負値定符号なのである。

今回の目標は、上の逆を示すことである。厳密には少し追加条件が必要だが、要するに需要関数かもしれない関数 f があったとき、スルツキー行列 $S_f(p,m)$ を計算して、それが対称で半負値定符号であれば、その関数 f は実際になんらかの関数 u に対応する需要関数なのである！[*2]

正式な結果を次に述べよう。ここで Ω は $\mathbb{R}^n_+$ の部分集合であるとし、**消費集合** (consumption set) と呼ばれる。

定理１：$f:\mathbb{R}^n_{++}\times\mathbb{R}_{++}\to\Omega$ はワルラス法則 $p\cdot f(p,m)=m$ を常に満たす連続微分可能な関数であるとする。そして、そのスルツキー行列

$$S_f(p,m)=D_pf(p,m)+D_mf(p,m)f^T(p,m)$$

が、常に対称かつ半負値定符号だったとする。ここで、$\bar{p}\gg 0$ をひとつ取って固定する。そして $x\in\Omega$ を取り、以下のようにして $u_{f,\bar{p}}(x)$ という数を決定する。まず、$x=f(p,m)$ となる (p,m) がひとつもないときには、単に $u_{f,\bar{p}}(x)=0$ とする。そして、$x=f(p,m)$ となる (p,m) が少なくともひとつあった場合、次の微分方程式：

$$\dot{c}=f((1-t)p+t\bar{p},c)\cdot(\bar{p}-p),\ c(0)=m \tag{5}$$

を計算して、$c(1)$ を求める。すると $c(1)$ は (p,m) の選び方に依存せず x にだけ依存して決まるので、それを $u_{f,\bar{p}}(x)$ とする。以上のようにして関数 $u_{f,\bar{p}}$ を決め、そして (p,m) を任意に選んで問題

$$\begin{aligned} \max\quad & u_{f,\bar{p}}(x) \\ \text{subject to.}\quad & x\in\Omega, \\ & p\cdot x\le m \end{aligned} \tag{6}$$

[*2] ちなみにこれは未発表の結果であり、現在投稿中である。つまり、今回の講義の内容はこの世に存在するどの本にも載っていない。

を考えると、$f(p,m)$ が上の問題のただひとつの解になる。

(5) の微分方程式が、(4) と同じ形であることに注意しよう。つまるところ、本質的なアイデアは前の節で説明したとおりである。つまり、f がなにかの u に対応していることを確かめるためには、スルツキー行列が対称かつ半負値定符号であること（およびワルラス法則）を調べるだけでよかったのである！

なお、定理 1 は $u_{f,\bar{p}}$ の作り方を述べているが、u が与えられている (1) の問題から需要関数 f を出して、そこから定理 1 のやり方で $u_{f,\bar{p}}$ を計算したときに、u と $u_{f,\bar{p}}$ の間にどんな関係があるかは、現時点ではわからない。これは後になって少しだけ論じる。

・支出関数の性質

定理 1 の証明はあまりにも長いので、最終的には証明のアイデアを簡単に述べて終わりとする。しかしまずここで我々は問題 (1) に戻ろう。そして、支出関数

$$E^x(p) = \inf\{p\cdot y | y \in \Omega,\ u(y) \ge u(x)\}$$

を定義しよう。u を逆算するのが本来の目標だったのだが、最初は u がもうわかっていることにして、E^x の性質を研究してみたい。ただしここで、(1) の解である需要関数 $f(p,m)$ が連続であることを、最初から仮定する*3。また、f がワルラス法則を満たすことも仮定する（これは u が増加的であれば普通は問題ない）。

最初に出すべきは E^x の凹性である。この性質は簡単に示せる：実際、$p,q\in\mathbb{R}^n_{++}$ とし、さらに $0\le t\le 1$ としよう。すると、$E^x((1-t)p+tq)$ の定義から、どんな小さな $\varepsilon > 0$ に対しても

$$u(y)\ge u(x),\ ((1-t)p+tq)\cdot y \le E^x((1-t)p+tq)+\varepsilon$$

を満たす $y\in\Omega$ が存在する。そして明らかに

$$p\cdot y \ge E^x(p),\ q\cdot y\ge E^x(q)$$

なので、

$$E^x((1-t)p+tq)+\varepsilon \ge (1-t)(p\cdot y)+t(q\cdot y) \ge (1-t)E^x(p)+tE^x(q)$$

