経済学のための数学：第 7 章

細矢祐誉

テーマ：微分方程式の局所・大域安定性について

正規形の常微分方程式

$$\dot{x} = f(t, x), x(t^*) = x^*$$

について、右辺の関数 f が実は t にまったく関係ないとき、つまり

$$\dot{x} = f(x), x(t^*) = x^* \tag{1}$$

と描けるとき、この方程式は自励系 (autonomous) の方程式であると言う。

経済学で出てくる微分方程式のかなり多くは、この自励系常微分方程式である。自励系常微分方程式にはいくつかの特徴があるが、その中のひとつは、**定常状態** (steady state) が定義できることである。x が (1) の定常状態であるとは、単に $f(x) = 0$ であることを指す。もし x^* が定常状態であれば、

$$x(t) \equiv x^*$$

という関数は (1) の解になる。もし f が連続微分可能であった場合には (1) は第一種の常微分方程式なので、解はこれ以外に存在せず、よって解はこの点から出発するとまったく動かない。

定常状態 x が**漸近安定** (asymptotically stable) であるとは、ある正の数 $r > 0$ が存在して、$\|x^* - x\| < r$ であるどんな初期点 x^* から出発した (1) の延長不能解も、$t \to \infty$ に従って x に収束することを言う[*1]。この $\|x^* - x\| < r$ という条件を取り除いてすべての x^* についてそれが言えるとき、x は**大域安定** (globally stable) であると言う[*2]。

本節ではこれ以降の分析の肝となる、漸近安定性および大域安定性のための十分条件を与える。定常状態 x の安定性分析は、リャプノフ関数を用いて行われる。

・複素数と指数関数

いままで複素数について一切述べなかったが、これ以降どうしても使わないといけない場所が出てくるので、軽く触れておこう。本質的には複素数とは、ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ にか

[*1] 当然ながら、この条件は延長不能解の定義域が $[t^*, +\infty[$ を含むことを暗黙のうちに要求している。

[*2] これ以外に単なる**安定** (stable) と呼ばれる条件もあるが、それはここでは扱わないことにする。

け算を定義してできるものである。ここでかけ算というのは、ベクトル x と y に対して xy という新しいベクトルを作る操作で、結合法則

$$(xy)z = x(yz)$$

と交換法則

$$xy = yx$$

と分配法則

$$x(y+z) = xy + xz, (x+y)z = xz + yz$$

を満たすものである。$\mathbb{R}^n$ には最初から足し算は定義できているが、これに加えてかけ算を上のように定義し、さらに乗法単位元 $e \neq 0$ の存在（つまり、すべてのベクトルについて $xe = x$ が成り立つベクトル e の存在）を仮定できるのは、$n = 1$ か $n = 2$ の時に限る。そして $n = 2$ で、かつ乗法単位元が $(1, 0)$ であるような構造のものを、我々は複素数と呼ぶわけである（ちなみに交換法則を諦めると、$n = 4$ の場合がありうる。これは四元数と呼ばれていて、コンピュータの画像処理でよく使われる）。

複素数のかけ算はとてもシンプルである。いま、$x = (x_1, x_2)$ というベクトルを仮に

$$x_1 + ix_2$$

という感じで、足し算の形に表したとする。そうして、$x = (x_1, x_2)$ と $y = (y_1, y_2)$ のかけ算を、

$$(x_1 + ix_2)(y_1 + iy_2) = (x_1y_1 - x_2y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

として定義する。するとこれが上の法則をすべて満たす。$x_2 = y_2 = 0$ のときは、$xy = x_1y_1$ であり、よって $(x_1, 0)$ という複素数と x_1 という実数は同一視してよい。したがって複素数は実質上実数を含む。$\mathbb{R}^2$ におけるベクトル x のノルム

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

は複素数としては単に $|x|$ と書かれ、絶対値と呼ばれる。$|xy| = |x||y|$ であることが証明できる。

特に、$i = 0 + i1 = (0, 1)$ と考えると、

$$i^2 = (0 + i1)(0 + i1) = 0 - 1 + i(0 + 0) = -1$$

となるので、$i = (0, 1)$ の自乗は $(-1, 0)$ であるということになる。この i は自乗することでマイナスの数になるという、実数ではあり得ない性質を持っており、虚数単位と言われている。

