経済学のための数学：第 6 章

細矢祐誉

テーマ：効用最大化仮説のノンパラメトリック検定

微分方程式の応用というテーマから若干離れるが、消費者理論に深く突っ込んだついでに、計量経済学的な応用のある分野にもう一歩踏み込んでみよう。それは、効用最大化仮説の検定という分野である。

消費者の効用最大化問題をもう一度思いだそう。

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x) \\ \text{subject to.}\ & x \in \mathbb{R}^n_+, \\ & p\cdot x \le m \end{aligned} \tag{1}$$

これを解いて出てきたものが消費者の需要だというのが効用最大化仮説である。このモデルで説明できるためには、需要側がどういう性質を持っていなければならないかということを議論するのが今日の目標である。

古い理論では、需要関数 f がどういう性質を持っていれば対応する u が存在するかという観点から議論がなされた。たとえば、前回のスルツキー行列の半負値定符号性と対称性などがその一例である。しかしこれを判定するには需要関数の微分を計算しなければならない。微分を計算しなくていい条件としては顕示選好の強公理というものがあるが[*1]、こちらも需要関数自体は知っていないと議論を始められない。ところが現実に我々が手に入れられるのは需要関数ではなくて有限個の需要データに過ぎない。——この観点から理論を見直したのが Afriat (1967) である。

アフリアットの理論は根本的に有限個の需要データから出発して、それがどのような性質を持てばそれを説明できる u が存在するかという観点から作られている。ただしアフリアット自身の証明に問題があり、それは Varian (1982) によって修正された。今回紹介するのもその修正したバージョンのアフリアットの定理である。

ただし、ひとつこの議論をするに当たって注意が必要である。それは、u になにも仮定を置かないと、この問題は破綻するということである。実際、u が定数関数である場合、つまりどんな点も無差別である場合には、条件 $p\cdot x \le m$ を満たすすべての点が (1) の最大化問題の解になる。したがって上の問題は説明できてしまう。それでは意味がないため、我々は u について**局所非飽和** (locally nonsatiated) であることを要求する。つまり、

[*1] Mas-Colell, Whinston, and Green (1995) の 3.J 節を参照。

どの $x \in \mathbb{R}^n_+$ とどんな小さな半径 $r > 0$ に対しても、$\|x-y\| < r$ かつ $u(x) < u(y)$ となる y が存在することを仮定するのである。このとき、もし $p \cdot x < m$ ならば、$\|x-y\| < r$ となる y がすべて $p \cdot y < m$ となるように十分小さく $r > 0$ を取れば、$p \cdot y < m$ かつ $u(x) < u(y)$ となる y が存在することがわかり、よって x は (1) の解ではない。よって、x が (1) の解であるためには $p \cdot x = m$ が必要であることがわかる。これはこの文脈での**ワルラス法則**の形である。

これを踏まえて、需要データの定義を与えよう。これは有限個のデータ $(p_1, x_1), ..., (p_N, x_N)$ からなる集合 E で表現される。ただし、条件として $p_i \cdot x_i = 1$ を仮定する。上の考察から、これは所得 m が 1 であることを仮定していることになる。これはしかし、単に $p \cdot x \le m$ の代わりに $\frac{1}{m} p \cdot x \le 1$ を考え、$\frac{1}{m} p$ を改めて p と見なしているだけなので、分析に影響はまったくない。

用語を定義しよう。まず、E が u で**説明できる**とは、どの x_i も $p = p_i, m = 1$ に対応する (1) の問題の解となっていることを言う。そして、i, j に対して次の記号

$$D_{ij} = p_i \cdot x_j - 1$$

を定義する。おおざっぱに言うと、$D_{ij} < 0$ であるときは p_i という価格の下で x_j を買うことができ、にもかかわらず x_j はワルラス法則を満たさないので選ばれない。x_i は選ばれているので、x_j よりも x_i のほうがよいものであることがわかる。特に E を説明する局所非飽和な u が存在すれば $D_{ij} < 0$ はただちに $u(x_j) < u(x_i)$ を意味する。同様に $D_{ij} = 0$ のときも $u(x_j) \le u(x_i)$ は言えるが、この場合はちょうど等しくなる可能性が残されることに注意せよ。

