経済学のための数学：第８章

細矢祐誉

テーマ：オイラー方程式と横断性条件

今回は離散・連続時間マクロ動学の基礎を教える。標的となるのは離散型の問題

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(c_t) \\
\text{subject to. } & c_t + i_t = f(k_t), \\
& k_{t+1} = (1-d)k_t + i_t, \\
& k_t \ge 0 \text{ for all } t, \\
& k_0 = \bar{k} \text{ given,}
\end{aligned} \tag{1}
$$

と、連続型の問題

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c(t)) dt \\
\text{subject to. } & c(t) + i(t) = f(k(t)), \\
& \dot{k}(t) = i(t) - dk(t), \\
& k(t) \ge 0 \text{ for all } t, \\
& k_0 = \bar{k} \text{ given,}
\end{aligned} \tag{2}
$$

である。ここで c_t は消費、i_t は投資、k_t は資本ストックで、f は生産関数、そして d は資本減耗率である。離散型の問題では、時間選好率である δ は $0 < \delta < 1$ を満たすことが仮定される。連続型の問題では、$\rho > 0$ を仮定する。

まず、これらの問題では変数を減らすことが重要である。たとえば c_t と i_t の式を代入して整理すれば、離散型の問題は

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_t) + (1-d)k_t - k_{t+1}) \\
\text{subject to. } & k_0 = \bar{k} \text{ given,} \\
& k_t \ge 0 \text{ for all } t
\end{aligned} \tag{3}
$$

という形に整理してしまえる。同様に連続型の問題も、

$$\begin{aligned}
\max \quad & \int_0^\infty e^{-\rho t} u(f(k(t)) - dk(t) - \dot{k}(t))dt \\
\text{subject to. } & k_0 = \bar{k} \text{ given}, \\
& k(t) \geq 0 \text{ for all } t
\end{aligned} \tag{4}$$

としてしまえる。さらに離散型の問題で $f(k) + (1-d)k$ を改めて $f(k)$ と置き直せば d も消すことができて、

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{t=0}^\infty \delta^t u(f(k_t) - k_{t+1}) \\
\text{subject to. } & k_0 = \bar{k} \text{ given}, \\
& k_t \geq 0 \text{ for all } t
\end{aligned} \tag{5}$$

と、非常にシンプルになる。連続型の問題もまた $f(k)$ を $f(k) - dk$ で書き直せば

$$\begin{aligned}
\max \quad & \int_0^\infty e^{-\rho t} u(f(k(t)) - \dot{k}(t))dt \\
\text{subject to. } & k_0 = \bar{k} \text{ given}, \\
& k(t) \geq 0 \text{ for all } t
\end{aligned} \tag{6}$$

となり、ここまでシンプルにすれば、離散型は (k_t) という数列を選ぶ問題に、連続型は $k(t)$ という関数と、その微分にだけ依存する最適化問題（いわゆる変分問題）に変形し、非常に簡単な形になる。離散型の問題でも連続型の問題でも、制約条件を満たす (k_t) あるいは $k(t)$ は**実行可能**あるいは**許容可能**であると言われる。ただし、ここでは簡単化のために、連続型の問題では $k(t)$ が連続微分可能な時だけ実行可能だと呼ぶことにする（これを絶対連続に緩めて考える場合、難易度がかなり増加する)。

離散型の問題でも連続型の問題でも、解を特徴づけるのはオイラー方程式と横断性条件である、というのが経済学では半ば常識になっている。しかし、オイラー方程式は解の必要条件であることが比較的容易に示せるのに対して、横断性条件は解の必要条件であるかどうかが極めてあいまいである。一方で、凹問題についてはオイラー方程式＋横断性条件が解の十分条件であることが極めて容易に示すことができる。この話は連続型では位相図で説明されることが多いが、ここではあくまで、式だけで説明しきることにする。