さて、そこでこの複素数 x について、e^x というのを定義しなければならない。これは、x が実数のときには、マクローリン級数

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

で表されるのだった。x が複素数のときには、逆に、右辺が e^x の定義と見なされる。こうすることで、

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

が成り立つことが証明できる（二項定理を使う）。特に、$x = x_1 + ix_2$ とすると、

$$e^x = e^{x_1} e^{ix_2}$$

である。ところで e^{ix_2} を上のマクローリン級数に代入すると、

$$\begin{aligned} e^{ix_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(ix_2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!}(-1)^n x_2^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n x_2^{2n+1} \\ &= \cos x_2 + i \sin x_2 \end{aligned}$$

となる。そこで特に、

$$|e^{ix_2}| = \sqrt{\cos^2 x_2 + \sin^2 x_2} = 1$$

であり、よって

$$|e^x| = e^{x_1}$$

ということがわかる。

・線形方程式の安定性

本題に入る前に、線形方程式

$$\dot{x} = Ax, x(t^*) = x^* \tag{2}$$

を考えよう。この線形方程式において、A が正則であれば定常状態は 0 のみである。この方程式で、0 が大域安定であるための必要十分条件は、A の固有値の実部がすべて負、という条件であることが知られている。

本当にそれを証明するのは若干難しいが、ここでは A の固有方程式

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

が重解を持たないという条件の下で、示すことにしよう。まず、このとき A は対角化可能である。つまり、ある行列 B が存在して、

$$A = B^{-1} A_0 B$$

と書ける。ただし A_0 は対角要素以外すべて 0 である行列で、その (i, i)-要素は固有値 λ_i である。そこで、これを使うと (2) は

$$\dot{x} = B^{-1} A_0 B x$$

または

$$B\dot{x} = A_0 B x$$

という風に変形できる。そこで $Bx = y$ と名前を変えると、(2) は

$$\dot{y} = A_0 y$$

を意味することになる。

固有値 λ_i は複素数なので、y も実数とは限らない。しかしこの方程式の解は非常に簡単に計算できる。なにしろ、A_0 の対角要素以外がすべて 0 なので、上は

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i$$

という極めて簡単な式になるからである。この解は

$$y_i(t) = y_i(0) e^{\lambda_i t}$$

であることが簡単にわかる。

以下、$y_i(0) \neq 0$ としよう。当然ながら、$t \to \infty$ のときに $x_i(t) \to 0$ となるための必要十分条件は $y_i(t) \to 0$ である。λ_i が実数であれば、$t \to \infty$ のときに $y_i(t) \to 0$ となるための必要十分条件は $\lambda_i < 0$ である。λ_i が複素数 $a_i + ib_i$ であるときには、$|e^{\lambda_i t}| = e^{a_i t}$ なので、やはり $y_i(t) \to 0$ となるための必要十分条件は $a_i < 0$ である。こうして我々は上で述べた条件に到達した。

特に、行列 B^{-1} に対して作用素ノルム

$$\|B^{-1}\| = \max\{\|B^{-1}x\| \| \|x\| = 1\}$$

を定義すると、

$$\|x(t)\| = \|B^{-1}y(t)\| \le \|B^{-1}\|\|y(t)\| \le n\|B^{-1}\|e^{at}$$

がわかる。ただし a は A の固有値の実部の最大の値である。

なお、これと対を成す差分方程式

$$x_{t+1} = Ax_t, x_0 = \bar{x}$$

についても言及しておこう。当然のことながら、$\bar{x} = 0$ であれば $x_t \equiv 0$ である。これもやはり（離散時間型の）定常状態と呼ばれる。$\bar{x} \neq 0$ が与えられたとき、$x_t \to 0$ となるための必要十分条件は固有値の絶対値が 1 より小さいことであることが知られている。

これも、固有方程式が重解を持たない場合、つまり

$$A = B^{-1}A_0B$$

と書ける場合について考えよう。すると、

$$x_t = B^{-1}A_0^tB\bar{x}$$

であり、よって

$$Bx_t = A_0^tB\bar{x}$$

である。したがって特に、$y_t = Bx_t$ とし、$\bar{y} = B\bar{x}$ とすれば、$y_{i,t} = \lambda_i^t\bar{y}_i$ である。したがって $y_{i,t} \to 0$ の必要十分条件は $|\lambda_i| < 1$ である。明らかに $y_t \to 0$ と $x_t \to 0$ は同値なので、この結果を得る。