さて、ここで以下の 5 つの「整合性」と名前のついた性質を定義する。

(1) 効用整合性：E はある局所非飽和な関数 u で説明できる。

(2) 循環整合性：$\{1, ..., N\}$ の任意の部分集合 $\{i_1, ..., i_M\}$ に対して

$$D_{i_1 i_2} \le 0, D_{i_2 i_3} \le 0, ..., D_{i_M i_1} \le 0 \Rightarrow D_{i_1 i_2} = D_{i_2 i_3} = ... = D_{i_M i_1} = 0$$

が成り立つ。

(3) 乗数整合性:ある正の数 $\lambda_1, ..., \lambda_N$ が存在して､$\{1, ..., N\}$ の任意の部分集合 $i_1, ..., i_M\}$ に対して

$$\lambda_{i_1} D_{i_1 i_2} + \lambda_{i_2} D_{i_2 i_3} + ... + \lambda_{i_M} D_{i_M i_1} \ge 0$$

が成り立つ。

(4) 水準整合性：正の数 $\lambda_1, ..., \lambda_N$ と実数 $u_1, ..., u_k$ が存在して、すべての i, j に対して

$$\lambda_i D_{ij} \ge u_j - u_i$$

が成り立つ。

(5) 正規整合性：E はある増加的で凹で連続な効用関数 u で説明できる。

アフリアットの主張は以下の通りである。

定理１：E について、(1) から (5) までの整合性はすべて同値である。

証明：本来の証明は (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (5) ⇒ (1) と進むのだが、しかしこの最初にアフリアットが作った証明は (2) ⇒ (3) の箇所が間違っている。そこで今回は

(I) (4) ⇒ (5) ⇒ (1) ⇒ (2)
(II) (4) ⇒ (3) ⇒ (2)
(III) (2) ⇒ (4)

の順で示していきたい。これらから定理が成り立つことは明らかである。

(I) の証明：まず、(4) を仮定する。$u_i(x) = u_i + \lambda_i(p_i \cdot x - 1)$ とし、$u(x) = \min_i u_i(x)$ とする。$u(x)$ が凹関数であることは簡単にわかるし、連続性もすぐにわかる。増加的であることも問題ない。ここで $u_i(x_i) = u_i$ は当たり前に成り立つ。また、(4) から $u_i(x_j) = u_i + \lambda_i D_{ij} \geq u_j$ であり、よって $u(x_j) = u_j$ である。さらに、$p_i \cdot x \leq 1$ ならば $u(x) \leq u_i(x) \leq u_i = u(x_i)$ なので、x_i は効用最大化の点であり、(5) が言える。

(5) が成り立てば当然 (1) は成り立つ。

(1) を仮定する。仮に

$$D_{i_1 i_2} \leq 0, D_{i_2 i_3} \leq 0, ..., D_{i_M i_1} \leq 0$$

が成り立ったとすれば、

$$u(x_{i_1}) \leq u(x_{i_2}) \leq ... \leq u(x_{i_M}) \leq u(x_{i_1})$$

なので、当然ながらすべてイコールになる。ここからただちに

$$D_{i_1 i_2} = D_{i_2 i_3} = ... = D_{i_M i_1} = 0$$

を得て、(2) が成り立つ。これで (I) の証明が終わった。

(II) の証明：(4) を仮定する。このとき、

$$\lambda_{i_1} D_{i_1 i_2} + \lambda_{i_2} D_{i_2 i_3} + ... + \lambda_{i_M} D_{i_M i_1} \geq u_{i_2} - u_{i_1} + u_{i_3} - u_{i_2} + ... + u_{i_M} - u_{i_1} = 0$$