となる。$\varepsilon\downarrow 0$ とすることで目標となる関係

$$E^x((1-t)p+tq)\ge (1-t)E^x(p)+tE^x(q)$$

*3 u が連続だとしてベルジュの定理を用いれば、これがさほど強い仮定ではないことがわかる。

を得た。

凹関数の性質として有名なものには、次の3つが挙げられる。まず、開集合上で定義された凹関数は必ず連続である。次に、一変数の凹関数は常に右側微分も左側微分も可能で、しかも左側微分のほうが右側微分よりも必ず大きくなるということである（一致すれば微分可能である）。最後に、もし凹関数が二階微分可能だったら、そのヘッセ行列は半負値定符号である。このふたつは今回、証明なしで用いることにする。まずいまわかったことは、E^x は連続だということである。

次に、$x \in \Omega$ かつ $\varepsilon > 0$ として、

$$X(q) = f(q, E^x(q)), X^\varepsilon(q) = f(q, E^x(q) + \varepsilon)$$

というふたつの関数を定義しよう。そして、

$$p \cdot X(q) \geq p \cdot X(p) = E^x(p)$$

を証明してみよう。まず、

$$p \cdot X(p) = p \cdot f(p, E^x(p)) = E^x(p)$$

はワルラス法則からただちにわかる。次に、$E^x(q)$ の定義から、$u(y) \geq u(x)$ かつ $p \cdot y \leq E^x(q) + \varepsilon$ となる $y \in \Omega$ の存在がわかる。このとき、$X^\varepsilon(q)$ は $m = E^x(q) + \varepsilon$ としたときの問題 (1) の答えであり、このとき $q \cdot y \leq m$ なので、$u(X^\varepsilon(q)) \geq u(y)$ でなければならない。つなげて $u(X^\varepsilon(q)) \geq u(x)$ である。故に

$$p \cdot X^\varepsilon(q) \geq E^x(p)$$

でなければならないが、$\varepsilon \downarrow 0$ とすれば f の連続性から、

$$p \cdot X(q) \geq E^x(p)$$

ということがわかる。

さて、ここで特に $q = p + he_i$ のときを考えよう。ただし e_i は第 i 単位ベクトル、つまり、i 座標目が 1 で他の座標がすべて 0 のベクトルとし、$h \neq 0$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} E^x(q) - E^x(p) &= q \cdot X(q) - p \cdot X(p) \\ &= p \cdot (X(q) - X(p)) + hf_i(q, E^x(q)) \\ &\geq hf_i(q, E^x(q)) \end{aligned}$$

がわかる。よって $h > 0$ のときにこれを h で割って $h \downarrow 0$ としたとき、

$$D_{i,+}E^x(p) \geq f_i(p, E^x(p))$$

という片側微分の評価が得られる。同様に $h<0$ のときにこれを h で割って $h\uparrow 0$ としたとき、

$$D_{i,-}E^x(p)\le f_i(p,E^x(p))$$

という片側微分の評価が得られる。ところが $E^x(p+he_i)$ は h について明らかに凹関数なので、

$$D_{i,+}E^x(p)\le D_{i,-}E^x(p)$$

である。これらをすべてつなげることで、

$$D_{i,+}E^x(p)=D_{i,-}E^x(p)=f_i(p,E^x(p))$$

となり、よって、

$$\frac{\partial E^x}{\partial p_i}(p)=f_i(p,E^x(p))$$

がわかったことになる。この右辺は連続なので E^x は連続微分可能で、

$$DE^x(p)=f(p,E^x(p))$$

というシェパードの補題 (3) が得られたことになる。

次に、$x=f(p,m)$ だとする。このとき、$p\cdot y\le m$ かつ $x\ne y$ ならば、x が問題 (1) のただひとつの解であることから、$u(x)>u(y)$ である。対偶を取ると、$x\ne y$ かつ $u(y)\ge u(x)$ ならば $p\cdot y>m$ だということだ。そして $u(x)\ge u(x)$ は当然であり、ワルラス法則から $p\cdot x=m$ である。以上で、x は問題 (2) の解でもあることがわかった。したがって $m=p\cdot x=E^x(p)$ である。