連続時間と離散時間で条件がずいぶん違うように思えるが、これはいったいどうして起こるのだろうか？　このためには、後退オイラー法と呼ばれる微分方程式の近似解法について知る必要がある。いま、一般的に (1) の微分方程式を考え、これに対して次の差分方程式

$$x_0 = x^*, x_{t+1} = x_t + hf(x_t)$$

を考えよう。すると $h > 0$ が十分小さいとき、x_t は $x(t^* + th)$ を近似するということが知られている。したがって (1) の大域安定な（あるいは漸近安定な）定常状態があれば、十分 $h > 0$ が小さいときには上の差分方程式も同じ定常状態が大域安定に（あるいは漸近安定に）なるはずである。ところで (2) について考えれば、上の近似差分方程式は

$$x_{t+1} = (I_n + hA)x_t$$

になる。そこで、0 が大域安定であるための必要十分条件は、十分小さな h に対して、$I_n + hA$ の固有値の絶対値が 1 より小さいことである。ところが、λ_i が A の固有値であれば、

$$1 + h\lambda_i$$

は明らかに $I_n + hA$ の固有値である。従って、これの絶対値が 1 より小さいための必要十分条件は、λ_i が複素平面上で、$-\frac{1}{h}$ を中心とした半径 $\frac{1}{h}$ の球体に含まれることである。明らかに、十分小さな $h > 0$ に対してそれが成り立っている点の全体は、実部が負の複素数の全体と一致する。というわけで、やはり我々は上の結論を得るのである。

・リャプノフ関数

さて、(1) の微分方程式に戻ろう。f は $\mathbb{R}^n$ の領域 U から $\mathbb{R}^n$ への連続微分可能な関数とし[*3]、定常状態 $x^+ \in U$ を含む開集合 W 上で定義された連続微分可能な関数 $V : W \to \mathbb{R}$ を考える。この V が正定値、つまり、

$$V(x^+) = 0,$$

$$x \neq x^+ \Rightarrow V(x) > 0$$

の 2 条件を満たすとき、**リャプノフ候補関数** (Lyapunov candidate function) と呼ぶ。

リャプノフ候補関数 V に対して、

$$\dot{V}(x) = DV(x)f(x)$$

と定義する。簡単に言えば、$\dot{V}(x)$ は (1) の解 $x(t)$ と V の合成関数の、$x(t) = x$ である点での t についての微分である。リャプノフの定理は次に要約される。

定理１：あるリャプノフ候補関数 V に対して、

$$\dot{V}(x^+) = 0,$$

$$x \neq x^+ \Rightarrow \dot{V}(x) < 0$$

の 2 条件が成り立つならば、x^+ は漸近安定である。また、これに加えて V の定義域が U そのもので、また任意の $x \in U$ に対して、あるコンパクト集合 $C \subset U$ が存在して、x から出発した (1) の解が C から出ないならば、x^+ は大域安定である。