なお、離散型でも連続型でも、通常 u と f は共に正の実数の領域 $\mathbb{R}_{++}$ 上で定義されて連続微分可能だと仮定される。$f(0)$ は通常 0 と仮定され、また $\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty$ がよく仮定される。同様に $\lim_{c\to 0} u'(c) = \infty$ も仮定されるが、$u(0)$ は存在しないことがある：これは、u の候補として $\log c$ などが使われる場合を含むためである。

・離散型と連続型の問題のオイラー方程式

離散型の問題において、いま (k_t^*) が解であり、かつ $k_t^* > 0$ および $c_t^* = f(k_t^*) - k_{t+1}^* > 0$ がすべての t で成り立っていたとする。このとき、

$$
\begin{aligned}
g(s) = &\sum_{t=0}^{T-2} \delta^t u(f(k_t^*) - k_{t+1}^*) \\
&+\delta^{T-1} u(f(k_{T-1}^*) - (k_T^* + s)) + \delta^T u(f(k_T^* + s) - k_{T+1}^*) \\
&+ \sum_{t=T+1}^{\infty} \delta^t u(f(k_t^*) - k_{t+1}^*)
\end{aligned}
$$

と定義すると、g は $s = 0$ で極大になっているはずである。そこでフェルマーの定理から、$g'(0) = 0$、つまり

$$u'(f(k_{T-1}^*) - k_T^*) = \delta u'(f(k_T^*) - k_{T+1}^*) f'(k_T^*)$$

が成り立つ。これを離散型のオイラー方程式と呼ぶ。

離散型のオイラー方程式は解の必要条件であり、またそれが成り立つための条件も $k_t^* > 0, c_t^* > 0$ と、あまり強く見えない。これは解の特徴付けの最も基本的な条件である。

一方で、連続型の問題ではこれよりかなり煩雑な議論が必要になる。先ほどと同様、連続微分可能な関数 $k^*(t)$ が解であり、かつ $k^*(t) > 0$ と $c^*(t) = f(k^*(t)) - \dot{k}^*(t) > 0$ が常に成り立っていたと仮定しよう。ここで $T > 0$ を十分大きく取り、$k(t)$ を、区間 $[0, T]$ 上で定義され、$k(0) = k(T) = 0$ が成り立ち、さらに $k'(T) = 0$ であるような、連続微分可能な任意の関数であるとする。そして、

$$g(s) = \int_0^T e^{-\rho t} u(f(k^*(t) + sk(t)) - \dot{k}^*(t) - s\dot{k}(t))dt + \int_T^{\infty} e^{-\rho t} u(c^*(t))dt$$

と定義すれば、やはり g は $s = 0$ で極大になるので、フェルマーの定理から $g'(0) = 0$ である。これにルベーグの優収束定理などを適用して $g'(0)$ を具体的に計算すると、

$$0 = g'(0) = \int_0^T e^{-\rho t} [u'(c^*(t)) f'(k^*(t)) k(t) - u'(c^*(t)) \dot{k}(t)] dt$$

を得る。よって

$$\int_0^T e^{-\rho t} u'(c^*(t)) \dot{k}(t) dt = \int_0^T e^{-\rho t} u'(c^*(t)) f'(k^*(t)) k(t) dt$$

である。

ここまでだとわかりにくいが、ここで右辺を部分積分して、

$$\int_0^T \left[\int_t^T u'(c^*(\tau))f'(k^*(\tau))e^{-\rho\tau}d\tau\right]\dot{k}(t)dt$$

と変形してから整理すると、

$$\int_0^T \left[e^{-\rho t}u'(c^*(t)) - \int_t^T e^{-\rho\tau}u'(c^*(\tau))f'(k^*(\tau))d\tau\right]\dot{k}(t)dt = 0$$

