経済数学（法政用）: 第 1 章

細矢祐誉

テーマ：講義の目標について

・本講義の目標

本講義では、経済学で用いる数学を使った本を独力で読める程度の数学力を目標とし、その養成に当たるものである。

経済学では学部レベルでも数学を多用するが、大学院レベルになるとその傾向は激化し、数学がわからないから読めない、という言い訳が一切効かない状況になっている。たとえば、初歩の IS-LM を勉強し、なんとなくマクロ経済学を理解した気になった学生が大学院に進んで、まずいきなりぶち当たるのが以下のような問題である。

$$\begin{aligned} \max \quad & \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t)) dt, \\ \text{subject to. } & \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t), \\ & k(t), c(t) \geq 0, \\ & k(0) = \bar{k}. \end{aligned}$$

当然のように、こんなものをいきなり出されて理解できる学生は少数である。しかし少数だからといって先生は容赦しないし、助けを求めて参考書に頼った場合、やはりこの問題が書かれているものにぶち当たる。

マクロ経済学を諦めてミクロ経済学に行っても状況は改善しない。こちらはマクロ経済学ほど派手に使う道具がジャンプアップはしないが、たとえば限界代替率の計算公式などを見てミクロ経済学を理解した気になった学生が大学院でまず出会うのは、ベルジュの定理を用いた需要関数の連続性の証明とか、角谷の不動点定理を用いたナッシュ均衡の存在証明などである。こちらも参考書を頼ろうにもほとんど当てになるものがない。

本講義の目的は、この状況を少しでも改善することであると言っていい。といっても、それはこれらの理論を親切に解説したり、あるいは回避する手段を提供することではない。これらの理論についていける数学力を身につけ、力押しで突破するための場だと思ってもらいたい。実際、これ以外の回避策は経済学の大学院においてはほとんどない。そのために身につけなければならない技術は莫大なので、最初から猛スピードで必要部分だけを取捨選択して解説することになる。受講者は適宜、講義では埋まっていない論理の穴を埋める努力をする必要があることを注記しておく。

・最適化理論

さて、経済学で使われる数学は多岐に渡るが、その過半数の部分は最適化理論と統計学で占められると考えてよい。統計学は専門の講義に任せることにし、本講義では最適化理論の基礎を固めることを主目的として考えることにする。

いま、次のような問題を考えよう。

「x がある条件を満たす下で、関数 f の値 $f(x)$ が最大（あるいは最小）になるような x を見つけなさい」

上のような形式の問題を最大化、あるいは最小化問題と言う。最適化理論とは、上のような問題を的確に解くための理論体系である。経済学で言えば、消費者理論における効用最大化や生産者理論における利潤最大化、費用最小化などが具体例に当たる。

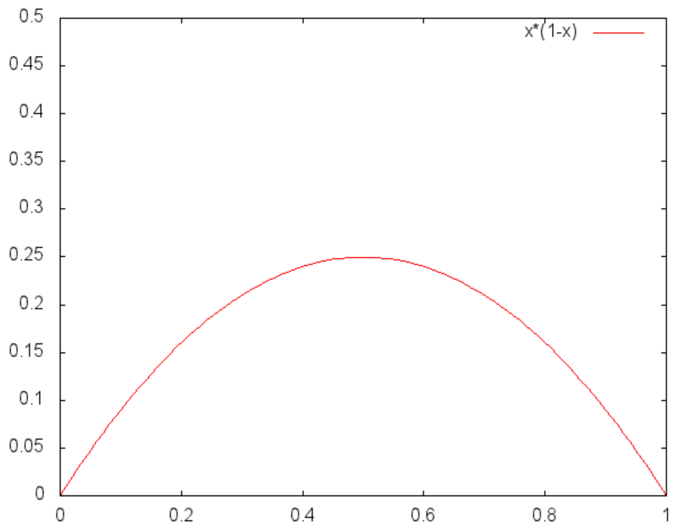

図１　最大化のイメージ

具体例として、「$0 \leq x \leq 1$ という条件で $f(x) = x(1-x)$ という関数を最大にする x を探しなさい」という問題を考えてみよう。図 1 は、$f(x) = x(1-x)$ という関数のグラフを $0 \leq x \leq 1$ の範囲で書いたものである。この図で書かれた関数の値が最大になっている点を探すのが最適化理論の目標であるのだが、図を見ればそれは $x = 0.5$ だと一目でわかる。このように、最適化理論の目標は図として書いてしまえば目標を達成できる場合も多い。しかし、これはあくまで簡単なケースに限られ、また、あまり精密な議論を行うことができないため、手計算で解けるテクニックもまた必要になってくる。