[*3] ここで**領域** (domain) とは連結な開集合を指す。

証明：まず、リャプノフ候補関数 $V : W \to \mathbb{R}$ が上の二条件を満たしているとし、$\bar{B}_r(x^+) = \{x \in W | \|x - x^+\| \le r\}$ が W に含まれるように十分小さく $r > 0$ を取る。このとき、$S_r(x^+) = \{x \in W | \|x - x^+\| = r\}$ はコンパクトなので、V はこの集合上で最小点 $\hat{x}$ を持つ。$V(\hat{x}) = a$ としよう。V の連続性から、$0 < r' < r$ となる r' を十分小さく取ると、$\|x - x^+\| < r'$ となるときには必ず $V(x) < a$ であるようにできる。このとき、$\|x^* - x^+\| < r'$ となる x^* を初期値とする (1) の延長不能解 $x(t)$ に対して、$V(x(t)) < a$ がすべての $t > t^*$ に対して成り立つ。もし $\|x(t) - x^+\| > r$ となる $t > t^*$ が存在したとすれば、中間値の定理から、$x(t) \in S_r(x^+)$ となる $t > t^*$ が存在することになるが、すると $V(x(t)) \ge a$ となってしまい矛盾が生じるのでこれはあり得ない。したがって $x(t)$ は $B_r(x^+)$ の内部にしかとどまれない。一般に (1) の延長不能解は、コンパクト集合から出ることができない場合は常に、$[t^*, +\infty[$ 上で定義できる。もしこれが x^+ に収束しないとすると、ある $\varepsilon > 0$ に対して、$t_k > t_{k-1} + 1$ かつ $\|x(t_k) - x^+\| \ge \varepsilon$ となる t_k が存在する。点列 $(x(t_k))$ はコンパクト集合 $B_r(x^+)$ 内を動くなので、必要ならば部分列を取ることで、$x(t_k) \to x^* \ne x^+$ となる $x^* \in B_r(x^+)$ の存在を仮定することができる。このとき、$x^* \ne x^+$ であるとすれば、$x(t^*) = x^*$ を初期条件とする (1) の延長不能解 $x^*(t)$ を考えると、$V(x^*(t^* + 1)) < V(x^*)$ である。常微分方程式の解の初期値についての連続性から、$x(t^*) = x(t_k)$ を初期値とする (1) の延長不能解 $x_k(t)$ を考えると、やはり十分大きな k については $V(x_k(t^* + 1)) < V(x^*)$ でなければならない。しかし容易に示せるように $x_k(t) = x(t_k + (t - t^*))$ なので、$x_k(t^* + 1) = x(t_k + 1)$ である。さらに $t_k + 1 < t_{k+1}$ なので、$V(x(t_{k+1})) < V(x^*)$ となり、$V(x(t_k)) \downarrow V(x^*)$ と矛盾が生じる。こうして x^+ は漸近安定であることが証明できた。

大域安定については上の $B_r(x^+)$ の代わりに C を用いて同様の議論をすればよいだけである。 ■

これを応用すると次のような定理が作れる。

定理２：f が二階連続微分可能であり、x^+ が (1) の定常状態であるとき、もし $Df(x^+)$ の固有値の実部がすべて負であったとすれば、x^+ は漸近安定である。

証明：最初に、$Df(x^+) = A$ と書くことにし、常微分方程式

$$\dot{x} = Ax,\ x(0) = \xi \tag{3}$$

を考える。この解を $\psi(t, \xi)$ と書くことにしよう。すると解の一意性定理から、$\psi_i(t) =$

$\psi(t, e_i)$ として（ただし e_i は第 i 単位ベクトル)、

$$\psi(t,\xi) = \sum_i \xi_i \psi_i(t)$$

である。そこで、

$$V(x) = \int_0^\infty \|\psi(\tau, x - x^+)\|^2 d\tau$$

と定義しよう。これが定義できるためには、すべての i, j について

$$b_{ij} = \int_0^\infty \psi_i(\tau)\cdot\psi_j(\tau) d\tau$$

が有限値であれば十分である。ところが、前節で示したように、A の固有値の実部がすべて負であるならば

$$\|\psi_i(t)\| \le r e^{-\alpha t}$$

を満たす $r, \alpha > 0$ が存在する。ここから上を示すのは非常に容易である。

$\mathbb{R}^n$ 全域で定義された (3) のリャプノフ候補関数であることは、A の固有値が 0 を含まない、したがって A が正則であることから容易にわかる。そしてさらに上の式から、

$$V(x) = (x - x^+)^T B (x - x^+)$$

となっている。ただし B の (i, j) 要素は上の b_{ij} に等しい。また、解の一意性から容易に $\psi(t, \psi(s, \xi)) = \psi(t + s, \xi)$ がわかるので、

$$\dot V(x) = \left.\frac{d}{dt} V(\psi(t, x - x^+))\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\int_t^\infty \|\psi(\tau, x - x^+)\|^2 d\tau\right|_{t=0} = -\|x - x^+\|^2$$

