経済数学（法政用）: 第１２章

細矢祐誉

テーマ：積分とその計算法

・積分論

まず、積分という概念の歴史について話しておかなければならない。この概念は、ニュートンの時代には存在しており、それからだんだんと発展していったが、時代が下るにつれて知られていたはずの定理に「例外」が見つかるようになり、それらのおかしな例外を排除するために「どういう関数が積分できるのか」「なにを積分と呼ぶのか」について、明確にしなければならないという要請があった。それに応えるためにリーマンが１９世紀後半に作ったのが「リーマン積分可能」という概念である。

しかしこの概念はあまりにも「積分可能」というのに必要な要件がきつすぎて、応用上大きな問題があった。特に重要なこととしては、収束定理についてかなりの制約があったことである。収束定理というのは、「関数の列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に（なんらかの意味で）収束しているならば、○○の条件の下で、f_n の積分は f の積分に収束する」という形の定理である。○○になにが入るかによって様々なタイプの収束定理があり、有名なものだけでも上限収束定理、単調収束定理、優収束定理など様々である。これらはどれも、多くの積分を圧倒的に簡単にしてしまう破壊力がある定理なのだが、困ったことにリーマン積分の理論では○○の条件をものすごく強くしないと出てこない。これは困るので、２０世紀の頭にルベーグを始めとする数学者たちが作り上げたのが、現代の積分理論である。

微分可能な関数は連続である。一方で、連続な関数はリーマン積分可能であるという定理がある。そしてリーマン積分可能な関数はルベーグ積分可能である。これらの関係は、逆方向には決して成り立たない。連続ではあるが微分可能でない関数、リーマン積分可能だが連続でない関数、ルベーグ積分可能だがリーマン積分可能でない関数にはそれぞれ有名な例がある。

この授業では、リーマン積分について扱う。ルベーグ積分は、一度覚えてしまえば便利で使いやすいのだが、覚えるまでにすさまじい量の知識を頭にたたき込まなければならないという致命的な欠陥がある。連続な関数や、有限個の点を除いて連続な関数（区分的に連続な関数、と言う）はすべて、リーマン積分可能である。

・リーマン和

さて、関数 f を考え、面倒でないように $f(x) \geq 0$ が常に成り立つとしよう。$a < b$ としたとき、a から b までの間の関数 f のグラフを書き、これと x 軸に挟まれた図形の面積を求めたい。

しかしこれは容易ではない。なんとか可能なのは $f(x)$ が直線 $cx + d$ である場合である。このとき、上の図形は横倒しにした台形になり、その上底と下底の長さは $f(a) = ca + d, f(b) = cb + d$ という形でわかる。高さは $b - a$ なので、この面積は

$$(\frac{c(a+b)}{2} + d)(b - a)$$

という形で、小学校の台形の面積公式からわかってしまう。特に $c = 0$ の場合、つまり $f(x) = d$ という定数関数に関しては、この図形は長方形になる——結果、面積は底辺×高さであり、底辺は $(b - a)$、高さは d なので、$d(b - a)$ が面積である。

こうして $f(x)$ が直線の場合だけはうまくいくのだが、$f(x) = x^2$ などと曲線になった途端に問題の難易度は跳ね上がる。これをどうにかしようというのが今回の趣旨である。

その際にまず考えるのが、この図形を「棒グラフ」で近似することである。具体的に言うと、まず a から b までをいくつかの分点で分割する。つまり、$a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b$ となる t_0 から t_n までの数字を用意する。この数字の集まりのことを「分割」と言い、簡単のために Δ と書こう。主要な論点は、この分割の分点 t_i と t_{i-1} の間の区間ごとに棒グラフを立てて、それで上の図形の面積の近似値を求めてみたい、ということである。

無論、そのためには棒グラフの高さはある意味で「適切」でなければならない。具体的に言うと、$t_{i-1} \leq s_i \leq t_i$ となる s_i に対して、$f(s_i)$ と一致するような高さでなければならないのである。つまるところ棒グラフの上の端は、f のグラフと同じくらいの高さになければならない。こうした s_i を $i = 1, ..., n$ についてすべて決めてやれば、この棒グラフの面積の合計は簡単に計算できる。t_{i-1} から t_i までの間で立っている棒グラフの底辺の長さは $t_i - t_{i-1}$、高さは $f(s_i)$ なのだから、その面積は

$$f(s_i)(t_i - t_{i-1})$$

であるはずである。そこでこの和、つまり

$$f(s_1)(t_1 - t_0) + ... + f(s_n)(t_n - t_{n-1})$$

を、a から b までの分割 Δ と $s_1, ..., s_n$ に対応する f の**リーマン和**と呼び、$R(f, a, b, \Delta, s)$ と書こう。