最後に、u が連続であり、かつ f という関数が次の性質「原点 0 以外のすべての x に対して $x=f(p,m)$ となる (p,m) が存在する（$*$）」を満たしていたと仮定しよう[*4]。そして $\bar{p}\gg 0$ をひとつ固定し、

$$u(x)\ge u(y)\Leftrightarrow E^x(\bar{p})\ge E^y(\bar{p})$$

という最も重要な関係を示しておく。まず、上で議論した途中で、どんな $\varepsilon>0$ に対しても

$$u(f(q,E^x(q)+\varepsilon))\ge u(x)$$

[*4] この仮定と連続微分可能性を兼ね備えた f が、$\Omega=\mathbb{R}^n_+$ では非常に少ない。なぜ (1) で Ω などという新しい記号を使ったかというと、この話をするときに $\Omega=\mathbb{R}^n_{++}$ であってくれないと、コブ=ダグラス型関数ですら議論の対象から外れてしまうからなのである。

がすべての q に対して成り立つ事を証明していたことを思い出して欲しい。そこで $\varepsilon\downarrow 0$ とすると f と u の連続性から、

$$u(f(q,E^x(q)))\geq u(x)$$

がわかる[*5]。特に q に $\bar{p}$ を代入して、

$$z=f(\bar{p},E^x(\bar{p})),\ w=f(\bar{p},E^y(\bar{p}))$$

と定義すれば、$u(z)\geq u(x)$ かつ $u(w)\geq u(y)$ である。一方で $x=f(p,m)$ だと仮定しよう。先ほど示したように $E^x(p)=m$ であり、よって $c(t)=E^x((1-t)p+t\bar{p})$ は、第一種の微分方程式

$$\dot{c}=f((1-t)p+t\bar{p},c)\cdot(\bar{p}-p),\ c(0)=m$$

の解である。ところでこの c はもうひとつの第一種の微分方程式

$$\dot{c}=f((1-t)p+t\bar{p},c)\cdot(\bar{p}-p),\ c(1)=E^x(\bar{p})$$

の解でもある。ところが、同じ議論から $E^z(\bar{p})=E^x(\bar{p})$ でなければならず、よって $d(t)=E^z((1-t)p+t\bar{p})$ もまた、上の微分方程式の解である。第一種の微分方程式の解はただひとつしかなかったから、$c(t)=d(t)$ であり、特にここから、

$$E^z(p)=E^x(p)=m$$

が示せたことになる。そして上の (7) 式の x に z を、q に p を代入すれば、

$$u(x)=u(f(p,E^z(p)))\geq u(z)$$

であることがわかる。したがって $u(x)=u(z)$ である。

まったく同じ理屈で $u(y)=u(w)$ である。よって、

$$u(x)\geq u(y)\Leftrightarrow u(z)\geq u(w)$$

がわかった。一方、

$$u(z)\geq u(w)\Leftrightarrow E^x(\bar{p})\geq E^y(\bar{p})$$

はワルラス法則から簡単に出せるので、証明は省略する。

以上で、上で議論したすべての結果は出せた。よって、「スルツキー行列が対称かつ半負値定符号であれば u の存在が保証されている」ということはとりあえず頭からどけておくと、定理 1 で書かれたやり方で u の逆算ができることがわかったのである。

[*5] 実は u は上半連続性だけを仮定すればよい。

ここまでを、ふたつの定理としてまとめておこう。

定理２：u に対応する需要関数 f がワルラス法則を満たし連続だとする。このとき、E^x は凹関数であり、シェパードの補題

$$DE^x(p) = f(p, E^x(p))$$

を満たす。さらに $x = f(p, m)$ ならば $E^x(p) = m$ である。故に、特に f が連続微分可能であれば、そのスルツキー行列は対称かつ半負値定符号である。

定理３：定理 2 の仮定に加えて u が連続で、かつ f が上の（∗）の条件を満たしていたとする。このとき、すべての $x, y \in \Omega$ と $\bar{p} \gg 0$ に対して

$$u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow E^x(\bar{p}) \geq E^y(\bar{p})$$

である。よって特に定理 1 のように $u_{f,\bar{p}}$ を作ると、

$$u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow u_{f,\bar{p}}(x) \geq u_{f,\bar{p}}(y)$$