となるので、$\dot V(x^+) = 0$ であり、$x \ne x^+$ ならば $\dot V(x) < 0$ である。

以下、簡単化のために $x^+ = 0$ とし、$S_1(0) = \{x \mid \|x\| = 1\}$ 上での関数 $V(x)$ の最大値を ν と、最小値を μ と置く。するとすべての $x \in \mathbb{R}^n$ について

$$\mu\|x\|^2 \le V(x) \le \nu\|x\|^2$$

が成り立つ。よって特に、

$$|x_i| \le \sqrt{\frac{1}{\mu} V(x)}$$

である。また、上の評価を繰り返せば、

$$\dot V(x) = -\|x\|^2 \le -\frac{1}{\nu} V(x)$$

がわかる。

ここまでは $\dot{V}(x)$ は (3) の微分方程式で評価してきたが、ここからは (1) についての $\dot{V}(x)$ を評価しなければならない。最初に、テイラー=マクローリンの定理から、

$$f(x) = Ax + R(x)$$

である。ただし $R(x) = O(\|x\|^2)$ である。ここで、

$$\dot{V}(x) = DV(x)Ax + DV(x)R(x)$$

である。$DV(x)Ax$ は (3) の方程式についての $\dot{V}(x)$ と一致するので、

$$\dot{V}(x) \le -\frac{1}{\nu}V(x) + DV(x)R(x)$$

であることがわかる。一方、上で示したように $V(x) \le \nu\|x\|^2$ なので、十分小さく $b > 0$ を取れば、$\{x|V(x) \le b\}$ は f の定義域の内部に属する。剰余項 $R(x)$ は連続なので、この集合内で不等式

$$\|R(x)\| \le k\|x\|^2 \le \frac{k}{\mu}V(x)$$

を常に満たすような数 $k > 0$ が存在する。よってある正の数 q に対して、$V(x) \le b$ ならば

$$DV(x)R(x) \le qV(x)^{\frac{3}{2}}$$

が満たされる。そこで

$$c \le b, q\sqrt{c} \le \frac{1}{2\nu}$$

となるように $c > 0$ を取ると、$V(x) \le c$ ならば常に

$$\dot{V}(x) \le -\frac{1}{2\nu}V(x)$$

を満たす。よって V は定理 1 の漸近安定の条件を満たしており、これで証明が完成した。
■

・応用：超過需要関数の粗代替性と均衡の一意性

総需要から総供給を引いてできた関数

$$z(p)$$

を**超過需要関数** (excess demand function) と呼ぶ。この超過需要関数の値が 0 になるような価格 p を**競争均衡価格**と呼び、その点を実現する価格として見る、というのが一般均衡理論の基本的アイデアである。しかしこのアイデアは正しいか？　というときに、ワルラスが当初提唱したのが価格調整プロセスであった。つまり、需要が供給を上回れば価格は高くなり、逆に供給が需要を上回れば価格は低くなり、よって長期的には需要と供給は一致するだろうというのである。しかしこれは一次元の図で書くと明らかに見えるが、財の数が多いとそう簡単に議論できることではない。そこで Arrow, Block, and Hurwicz (1959) などが考えたのが

$$\dot{p} = z(p) \tag{4}$$

などをはじめとする価格調整の微分方程式だった。均衡はこの方程式の定常状態であるが、それは安定であるか？　それとも不安定であるか？　これについて分析した彼らは、均衡価格 p^* についての次の性質、

$$p^* \cdot z(p) > 0, \tag{5}$$

が成り立つという仮定の下で、均衡価格が**大域安定**になるということを発見した！　これはすごい結果である。なぜなら、大域安定な定常状態がひとつでもあるということは、定常状態はひとつしかないということだからである。

ただし、この議論を正確に行うために重要なことがひとつある。それは超過需要関数のゼロ次同次性である。実際、我々は需要関数を議論する際に、それは効用最大化問題

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x) \\ \text{subject to.}\ & x \ge 0, \\ & p \cdot x \le m \end{aligned}$$

の解として議論した。これが市場理論になると m のところに $p \cdot \omega + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j$ という項目が代入される（細かいことは省略）のだが、ここで p の代わりに ap を代入（ただし $a > 0$）しても、制約条件を満たす x の集合がなにも変わらないので、値も変わらない。生産者にも同じことが言えるため、結局、$z(p) = z(ap)$ が言えてしまうのである。とすると、p^* が均衡価格なら、ap^* も均衡価格だということになって、大域安定性という考え方に矛盾してしまう！

これを防ぐために、我々は市場理論で用いられるワルラス法則

$$p \cdot z(p) = 0$$

に着目する。これによると、$p(t)$ が (1) の解であれば、

$$\frac{d}{dt}\|p(t)\|^2 = 2p(t)\cdot z(p(t)) = 0$$

となるため、$p(t)$ のノルムは不変である。そこで最初から $\|p\| = 1$ であるところだけに議論を制限して考えれば、上の議論は問題なく示すことができる。