ところで、上の例題の最大になっている点のところで、グラフに接線を引いてみよう。

図 2 を見るとわかるように、最大点での接線は水平線である。これは決して偶然ではな

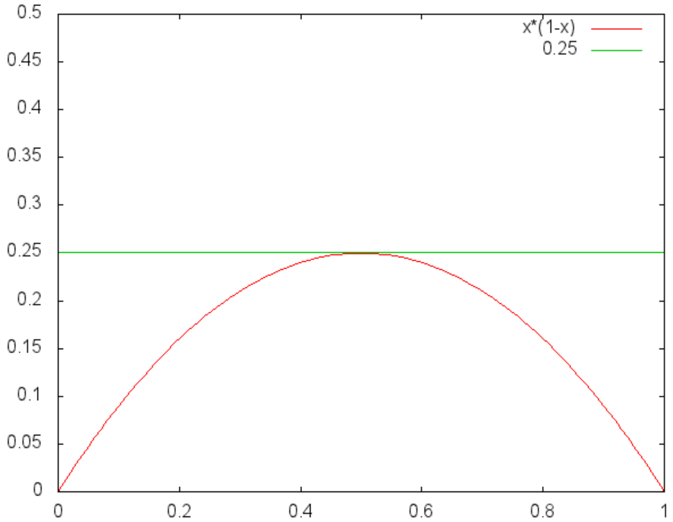

図 2　最大点での接線

く、一般に最大点、最小点では、接線が水平線になるという特徴が必ず出てくる。

数学でグラフの接線の傾きを求めるのは微分法によって行われる。一方、水平線は傾きがゼロの直線のことを言う。ということは、最大化や最小化がなされている点では微分の値が 0 になっている、という特徴がここからわかることになる。これは重要な特徴である。

多くの最適化の問題は、微分して 0 になる点を求めるだけで機械的に答えが求まってしまうことが知られている。上の例、$f(x) = x(1-x)$ で言えば、微分法を知っている生徒は $f'(x) = 1 - 2x$ ということを知っているだろう。よって、$f'(x) = 0$ は $x = 0.5$ を意味する。この $x = 0.5$ が最適化問題の答えであることは上で指摘した通りである。

経済学において、このやり方はとても重要であるため、多くの学部生向けの参考書にはこういう計算の仕方がたくさん載っている。たとえば、単一資源からなる生産問題を考えてみよう。いま、x は材料の投入量だとして、その投入量に対する産出量が $f(x)$ であったとする。算出された財の価格を p とし、材料の価格を q とすると、利潤は

$$pf(x) - qx$$

になる。よって最大化問題

$$\max pf(x) - qx$$

を得る。すると上の考察から、最適点では微分が 0、つまり

$$pf'(x) = q$$

でなければならない。たとえば $f(x)=\sqrt{x}$ だったりした場合には、ここからただちに

$$x=\frac{p^2}{4q^2}$$

という一般公式を得ることができる。

これは素晴らしい。ということで今度は複数の種類の材料があった場合を考えてみよう。つまり $f(x,y)$ が産出量である。すると

$$\max pf(x,y)-qx-ry$$

である。たとえば $f(x,y)=\sqrt{x+y}$ として、$p=q=1, r=2$ のときに当てはめると、

$$\max \sqrt{x+y}-x-2y$$

となる。どうせこれも x と y でそれぞれ微分して 0 になるところが解だろう、と思って、それぞれ微分して 0 と置く。すると[*1]

$$\frac{1}{2\sqrt{x+y}}-1=0,$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x+y}}-2=0,$$

というふたつの式を得ることになる。これを整理すると、

$$1=2$$

という、意味がわからない式が出てくる。これはなにが起こっているのだろうか？

このような問題に遭遇した際に対処する一般的解法は知られていない。いまわかっているのは、微分が 0 になるという上の（多くの経済学のテキストで詳細に解説されている）計算法は、どこかおかしいということだ。しかしどこがおかしいのだろうか？　生産理論の用語を使えば、上の生産関数 $f(x,y)=\sqrt{x+y}$ は規模に関して収穫逓減である。つまり、普通のミクロ経済学の期末試験の問題で仮定されるようなことは、ほぼ問題なく満たされている。にもかかわらず解けない。ミクロ経済学の用語で言うとこのケースでは等量曲線が直線であることが本質的な問題なのだが、その話はひとまず置いておく。こういった諸々のケースに対処するためには、専門家として、微分が 0 になるという「条件」が、

[*1] このへんの計算法は後々きちんと解説するので、いま計算ができないことは気にしなくてよい。こんな感じの問題がある、というつもりで見て欲しい。

どのくらい一般論で成り立ち、どういうときには成り立たないのかを、きちんと整理しておかなければならないのである。

本講義ではまず、どのような関数が考察の対象になるのかを知るために、関数のさまざまな形について学んでいく。次に、微分法について学び、具体的な関数が与えられた際に、微分を行う方法について詳しく述べる。これらが終わったらいよいよ最適化である。最適化では、微分を計算するだけではなく、微分したら 0 になる点を計算するためのさまざまな手法を知っていなければならない。それについても詳述する。

春学期の講義において、通常の関数の最適化問題の解き方についてはほぼ解説を終える。秋学期には、より進んだ問題、たとえば確率や積分、不動点定理などの解説に取り組むことになる。