　リーマン和は、考えている図形の面積の近似値である。近似であると言うからには、分割が細かくなっていけばいくほど、本来考えている図形の面積に近づいていくことになる。そこで、$|\Delta|$ を $t_i - t_{i-1}$ の最大値としたとき、

$$\lim_{|\Delta|\to 0} R(f, a, b, \Delta, s) = \alpha$$

となる α が存在するとすれば、これが最初に考えていた図形の面積であるはずである。

　以上の考察を経て、我々は次の定義に到達する。

定義：関数 f について、上の極限 α が存在するとき、f は a から b までで**リーマン積分可能**と呼び、α のことを

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書く。

　見ての通り、積分の定義はリーマン和に依存しているので、$f(x)$ がマイナスであれば積分もマイナスになることに注意。また、区分的に連続な関数はすべてリーマン積分可能であるという定理が存在する。以後、出てくる関数はすべて区分的に連続であるとし、積分可能性については考えないことにしよう。

　さて、$R(f, a, b, \Delta, s)$ は、その定義の形から、$f(x)$ の代わりに $cf(x)$ を用いるとちょうど c 倍されるという特徴を持つ。つまり、

$$R(cf, a, b, \Delta, s) = cR(f, a, b, \Delta, s)$$

である。よって極限を取ればただちに、

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

がわかる。

　同様に、

$$R(f + g, a, b, \Delta, s) = R(f, a, b, \Delta, s) + R(g, a, b, \Delta, s)$$

であることは定義からただちにわかるので、極限を取れば、

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

がわかる。

次に、$a < c < b$ として、$c = t_i$ となるような i のある分割 Δ を考える。このとき、$t_0, ..., t_i$ までを Δ_1、$t_i, ..., t_n$ までを Δ_2 とすれば、Δ_1 は a から c までの分割、Δ_2 は c から b までの分割であり、よって

$$R(f, a, b, \Delta, s) = R(f, a, c, \Delta_1, s) + R(f, c, b, \Delta_2, s)$$

である。それぞれ極限を取れば、

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

であることがわかる。

最後に、$a < b$ でないときのことを書いておこう。まず、

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

は常に約束する。また、$b < a$ のときは、

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

となると約束する。こうすることで、a と b に関係なく積分は定義できる。この定義の下で上に挙げた 3 つの式が成り立つことは簡単に示せるが、それは学生への演習として残しておくので、各自挑戦されたい。

・微分積分学の基本定理

さて、いよいよメインの結果である。

上で挙げた積分の定義はそれ自体は曖昧さがないものであるが、実計算上は使いにくい。複雑な関数の積分ともなるとまともに計算するのは無理だろう。そこで次に問題になるのが、わざわざリーマン和を計算しなくても積分が計算できる方法はないか、ということになる。

これに答えるのが次の 2 つの定理である。これらはセットで「微分積分学の基本定理」と呼ばれている。

定理１：f が連続微分可能であるとき、

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

が成り立つ。

定理２：f が連続なとき、

$$G(x) = \int_a^x f(y)dy$$

と定義すると G は微分可能で、$G'(x) = f(x)$ である。

定理 1 は、微分してから積分すると元の関数の差になるという主張である。それに対して定理 2 は、積分してから微分すると元の関数に戻るという主張になる。要約すると、**積分は微分の逆**だということである。

このため、f の積分を計算するときには次が有効である。まず、$G'(x) = f(x)$ となるような関数 G を求める（これを f の**原始関数**と呼ぶ)。次に、$G(b) - G(a)$ を計算すれば、定理 1 からそれが

$$\int_a^b f(x)dx$$

の値になる。こうすることで、いくつかの簡単な関数の積分はあっという間に計算できてしまう。

原始関数の求め方だけは難しいが、少なくとも存在は定理 2 によって言える。そして、微分積分を扱ったたいていの本には、簡単な関数の原始関数のリストが載ってある。たとえば、x^n の原始関数は、$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ である。これを使えば、積分は簡単に計算できる。