が成り立つ。

定理 3 の結果が重要であって、つまり我々は u を求める代わりに $u_{f,\bar{p}}$ を求めた。u 自身を求めることは不可能である。たとえば、コブ＝ダグラス型効用関数と次の関数

$$v(x) = \sum_i \alpha_i \log x_i$$

は同じ順序を与えることが知られている。したがって、どちらで (1) の問題を解いても同じ f が出てくる。そして f が同じである以上、$u_{f,\bar{p}}$ は同一である。u から始めても v から始めても同じ $u_{f,\bar{p}}$ が出てくるのだから、u か v かといった情報は失われてしまうのである――これは、効用の序数性と呼ばれる性質と関係があるが、ここでは深入りしないでおこう。

例１：さきほど述べた関数

$$f_i(p, m) = \frac{\alpha_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_i^{\frac{-1}{1-\rho}} m}{\sum_j \alpha_j^{\frac{1}{1-\rho}} p_j^{\frac{-\rho}{1-\rho}}}$$

から、定理 1 のやり方で $u_{f,\bar{p}}$ を求めてみよう。ただし、今回も $\bar{p} = (1, 1, ..., 1)$ ということにする。また $\Omega = \mathbb{R}^n_{++}$ にしておこう。

このとき、(5) の微分方程式は

$$\dot{c}=\frac{\sum_j \alpha_j^{\frac{1}{1-\rho}}(p_j+t(1-p_j))^{\frac{-1}{1-\rho}}(1-p_j)}{\sum_j \alpha_j^{\frac{1}{1-\rho}}(p_j+t(1-p_j))^{\frac{-\rho}{1-\rho}}}c,\ c(0)=m$$

という形になる。

とても解けない、と思っただろうか？　しかし実はよく見るとこれも

$$\dot{c}=a(t)c$$

という形であるため、

$$c(t)=c(0)e^{\int_0^t a(s)ds}$$

が解である。そして今回の場合の関数 $a(t)$ は

$$a(t)=\frac{\sum_j \alpha_j^{\frac{1}{1-\rho}}(p_j+t(1-p_j))^{\frac{-1}{1-\rho}}(1-p_j)}{\sum_j \alpha_j^{\frac{1}{1-\rho}}(p_j+t(1-p_j))^{\frac{-\rho}{1-\rho}}}$$

である。これの原始関数は

$$\frac{\rho-1}{\rho}\log\left(\sum_j \alpha_j^{\frac{1}{1-\rho}}(p_j+t(1-p_j))^{\frac{-\rho}{1-\rho}}\right)$$

であり、よってこれを代入すれば積分は簡単に解けて、

$$c(1)=mC\times\left(\sum_j \alpha_j^{\frac{1}{1-\rho}}p_j^{\frac{-\rho}{1-\rho}}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$

である。ただし $C>0$ はなんらかの定数である。

次に、$x\gg 0$ を取り、$x=f(p,m)$ となる p と m を探す必要がある。これも難しいように見えるが、実は今の場合、$f_i(p,m)$ の定義式の分母には i という文字が出てこず共通であるため、たまたまこの分母と m が一致した場合を考えると楽に解ける。実際、そうだとすると

$$x_i=\alpha_i^{\frac{1}{1-\rho}}p_i^{\frac{-1}{1-\rho}}$$

なので、両辺を $1-\rho$ 乗して整理すれば簡単に

$$p_i=\alpha_i x_i^{\rho-1}$$

がわかる。そして p_i がこれであるときに分母と一致するような m を求めれば、簡単に

$$m = \sum_j \alpha_j x_j^\rho$$

となる。あとはこれを上の $c(1)$ に代入すれば、

$$u_{f,\bar{p}}(x) = C \times (\alpha_1 x_1^\rho + ... + \alpha_n x_n^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$$

が出てきて、逆算に成功する。

・定理 1 の証明の概略

本質的には、Hurwicz and Uzawa (1971) の証明と同じである。彼らは、偏微分方程式

$$DE(q) = f(q, E(q)),\ E(p) = m \tag{7}$$

を考え、どんな (p, m) に対しても $\mathbb{R}^n_{++}$ 上で定義された (8) の解 E が存在する**とすれば**、定理 1 が正しいことを証明している。しかし一方で、彼らはスルツキー行列のふたつの条件だけからでは (8) の解 E が存在することがわからなかったため、f に**強い所得リプシッツ条件**と呼ばれる条件を追加して、無理やり問題を解いたことにしたのである。したがって彼らの定理には、この章の定理 1 には存在しない追加条件がついている。