となって、(3) が成り立つ。

(3) を仮定する。$D_{i_1i_2} \le 0, D_{i_2i_3} \le 0, ..., D_{i_Mi_1} \le 0$ が成り立つとき、

$$\lambda_{i_1}D_{i_1i_2} + \lambda_{i_2}D_{i_2i_3} + ... + \lambda_{i_M}D_{i_Mi_1} \ge 0$$

であるが、λ_j はすべて正だから、$D_{i_1i_2} = D_{i_2i_3} = ... = D_{i_Mi_1} = 0$ でないとこの不等式は成り立たない。よって (2) が成り立つ。これで (II) の証明が終わった。

(III) の証明：少し巧妙である。最初に、$i \gtrsim j$ という記号で、ある $i_1, ..., i_M$ が存在して、$i_1 = i, i_M = j$ で、$D_{i_ki_{k+1}} \le 0$ が常に成り立っていることとして定義する。このとき、$\gtrsim$ は順序のようなものである。特に、$J = \{i_1, ..., i_M\} \subset \{1, ..., N\}$ のときに、$\gtrsim$ という順序もどきには**極大元**が存在する、つまり J のどれかの j は、他のどの i に対しても、$j \gtrsim i$ か $i \not\gtrsim j$ のどちらかが成り立つことが証明できる（これはアルゴリズム的に簡単に示せる)。この順序を用いて、以下のアルゴリズムを構成する。

1. $I = \{1, ..., N\}, B = \emptyset$ と置く。2. に進む。
2. I 内の極大元を一つ取り、それを M と置く。3. に進む。
3. $E = \{i \in I | i \gtrsim M\}$ と置き、$B = \emptyset$ ならば $u_M = 1, \lambda_M = 1$ として 6. に飛ぶ。そうでなければ 4. に進む。
4. $u_M = \min_{i\in E}\min_{j\in B}\min\{u_j + \lambda_jD_{ji}, u_j\}$ とする。5. に進む。
5. $\lambda_M = \max_{i\in E}\max_{j\in B}\max\{\frac{u_j-u_M}{D_{ij}}, 1\}$ とする。6. に進む。
6. $i \in E$ について、すべて $\lambda_i = \lambda_M, u_i = u_M$ とする。7. に進む。
7. I を $I \setminus E$ で置き換え、B を $B \cup E$ で置き換える。このタイミングで I が空集合であればアルゴリズムは終了する。そうでなければ、2. に戻る。

このアルゴリズムが機能するためには、5. のところで D_{ij} が 0 にならない必要があるが、実は $D_{ij} > 0$ である。ここは受講者の演習とする。また、5. のところで $\lambda_M > 0$ になる必要もあるが、これも受講者の演習とする。

これが (4) を満たしていることを示すためには、場合分けをする必要がある。つまり、i, j を任意に取ったとき、3 つの場合が存在する。つまり、あるステップで $i \in B, j \in E$ となる場合、あるステップで $i \in E, j \in B$ となる場合、あるステップで $i, j \in E$ となる場合である。

最初の場合には、

$$u_j - u_i = u_M - u_i \le u_i + \lambda_iD_{ij} - u_i = \lambda_iD_{ij}$$

となって、当然のように主張が成り立つ。

二番目の場合には、$D_{ij} > 0$ なので、

$$\lambda_i = \lambda_M \geq \frac{u_j - u_i}{D_{ij}}$$

からただちに

$$\lambda_i D_{ij} \geq u_j - u_i$$

を得る。

最後の場合、$i \succsim j$ かつ $j \succsim i$ であることは簡単に示せるので、(2) の仮定から $D_{ij} \geq 0$ である。そして $u_i = u_j$ なので、確かに

$$\lambda_i D_{ij} \geq 0 = u_j - u_i$$

となって正しい。以上で証明が完成した。 ■