経済数学（法政用）：第１５章

細矢祐誉

テーマ：ラムゼイモデル（離散時間型）

・ラムゼイモデルの基礎

現代的な資本蓄積理論の基礎であるラムゼイモデルの離散時間型は、以下の形で記述される。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(c_t) \\ \text{subject to.} \quad & k_t \ge 0,\ c_t \ge 0, \\ & k_{t+1} = f(k_t) - c_t, \\ & k_0 = \bar{k} > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで、$0 < \delta < 1$ であり、**割引率** (discount rate) と呼ばれる。

u は非負の数に対して数か $-\infty$ のどちらかを返す関数、f は $f(0) = 0$ を満たす関数とする。通例、u は増加的だと仮定され、したがって $c > 0$ ならば $u(c) \neq -\infty$ である。u は連続で、また正の領域では二階連続微分可能で、$u''(c) < 0$ が常に成り立つこと、および、

$$\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty,\ \lim_{c \to \infty} u'(c) = 0$$

が成り立つことが仮定される。この u は**効用関数** (utility function) と呼ばれ、消費者の消費に対する好みを表現する関数と見なされる。

f は、$f(0) = 0$ を満たす増加的で連続な実数値凹関数であり、正の領域では連続微分可能で、また通常は

$$\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty,\ \lim_{k \to \infty} f'(k) < 1$$

が仮定される。この f に対する条件は稲田条件 (Inada condition) と呼ばれる。

通例、k_t は t 期の資本蓄積量を表し、c_t は t 期の消費を表す。通常、**資本減耗** (capital wastage) が存在する。つまり、k_t という量の資本は、$t+1$ 期には dk_t だけ壊れて使えなくなり、$(1-d)k_t$ だけが残る。したがって**投資** (investment) によってこれを補填しなければ生産は滞るばかりである。投資の量を i_t とすれば、

$$k_{t+1} = i_t + (1-d)k_t$$

が成り立たなければならない。

もし $d=1$ である場合、つまりこの期の資本が次の期にはすべて壊れてしまう場合には（完全減耗と呼ばれる）、

$$k_{t+1}=f(k_t)-c_t$$

が意味するものは、

$$i_t=f(k_t)-c_t$$

であり、したがって

$$c_t+i_t=f(k_t)$$

を意味する。この場合の f は k_t という資本を用いた社会の**総生産**を表しており、それが消費 c_t と投資 i_t の合計と等しい、というのが上の式の意味である。

$d<1$ の場合はどうだろうか？　この場合は、もう少しだけ面倒になる。いまわかっていることは

$$k_{t+1}=f(k_t)-c_t=i_t+(1-d)k_t$$

である。したがってこれを変形すると、

$$c_t+i_t=f(k_t)-(1-d)k_t$$

となる。つまり、$g(k)=f(k)-(1-d)k$ が真の生産関数である。本来の稲田条件はこの生産関数 g に対して

$$\lim_{k\to 0}g'(k)=\infty,\ \lim_{k\to\infty}g'(k)=0$$

という条件である。これが上の f に対する稲田条件を表すことは、$0<d\le 1$ であれば明らかであろう。

以上でモデルの説明が終わった。この問題の解の形に経済が動くというのが、ラムゼイ型資本蓄積モデルの仮説である[*1]。

では、この問題を解くためにどうすればよいだろうか？　以下、それを考える。

・消費 c_t の消去とオイラー方程式

実は、$k_{t+1}=f(k_t)-c_t$ という式は、

$$c_t=f(k_t)-k_{t+1}$$

[*1] 実は、ラムゼイのオリジナルの論文（Ramsey (1929)）には、δ が出てこない。代わりに彼は、現代だと overtaking optimal と呼ばれる、特殊な最適性の条件を論じている。いまの形は Cass (1965) と Koopmans (1965) によって与えられているため、場合によってはこのモデルはラムゼイ＝キャス＝クープマンス型の資本蓄積モデルと呼ばれている。ただし、どの論文も本来は後で述べる連続時間型の問題で考察しており、したがってこの章で扱うモデルは、後の時代にできた簡略版である。

と書き直すことができる。これを代入して c_t を消去すると、問題 (1) は次の形になる。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_t) - k_{t+1}) \\ \text{subject to.} \quad & 0 \le k_t \le f(k_{t-1}), \\ & k_0 = \bar{k} > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

この問題は (1) と同値な問題であるが、(1) と違って変数が少ないので、だいぶ簡単になる。

この問題 (2) は数列 (k_t) を選ぶ問題だったが、いま、(k_t^*) が上の問題の解であったとしよう[*2]。ここで、$t' \neq t$ に対する $k_{t'}$ を $k_{t'}^*$ に固定した上の目的関数の変動：

$$\begin{aligned} v(x) = & \sum_{t'=0}^{t-2} \delta^{t'} u(f(k_{t'}^*) - k_{t'+1}^*) \\ & + \delta^{t-1} u(f(k_{t-1}^*) - x) + \delta^t u(f(x) - k_{t+1}^*) \\ & + \sum_{t'=t+1}^{\infty} \delta^{t'} u(f(k_{t'}^*) - k_{t'+1}^*) \end{aligned}$$