となる。ここで次の補題が必要になる。

補題 1 (DuBois-Reymond)：関数 $b(t)$ が区間 $[t_0, t_1]$ で連続であり、また $\int_{t_0}^{t_1} x(t)dt = 0$ および $x(t_1) = 0$ を満たすどんな連続関数 x に対しても

$$\int_{t_0}^{t_1} b(t)x(t)dt = 0$$

であったとすると、$b(t)$ は定数関数である。

証明：仮にそうでないとすれば、$b(\tau_1) \neq b(\tau_2)$ となる点 $\tau_1, \tau_2 \in]t_0, t_1[$ が存在する。どちらでも構わないので、$\tau_1 < \tau_2$ かつ $b(\tau_1) < b(\tau_2)$ であると仮定してしまおう。$\varepsilon > 0$ を十分小さく取り、$\Delta_i = [\tau_i - \varepsilon, \tau_i + \varepsilon]$ としたとき、$\Delta_i \subset]t_0, t_1[$ かつ $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ で、さらに $t_1 \in \Delta_1$ かつ $t_2 \in \Delta_2$ ならば $b(t_1) < b(t_2)$ であるようにする。そして

$$x(t) = \begin{cases} (-1)^i(t-\tau_i+\varepsilon)^2(t-\tau_i-\varepsilon)^2 & t \in \Delta_i, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

とする。このとき、

$$\begin{aligned} x(t_1) &= 0, \\ \int_{t_0}^{t_1} x(t)dt &= 0, \\ \int_{t_0}^{t_1} b(t)x(t)dt &= \int_{\Delta_1} b(t)x(t)dt + \int_{\Delta_2} b(t)x(t)dt \\ &\leq (\max_{t\in\Delta_1} b(t) - \min_{t\in\Delta_2} b(t)) \int_{\Delta_1} x(t)dt < 0, \end{aligned}$$

となって矛盾が生ずる。ただし二番目の不等号は積分法の平均値の定理による。 ■

このデュボワ＝レーモンの補題[*1]を用いることで、我々は

$$e^{-\rho t}u'(c^*(t)) - \int_t^T e^{-\rho\tau}u'(c^*(\tau))f'(k^*(\tau))d\tau \equiv c_0$$

となることがわかった。左辺第二項は t について微分可能なので、第一項も微分可能であり、よって我々は

$$\frac{d}{dt}(e^{-\rho t}u'(c^*(t))) = -e^{-\rho t}u'(c^*(t))f'(k^*(t))$$

という、もうひとつのオイラー方程式の形に到達することになる。

ここで、u が二階連続微分可能で $u''(c)$ が常に 0 以外ならば、逆関数定理から $c^*(t)$ も微分可能でなければならない。その場合には左辺を展開できて、

$$u''(c^*(t))\dot{c}^*(t) - \rho u'(c^*(t)) = -u'(c^*(t))f'(k^*(t))$$

というもう少し簡単な表現になる。u'' が 0 でないという仮定から整理すれば

$$\dot{c}^*(t) = \frac{[\rho - f'(k^*(t))]u'(c^*(t))}{u''(c^*(t))} \tag{7}$$

となって、きれいに常微分方程式の形になる。これと資本蓄積方程式

$$\dot{k}^*(t) = f(k^*(t)) - c^*(t) \tag{8}$$

を連立させた方程式系を図解したのが、マクロ経済学でよく出てくる位相図 (phase diagram) である。

オイラー方程式 (7) の右辺を見ると、u', u'' は共に 0 でないことが通常仮定されるので、そのときには $\dot{c}^*(t) = 0$ は $f'(k^*(t)) = \rho$ と同値である。したがって $\dot{c} = 0$ 線を位相図で書くと垂直線になる。一方で $\dot{k} = 0$ 線は山なりのカーブになるのが通常である。f は、本来は $f(k) - dk$ であったものを $f(k)$ と書き直したものであることを思い出そう。これによれば、f は必ずしも増加的ではないので、$\dot{k} = 0$ 線は k が増加しすぎると減少する。

$\dot{c} = 0$ 線と $\dot{k} = 0$ 線が交差する点を定常状態と呼ぶ。初期資本ストック k_0 から出発するこの微分方程式系 (7)(8) の解は、$c(0)$ がいくつであるかに応じて 3 つの経路を取るのが普通である。第一の経路は $c(0)$ が高すぎた場合で、この場合 k は途中までは増加するが途中から c が多すぎて減少に転じ、そして t が大きいところではこの方程式が定義され