であるからには、結局、定理 1 の証明は (8) の $\mathbb{R}^n_{++}$ 上で定義された解が存在することだけを示せばよいのである。ところが実はこの偏微分方程式の解の存在は Dieudonne (1960) の定理 10.9.4 の証明で事実上特徴付けられている。その結果によれば、f のスルツキー行列が常に対称であるとき、p を含む開凸集合 U 上で (8) の解が存在するための必要十分条件は、任意の $q \in U$ に対して、微分方程式

$$\dot{c} = f((1-t)p + tq, c) \cdot (q - p),\ c(0) = m \tag{8}$$

の $[0, 1]$ 区間上で定義された解が存在することである。さらにこのとき、(9) の解 c に対して、$c(1) = E(q)$ になる。

あとは (9) の $[0, 1]$ 区間全体上で定義された解が存在することを証明すればよい。このために我々は、解の**延長不能性** (nonextendability) についての議論を必要とする。ポントリャーギン『常微分方程式』の第 4 章によれば、第一種の問題の解の中で最も大きな区間で定義された解を延長不能解と呼ぶ。この延長不能解の定義域は必ず開集合であり、また右辺の定義域内の任意のコンパクト集合に対して、t が十分端に近づくと $c(t)$ はそのコンパクト集合から抜け出す、という性質がある。この性質を利用できる。

最後に、Kihlstrom, Mas-Colell, and Sonnenschein (1976) という非常に面白い論文からヒントを得た、ある結果がある。いま、(9) の解 $c(t)$ がえられているとし、ただし $t>0$ とする。$x=f(p,m)$ とし、$y=f((1-t)p+tq,c(t))$ とする。もし f のスルツキー行列が半負値定符号であるならば、必ず $p\cdot y\geq m$ かつ $q\cdot x\geq q\cdot y$ であることが示せるのである。この性質を使うことで、もし (9) の延長不能解の定義域が $[0,1]$ 区間を含んでいなかったとすると、その定義域の上限 t^* に下から収束する数列 (t_k) で、$c(t_k)\to 0$ となるものが存在することが示せる。そして、$x_k=f((1-t_k)p+t_kq,c(t_k))$ とすると、先ほどの結果から $q\cdot x_k\leq q\cdot x$ であり、よって (x_k) はコンパクト集合

$$\{y\in\mathbb{R}^n_+|q\cdot y\leq q\cdot x\}$$

内を動く点列である。よって必要あれば部分列を取って、$x_k\to x^*$ となる $x^*\in\mathbb{R}^n_+$ の存在を仮定してよい。$p\cdot x_k\geq m$ だったから $p\cdot x^*\geq m$ で、よって $x^*\neq 0$ であるが、このとき

$$0=\lim_{k\to\infty}c(t_k)=\lim_{k\to\infty}[(1-t_k)p+t_kq]\cdot x_k=[(1-t^*)p+t^*q]\cdot x^*>0$$

となって矛盾が生ずる。これで定理 1 が証明できる。

ちなみに、スルツキー行列には**階数条件** (rank condition) と呼ばれる条件がつくことがよくある。f が階数条件を満たすとは、そのスルツキー行列の階数が常に $n-1$ に等しいことを意味する。この条件と $\Omega=\mathbb{R}^n_{++}$ としたときの f の全射性があれば、$u_{f,\bar{p}}$ はなんと微分可能になることがわかっている。しかし逆が言えるかどうかは、まだよくわかっていない。

・練習問題

問題１：定理３の証明で省略した

$$u(z)\geq u(w)\Leftrightarrow E^x(\bar{p})\geq E^y(\bar{p})$$

を厳密に証明せよ。

問題２：コブ＝ダグラス型の需要関数のスルツキー行列を実際に計算し、それが対称かつ半負値定符号であることを示せ。ただし $n=2$ で、$\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2}$ を仮定してよい。

問題３：第４章の例２で示した間違った需要関数

$$f(p,m)=\left(\frac{p_1m}{p_1^2+p_2^2},\frac{p_2m}{p_1^2+p_2^2}\right)$$

についてスルツキー行列を計算し、それが対称ではあるが半負値定符号ではないことを確認せよ（したがって定理２より、これに対応する関数 u は存在しない）。