・例：

$$\int_0^1 x^2 dx$$

を求めてみよう。このためには、x^2 の原始関数を求めればよい。上に述べたようにそれは

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3$$

である。よって、定理 1 より

$$\int_0^1 x^2 dx = G(1) - G(0) = \frac{1}{3}$$

となって、これだけで積分が計算できてしまう！

さて、定理の有用性がわかったところで、まず定理 1 の証明に入ろう。このためには、平均値の定理が大活躍する。

定理１の証明：まず、分割 $\Delta=\{t_0,...,t_n\}$ を取ると、

$$
\begin{aligned}
f(b)-f(a) &= f(t_n)-f(t_0) \\
&= f(t_n)-f(t_{n-1}) \\
&\quad + f(t_{n-1})-f(t_{n-2}) \\
&\quad ... \\
&\quad + f(t_1)-f(t_0)
\end{aligned}
$$

となっている。ところで平均値の定理から、

$$
\frac{f(t_i)-f(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}=f'(s_i)
$$

となる s_i が存在するはずである。両辺に t_i-t_{i-1} を掛ければ、

$$
f(t_i)-f(t_{i-1})=f'(s_i)(t_i-t_{i-1})
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
f(b)-f(a) &= f'(s_n)(t_n-t_{n-1}) \\
&\quad + f'(s_{n-1})(t_{n-1}-t_{n-2}) \\
&\quad ... \\
&\quad + f'(s_1)(t_1-t_0) \\
&= R(f',a,b,\Delta,s)
\end{aligned}
$$

である。任意の分割についてこれが成り立つので、極限を取れば、

$$
f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx
$$

となって、定理の証明が終わる。■

定理２の証明には、若干面倒な準備が必要になる。まず、２つの補題を用意しよう。

補題１（中間値の定理）: f が $a\le x\le b$ の範囲で連続であったとき、$f(a)$ と $f(b)$ の間にあるどんな α に対しても、a と b の間にある c で $f(c)=\alpha$ となるものが存在する。

この補題の証明は省略する。非常に難しいということだけを述べておこう。

補題２：$a<b$ であり、f が $a\le x\le b$ の範囲で連続であるとする。このとき、この区間内に

$$
f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx
$$

を満たすような数 c が存在する。

証明：まず $a \leq x \leq b$ で f が最小になる点を c_1、最大になる点を c_2 としよう。そのような点が存在することは最大最小原理から言える（最大になる点はそのまま言える。最小になる点については、$-f$ が最大になる点だと考えて最大最小原理を適用すればよい）。このとき、

$$g(x) = f(x) - f(c_1), h(x) = f(c_2) - f(x)$$

とすれば $g(x), h(x)$ は常に 0 以上の値を取る関数であり、よって

$$\int_a^b g(x)dx \geq 0, \int_a^b h(x)dx \geq 0$$

となる。ところが先ほど示した結果から、

$$0 \leq \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(c_1)dx = \int_a^b f(x)dx - (b-a)f(c_1)$$

$$0 \leq \int_a^b h(x)dx = \int_a^b f(c_2)dx - \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c_2) - \int_a^b f(x)dx$$

である。以上から、我々は

$$f(c_1) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(c_2)$$

を得る。そこで中間値の定理から、補題 2 の要件を満たす c が c_1 と c_2 の間にあることがわかり、証明が終わる。 ■

定理 2 の証明：まず、

$$G(x+h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(y)dy = \int_x^{x+h} f(y)dy$$

である。$h \neq 0$ のとき補題 2 から、x と $x+h$ の間の c に対して、

$$G(x+h) - G(x) = (x+h-x)f(c) = hf(c)$$

となる。両辺を h で割って、

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(c)$$

であるが、右辺の c は x と $x+h$ の間にあるので、$h \to 0$ のときに x に収束し、よって f の連続性から、右辺は $f(x)$ に収束する。したがって左辺も同じ値に収束するが、その値こそが $G'(x)$ の定義であった。よって証明が完成したことになる。

なお、定理 1 の右辺に出てくる $f(b)-f(a)$ のことを、

$$[f(x)]_a^b$$

と略して書くことがある。この書き方によれば、定理 1 は

$$\int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b$$

と書けることに注意しておこう。

・部分積分と置換積分

積分の計算は、原始関数がわかればとても簡単である。しかし難しい問題では原始関数がわからないことも多い。その場合にどうやって積分を計算するかというのは数学の一大テーマのひとつである。

高等なやり方はいくらでもあり、たとえば複素線積分を利用した方法やさまざまな変換を利用した方法などがある。が、いきなりそんな上級テクニックを勉強する必要はない。まずは、最もメジャーな計算方法である、部分積分と置換積分について理解しておこう。