[*1] ちなみに、本来この命題には $x(t_1) = 0$ という限定条件はないのだが、我々のためには必要である。これは本来この補題が有限時間の変分問題を解くために作られたのに対して、我々の問題は時間の区間が無限であるという違いに由来している。

ている集合 $\mathbb{R}^2_+$ をはみ出てしまう。このような解は、オイラー方程式の解として c,k が $[0,+\infty[$ 上で定義できていないので、これは解ではあり得ない。

次に $c(0)$ が小さすぎた場合は、k は単調に増加し、c はしばらくは増加するがしばらくすると減少に転じて、$\dot{k}=0$ 線と x 軸が交差する点に収束する。この場合デリケートな議論が必要であるが、たいていの場合はこのケースは解ではない。

最後に、$c(0)$ が大きすぎた場合と小さすぎた場合のちょうど中間の一点にあった場合は、この解は定常状態に単調に収束していく。この経路だけが通常、解である。したがって解はオイラー方程式に加えて、定常状態に収束するという性質で完全に特徴づけられる。

・凹問題の場合のオイラー方程式と横断性条件の十分性

以上が一般論だが、実際には経済学では u は増加的な凹関数で、また f も凹関数であることがたいていは仮定される。その場合、関数 $(x,y)\mapsto u(f(x)-y)$ は凹関数になり、したがって一次のテイラー近似の評価式

$$u(f(z)-w)-u(f(x)-y)\le u'(f(x)-y)f'(x)(z-x)-u'(f(x)-y)(w-y)$$

が成り立つことになる。これを使った場合、たとえば離散型の問題だったら、実行可能なオイラー方程式の解である数列 (k_t^*) と、やはり実行可能な任意の経路 (k_t) に対して

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{T}\delta^t u(f(k_t)-k_{t+1})-\sum_{t=0}^{T}\delta^t u(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)\\
&\le\sum_{t=0}^{T}\delta^t[u'(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)f'(k_t^*)(k_t-k_t^*)-u'(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)(k_{t+1}-k_{t+1}^*)]\\
&=\delta^T u'(c_T^*)(k_{T+1}^*-k_{T+1})\\
&\le\delta^T u'(c_T^*)k_{T+1}^*
\end{aligned}$$

が成り立つ。

最後の式である

$$\delta^T u'(c_T^*)k_{T+1}^*\to 0\ (\text{as } T\to\infty)$$

が成り立つことを、横断性条件と呼ぶ。横断性条件が成り立つとき、上の計算から[*2]

$$\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t u(f(k_t)-k_{t+1})\le\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t u(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)$$

[*2] 雑な議論。本来ならば収束するとは限らないので、ここで追加の議論が必要になる場合が多い。

が得られて、(k_t^*) が問題の解であることがわかる。つまり、オイラー方程式と横断性条件は問題の解であるための十分条件である。

次に連続型の問題を考えよう。ここでも同様に、$k^*(t)$ は実行可能でオイラー方程式を満たす関数、$k(t)$ は任意の実行可能関数として、部分積分公式から

$$\begin{aligned}
&\int_0^T e^{-\rho t}u(f(k(t))-\dot{k}(t))dt-\int_0^T e^{-\rho t}u(f(k^*(t))-\dot{k}^*(t))dt\\
&\le \int_0^T e^{-\rho t}u'(c^*(t))f'(k^*(t))(k(t)-k^*(t))dt-\int_0^T e^{-\rho t}u'(c^*(t))(\dot{k}(t)-\dot{k}^*(t))dt\\
&= e^{-\rho T}u'(c^*(T))(k^*(T)-k(T))\\
&\le e^{-\rho T}u'(c^*(T))k^*(T)
\end{aligned}$$

を得る。この最後の項が $T\to\infty$ のときに 0 に収束することを連続型の横断性条件と呼ぶ。これが成り立っていれば先ほどと同様に

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}u(f(k(t))-\dot{k}(t))dt \le \int_0^\infty e^{-\rho t}u(f(k^*(t))-\dot{k}^*(t))dt$$