後は、実際に均衡が大域安定であることを示すだけである。ここでは簡単化のための仮定として、z が連続微分可能であるとする。このときにはリャプノフ候補関数として

$$V(p) = \|p - p^*\|^2$$

とするとよい。計算すると、$p \neq p^*$ ならば

$$\dot{V}(p) = 2(p - p^*)\cdot(z(p) - z(p^*)) < 0$$

となる。こうしてリャプノフ関数としての性質を V がほとんど持っていることがわかったのだが、ただ一つだけ問題があって、$p(0) = p$ としたときの解がコンパクト集合から外に出ないということだけが保証されていない。これは難しい問題で、微分方程式の滞留解 (viable solution) と呼ばれる議論が必要になる[*4]。細矢・虞 (2013) がこの問題に答えているので参照されたい。結論として我々は以下の定理を得る。

定理３：連続微分可能で (5) と強い境界条件[*5]を満たす超過需要関数に対する模索過程 (4) において、均衡価格は大域安定であり、したがってただひとつに定まる。

なお、均衡の存在についてはここでは述べない。たいていの教科書には存在証明が載っているからである。

[*4] 局所的に閉な集合 $H \subset \mathbb{R}^n$ と $x \in H$ に対して、Bouligand の接線錐

$$T_H(x) = \{v \in \mathbb{R}^n | \liminf_{\theta\downarrow 0} \frac{\inf\{\|x + \theta v - y| y \in H\}}{\theta} = 0\}$$

と定義する。このとき、$x_0 \in H$ としたときに微分方程式

$$\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$$

の解が十分 $t > 0$ が小さいときに H に含まれ続けるための十分条件は、$f(x) \in T_H(x)$ が常に成り立つことである。この結果を、ある種のコンパクト集合に用いることで結果を得る。

[*5] これは、$\mathbb{R}^n_{++}$ 上の点列 (p_k) が $\|p_k\| = 1$ であり、かつ $p_k \to p^* \notin \mathbb{R}^n_{++}$ で、$p^*_i = 0$ となる i の集合を I とするとき、

$$\max\{z_i(p_k)| i \in I\} \to \infty$$

となることを指す。経済学でよくある仮定の下でこの仮定は満たされる。

(5) については、いくつかの十分条件が知られている。たとえば、顕示選好の弱公理と言われる次の性質：

$$p \cdot z(q) \leq 0 \Rightarrow q \cdot z(p) > 0$$

がそのひとつである。顕示選好の弱公理は個人の合理性についての基準と見なされる。実際、もし経済に一人しか人がいなくて、企業もない場合には、

$$z(p) = f(p, p \cdot \omega) - \omega$$

と定義される。ただし f は普通の需要関数で、ω はこの個人の初期保有量である。このときには、顕示選好の弱公理はつまり、

$$x = f(p, m), y = f(q, w), p \cdot y \leq m \Rightarrow q \cdot x > w$$

という形式で書き直せる。これより強い、顕示選好の強公理というのがあって、こちらは f に対応する効用関数が存在することと同値になる。それより弱い条件がこの顕示選好の弱公理なので、経済に一人しか人がいない場合には z がこれを満たすのは当たり前である。ところが、複数人いる場合には話が変わってくるわけで、つまり粗代替性を仮定するということは、複数人が集まってもある程度合理的な個人と似た行動を取るという、多人数の合成を許可するような仮定だと言える。

この仮定は強いだろうか？　強いか弱いかについては大きく議論が分かれるところである。しかし、少なくとも一般的な競争均衡の枠組みで許容される仮定だけからでは、この性質は出てこないのである。ソンネンシャイン＝マンテル＝ドブリューの定理と言われる定理があって、通常の経済学的な仮定の下であらゆる連続関数が実質上経済の超過需要関数となり得ることが示されている。つまり、超過需要関数に弱公理を仮定することは、普通の仮定だけからは出てこないのである。これをどうにかすることは一般均衡理論に残された大きな課題である。

ちなみに、これとは別に超過需要関数の粗代替性と言われる条件もある。こちらは、$j \neq i$ のときに

$$\frac{\partial z^j}{\partial p_i}(p) > 0$$

であることを指している。簡単に言うと、i 財の価格が上がると i 財以外の財が買われるようになるという仮定である。この仮定は需要法則と関係している。