部分積分公式は次の形で表される。

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

これを理解するのは簡単である。まず定理 1 から、

$$\int_a^b (f(x)g(x))'dx = [f(x)g(x)]_a^b$$

を得る。ところがかけ算の微分の公式から、

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

であるから、この式は

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x) = [f(x)g(x)]_a^b$$

と直せる。この両辺から $\int_a^b f'(x)g(x)dx$ を引けば目標の式が完成する。

例：$\int_0^1 xe^x dx$ を計算してみよう。

ここで $f(x)=x, g'(x)=e^x$ と設定すれば、$g(x)=e^x$ である。そこで、

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

となる。ところが $\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1$ である（定理 1 ）ので、結局

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = 1 \times e^1 - 0 \times e^0 - (e^1 - e^0) = e^0 = 1$$

となって計算が終わる。

次に置換積分公式は次の形で表される。

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

ここで $y=g(x)$ という置き換えであることに着目して、$dy=g'(x)dx$ という記号法に慣れておくと、計算のときに楽な場合が多い。

これの証明も簡単である。まず、$F(x)$ を f の原始関数としておこう。すると微分積分学の基本定理から、

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy = F(g(b)) - F(g(a))$$

であることがわかる。ところが $H(x)=F(g(x))$ と定義すると、右辺は $H(b)-H(a)$ でもあるので、ふたたび微分積分学の基本定理から、

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy = H(b) - H(a) = \int_a^b H'(x)dx$$

となる。ところが合成関数の微分の公式から、

$$H'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

であるから、これを当てはめれば目的としていた公式を得る。

例：$\int_0^1 2xe^{x^2} dx$ を計算してみよう。

ここで $f(x)=e^x, g(x)=x^2$ とすれば、$2xe^{x^2}=f(g(x))g'(x)$ である。よって、

$$\int_0^1 2xe^{x^2}dx=\int_{g(0)}^{g(1)} e^y dy$$

がわかる。$g(0)=0, g(1)=1$ なので、右辺は

$$\int_0^1 e^y dy=[e^y]_0^1=e^1-e^0=e-1$$

となる。これで計算が終わった。

なお、上の計算はもっと機械的に、

$$y=x^2, dy=2xdx$$

と書いて、

$$\int_0^1 2xe^{x^2}dx=\int_0^1 e^{x^2}(2xdx)=\int_0^1 e^y dy=e-1$$

という感じで計算できる。慣れるとこういう考えのほうが計算は楽になる。

・広義積分

以上が積分の定義であるが、しかしここまででは、$a,b\in\mathbb{R}$ に対しての、

$$\int_a^b f(x)dx$$

という形の積分しか定義できていない。この a に $-\infty$ を入れたり、b に $+\infty$ を入れる積分がよく出てくるが、これはリーマン積分の立場では、**広義積分**と呼ばれ、通常の積分と区別される[*1]。

定義はとても簡単で、

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx=\lim_{a\to-\infty,\ b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

[*1] 一方でルベーグ積分では、そもそも広義積分などという概念は登場しない。これも、リーマン積分が問題を難しくする原因である。

という形になる。ただし、これらの極限が存在しない場合には広義積分は定義できない。このあたりも難しさに拍車をかけている。

・積分記号下の微分

さて、最後に、次の問題を考えてみよう。$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を考え、簡単化のために、これは連続微分可能であるとする。このときに、

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y)dx$$

と定義しよう。この関数 F について、$F'(y)$ はいくつになるか？

素朴な感性からすると、

$$F'(y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$$

ということである。そしてこれは正しい。正しいのだが、証明がけっこう難しい。実際のところ、

$$g_h(x, y) = \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}dx$$

と置けば、

$$\frac{F(y+h) - F(y)}{h} = \int_0^1 g_h(x, y)dx$$

である。したがって、

$$F'(y) = \lim_{h \to 0} \int_0^1 g_h(x, y)dx$$

である。一方で $h \to 0$ のとき、

$$g_h(x, y) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

であるから、問題は

$$\lim_{h \to 0} \int_0^1 g_h(x, y)dx = \int_0^1 \lim_{h \to 0} g_h(x, y)dx$$

が成り立つかどうか、という話に帰着する。ところがこのファイルの最初に述べた通り、これを保証することがリーマン積分ではえらく難しいのである。

ルベーグ積分がリーマン積分と比べて圧倒的に簡単なのはここで、上の等式は、ルベーグの優収束定理と呼ばれる定理を用いて極めて簡単に証明できる。しかし、リーマン積分だとかなり地道な議論をしないと証明できない。このあたりが、数学者についてルベーグ積分が現代の積分論の基礎となっている本当の理由である。