が成り立ち、したがってやはり $k^*(t)$ という関数が問題の解になる。まとめると、離散型でも連続型でもオイラー方程式と横断性条件が問題の解であるための必要十分条件なのである。

しばしば位相図の解析で、定常状態におけるオイラー方程式 (7) と資本蓄積方程式 (8) の不安定性が問題になるのはこれに由来する。実際、オイラー方程式を満たすパスが正の領域の定常状態に収束するならば、横断性条件を満たすことは容易にわかる。そこで、そのようなパスが複数あったとすると、それは問題の解が複数あることを意味し、動学マクロモデルにおける解の不決定性問題を含意する。

上のモデルはシンプルなので、いまのような解の不決定性問題は起こらない。しかし、モデルを少し変形して、たとえば定常状態でのヤコビ行列の固有値の実部がすべて負になるようにすれば、そのモデルではオイラー方程式と横断性条件を満たすパスが複数出てくるので、複数の解が存在することになり、不決定性が生じる。これが多くのマクロ経済学の教科書に載っている位相図の、文章での解説である。

・ベルマン方程式

以下、離散型のモデルを考えよう。$k_0=\bar{k}$ に対応する実行可能な (k_t) をすべて集めて

できた集合を $\Pi(\bar{k})$ と書くことにし、これに対応する目的関数

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(c_t)$$

の上限を $V(\bar{k})$ と置く[*3]。この関数 V は問題 (5) の**価値関数** (value function) と呼ばれる。

ここでは簡単化のために、$V(\bar{k})$ が $+\infty$ でなかったときを考えよう。$V(\bar{k})$ の定義から、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_t) - k_{t+1}) \geq V(\bar{k}) - \varepsilon$$

であるような実行可能経路 (k_t) が存在する。このとき、

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_t) - k_{t+1}) = u(f(\bar{k}) - k_1) + \delta \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_{t+1}) - k_{t+2}) \leq u(f(\bar{k}) - k_1) + \delta V(k_1)$$

である。したがって

$$V(\bar{k}) - \varepsilon \leq \sup\{u(f(\bar{k}) - k) + \delta V(k) | 0 \leq k \leq f(\bar{k})\}$$

が成り立つが、$\varepsilon > 0$ は任意だったので、

$$V(\bar{k}) \leq \sup\{u(f(\bar{k}) - k) + \delta V(k) | 0 \leq k \leq f(\bar{k})\}$$

である。一方で、$0 \leq k \leq f(\bar{k})$ となる k を固定し、$k_0 = k$ を満たす任意の実行可能経路 (k_t) について考え、$k_0^+ = \bar{k}, k_{t+1}^+ = k_t$ と定義すると、(k_t^+) は $k_0 = \bar{k}$ の下で実行可能で、

$$V(\bar{k}) \geq \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_t^+) - k_{t+1}^+) = u(f(\bar{k}) - k) + \delta \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_t) - k_{t+1})$$

を満たす。これを $(k_t) \in \Pi(k)$ について右辺の上限を取ると、

$$V(\bar{k}) \geq u(f(\bar{k}) - k) + \delta V(k)$$

が成り立つ。さらに k について上限を取ることで、

$$V(\bar{k}) \geq \sup\{u(f(\bar{k}) - k) + \delta V(k) | 0 \leq k \leq \bar{k}\}$$

[*3] u や f に仮定がないとこの無限和が定義できない場合があるが、そのようなケースは仮定を置いて除外するのが通例なので、以下の文章はその問題は考えないことにして読んでもらいたい。

がわかる。上に出てきた関係をすべて合わせて、

$$V(\bar{k}) = \sup\{u(f(\bar{k}) - k) + \delta V(k) | 0 \le k \le \bar{k}\} \tag{9}$$

であることがわかった。

(9) 式を**ベルマン方程式** (Bellman equation) と言う。右辺の sup は最大化問題だと考えることができて、その一階の条件は

$$\delta V'(k) - u'(f(\bar{k}) - k) = 0$$

である。ここで価値関数 V は微分可能なのかという疑問を抱いた受講者がいるかもしれないが、これは Benveniste and Scheinkman (1979) という論文が解決していて、上の一階条件の解になる $k = p(\bar{k})$ が存在するとしたら、実は

$$V'(\bar{k}) = u'(f(\bar{k}) - p(\bar{k}))f'(\bar{k})$$

が成り立つことが知られている。そこで上に当てはめると、

$$\delta u'(f(k) - p(k))f'(k) = u'(f(\bar{k}) - p(\bar{k}))$$

がわかる。

この式がオイラー方程式とものすごく似ているということに受講者諸君は気づくべきである。実際、$\bar{k}$ の代わりに k_{t-1} を入れ、$p(\bar{k}) = k$ の代わりに k_t を入れ、$p(k)$ の代わりに k_{t+1} を入れると、これはオイラー方程式に一致する。そこで問題になるのはこの関数 p である。これは**政策関数** (policy function) と呼ばれる。

もし、$k_0 = k$ に対するベルマン方程式の右辺の最大化問題がすべてただひとつの解 $p(k)$ を持っているとすれば、$k_{t+1} = p(k_t)$ で定義された数列 (k_t) は、なんと元の問題の解になることが知られている（証明は Stokey and Lucas (1989) の第 4 章を参照)。こうして、元の問題を解く作業は、V と p を求める作業に帰着されることがわかったのである。

ところで、関数に対して関数を返す次の作用素

$$B(V(\cdot))(k) = \sup\{u(f(k) - k') + \delta V(k') | 0 \le k' \le f(k)\}$$

を考えよう。(9) 式から、価値関数はこの作用素 B の不動点であることがわかる。素晴らしい結果として、u が有界関数で、f が狭義の凹関数で、かつ $f(k) = k$ となる $k > 0$ が存在する場合には、B が縮小的になることが知られている。以下、それを証明しよう。まず基礎となるのは次の結果である[*4]。

[*4] なお、V が連続関数であれば $B(V(\cdot))$ も連続関数であることが、u と f についてのさほど強くない仮定から言える。これはベルジュの定理による。

補題2 (Blackwell の条件)：作用素 T は有界な連続関数の空間 $X = C^b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ から同じ空間への写像とし、次の 2 つの条件が成り立っていたとする[*5]：

1) $f, g \in X$ かつ $f(x) \le g(x)$ がすべての $x \in \mathbb{R}_+$ について成り立てば、$Tf(x) \le Tg(x)$ がすべての $x \in \mathbb{R}_+$ について成り立つ。
2) ある $\delta \in]0, 1[$ が存在して、$a \ge 0$ とすると、$T(f + a)(x) \le Tf(x) + \delta a$ が成り立つ。

このとき、T は距離

$$\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)||x \in \mathbb{R}_+\}$$

の下での縮小写像である。

証明：ρ の定義から、任意の $f, g \in X$ に対して

$$f(x) \le g(x) + \rho(f, g)$$

であるから、

$$Tf(x) \le Tg(x) + \delta\rho(f, g)$$

が成り立つ。f と g を引っ繰り返せば

$$Tg(x) \le Tf(x) + \delta\rho(f, g)$$

が成り立ち、合わせて

$$|Tf(x) - Tg(x)| \le \delta\rho(f, g)$$

なので、左辺の上限を取って

$$\rho(Tf, Tg) \le \delta\rho(f, g)$$

である。 ■

こうして、ベルマン作用素は上の補題から縮小写像であることがわかるので、$V_0(x) \equiv 0$ あたりからスタートして、$V_{n+1} = BV_n$ として関数の列 (V_n) を作ると、これは価値関数 V に一様収束する。これは価値関数のコンピュータによる近似計算法を与えている。

ただし、u が有界という条件が想像以上に重いことだけには注意が必要である。応用上は $u(c) = \log c$ などがしばしば使われるが、これに対する価値関数が上の B の繰り返し適用で求まるかどうかはまったく未知であり、理論的に大きな課題として依然残り続けている。

[*5] なお、以下 $T(f(\cdot))$ という書き方がくどいので、Tf と略記する。

最後に、連続型の問題では同様にハミルトン＝ヤコビ＝ベルマン方程式というものが議論されるのだが、こちらは離散型ほど使いやすい応用が知られているわけではない。

・離散型問題の政策関数からの目的関数の逆算について

最後に、政策関数 p と f から δ と u を逆算する方法について述べておきたい。まず、u と f は前と同様、$\mathbb{R}_{++}$ 上連続微分可能で増加的かつ狭義凹、さらに f は $f(0)=0$ を満たし 0 で連続、$\lim_{k\downarrow 0} f'(k)=\infty$ かつ $\lim_{k\to\infty} f'(k)<1$、$\lim_{c\downarrow 0} u'(c)=\infty$ とする。このくらいの仮定の下で、問題 (5) の政策関数については次の 6 つの条件が成り立つことが証明できる：

(i) p は連続で増加的であり、$k>0$ ならば $0<p(k)<f(k)$ である。

(ii) $p(k^*)=k^*$ となる $k^*>0$ がただひとつだけ存在する。

(iii) $p^1(k)=k, p^n(k)=p(p^{n-1}(k))$ とするとき、任意の k について $\lim_{n\to\infty} p^n(k)=k^*$ である。

(iv) $f'(k^*)=\delta^{-1}>1$ である。

(v) $c(k)=f(k)-p(k)$ も連続で増加的である。

(vi) 次の無限積

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{f'(p^n(k))}{f'(k^*)}$$

はすべての k について収束し、連続な減少関数である。

そしてさらに、$c^*=f(k^*)-k^*$ とすると、

$$u(c)=u(c^*)+u'(c^*)\int_{c^*}^{c}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{f'(p^n(c^{-1}(x)))}{f'(k^*)}dx \tag{10}$$

が成り立つ。

実は逆が言えて、上の条件を満たすどんな f と、(i)-(vi) を満たすどんな p に対しても、$f'(k^*)=\delta^{-1}$ となるように δ を決め、$u(c)$ を (10) 式が成り立つように決めると、p はこの δ と f と u からなる問題 (5) の政策関数になる。かくして、政策関数から好みを逆算するという問題が解決できるのである。

例：$f(k)=\sqrt{k}, p(k)=0.4\sqrt{k}$ とする。このとき、p が (i)-(v) を満たすことは容易に示せる。ただし $k^*=0.16$ である。証明はしないが、(i)-(v) を満たす任意の p については、

$p'(k^*) < 1$ ならば (vi) が成り立つことが示せるので、計算してみると $p'(k^*) = 0.5 < 1$ であり、よって (vi) も満たされる。

$f'(k^*) = 1.25$ なので $\delta = 0.8$ である。

$c^* = 0.24$ であり、また $c(k) = 0.6\sqrt{k}$ なので、$c^{-1}(x) = (0.6)^{-2}x^2$ である。また $p^n(k) = (0.4)^{2(1-(0.5)^n)}k^{\frac{1}{2^n}}$ であるから、$f'(k) = (0.5)k^{-\frac{1}{2}}$ と合わせて、

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{f'(p^n(c^{-1}(x)))}{f'(k^*)} = C_N \times x^{\sum_{n=1}^{N} -\frac{1}{2^n}}$$

である。したがって $N \to \infty$ として、

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{f'(p^n(c^{-1}(x)))}{f'(k^*)} = C \times x^{-1}$$

となり、これの原始関数が u であるから、$u(c^*)$ と $u'(c^*)$ を適当に合わせれば、

$$u(c) = \log c$$

が役割を果たす。

・練習問題

問 1 ：上の例の、$f(k) = k^a$ かつ $p(k) = bk^a$ であるときを考える。(i)-(vi) が満たされるのは a, b がどのような数である場合か？　また、そのとき δ と u はどんな形になるか？