とすると、この関数は $x = k_t^*$ で最大になっていなければならない。したがって $v'(k_t^*) = 0$ であるが、合成関数の微分の公式で計算すると、

$$\delta^{t-1} u'(f(k_{t-1}^*) - k_t^*) - \delta^t u'(f(k_t^*) - k_{t+1}^*) f'(k_t^*) = 0$$

ということがわかる。$f(k_{t-1}^*) - k_t^* = c_{t-1}^*$ であることに注意して上を変形することで、我々は最適化の必要条件として以下の式を得る。

$$u'(c_{t-1}^*) = \delta u'(c_t^*) f'(k_t^*). \tag{3}$$

この (3) 式は**オイラー方程式** (Euler equation) と呼ばれる。以上をまとめると、次の結果が成り立つことになる。

定理１：もしラムゼイモデル (1) に解 (c_t^*, k_t^*) が存在したとすれば、オイラー方程式 (3) がすべての $t \ge 1$ に対して成り立つ。

・横断性条件

[*2] 解であれば必ず $0 < k_t^* < f(k_{t-1}^*)$ が成り立つことが示せるが、この証明は省略する。

関数 u は凹関数であり、f も凹関数である。そして (3) 式は、出し方からしておおむね、「微分して 0」という条件である。ということは、(3) 式は定理 1 では必要条件として書かれていたが、実は十分条件なのではないか？　という予想が、当然成り立つ。

しかし、実はそうではない。(3) 式をふたたび k の式に書き直してみると、

$$u'(f(k_{t-1})-k_t)=\delta u'(f(k_t)-k_{t+1})f'(k_t)$$

となる。この式は数列 (k_t) を表現する**差分方程式** (difference equation) と呼ばれるものであるが、特にこのように 3 つの t に対する関係式で定義される差分方程式は、**二階** (second-order) の差分方程式と呼ばれる。

一般に、n 階の差分方程式は、$k_0,k_1,...,k_{n-1}$ を決めることで、初めて完全に定まり、それらの組み合わせによって無限の答えが生じる。いまの場合、$k_0=\bar{k}$ が約束されているが、k_1 についてはなんの決まりもない。したがってオイラー方程式の解は無限個存在する！

一方で、問題 (2) の目的関数は数列 (k_t) について狭義凹関数である。つまり、$(k_t^1),(k_t^2)$ が問題の条件をすべて満たしている異なる数列で、さらに $0<s<1$ であるとき、$k_t=(1-s)k_t^1+sk_t^2$ と定義すると、

$$\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t u(f(k_t)-k_{t+1})>(1-s)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t u(f(k_t^1)-k_{t+1}^1)+s\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t u(f(k_t^2)-k_{t+1}^2)$$

となることが、簡単に確認できる[*3]。もし $(k_t^1),(k_t^2)$ が両方とも問題 (2) の解であったとすれば、(k_t) は解より大きな目的関数の値を持つことになるが、一方で $k_0=\bar{k}$ で、

$$0\le k_t=(1-s)k_t^1+sk_t^2\le(1-s)f(k_{t-1}^1)+sf(k_{t-1}^2)\le f(k_{t-1})$$

となるので、(k_t^1) と (k_t^2) は問題 (2) の解ではないことになる。これは矛盾であるから、問題 (2) の解はひとつしかない。対応して、問題 (1) にも解は、ひとつしかないのである。

一方で上で述べたように、(3) は k_1 の選び方によって無限個の解を持つ。というわけで、(3) を満たすだけでは最適とは限らず、最もよい k_1 を求めるという問題が残ってしまうことがわかった。このアプローチにはふたつ方法があるのだが、今回はそのうちの片方、横断性条件を使う方法を考えよう。

数列 (c_t^*,k_t^*) が**横断性条件** (transversality condition) を満たす、とは、

$$\lim_{t\to\infty}\delta^t u'(c_t^*)k_{t+1}^*=0 \tag{4}$$

[*3] 後で出てくる定理 2 の L が凹関数であるという事実の証明をなぞればよい。

が成り立つことを言う。以下の定理が非常に重要である。

定理２：問題 (1) の条件を満たす数列 (c_t^*, k_t^*) がオイラー方程式 (3) と横断性条件 (4) を満たすとすれば、それは問題 (1) の解である。

証明：さしあたり、新しい関数を作ろう。

$$L(k,\ell) = u(f(k) - \ell)$$

とする。このとき、$0 \le s \le 1$ であれば

$$\begin{aligned} L((1-s)(k_1,\ell_1) + s(k_2,\ell_2)) &= u(f((1-s)k_1 + sk_2) - [(1-s)\ell_1 + s\ell_2]) \\ &\le u((1-s)[f(k_1) - \ell_1] + s[f(k_2) - \ell_2]) \\ &\le (1-s)u(f(k_1) - \ell_1) + su(f(k_2) - \ell_2) \\ &= (1-s)L(k_1,\ell_1) + sL(k_2,\ell_2) \end{aligned}$$

となるので、L は凹関数である。ここで以下の補題を用いる。

補題１：A は $\mathbb{R}^n$ の凸部分集合であるとし、ある関数 $L : A \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ が凹関数であるとする。また、この関数が $x^* \in A$ で微分可能であるとする。このとき、

$$L(x) - L(x^*) \le DL(x)(x - x^*)$$

が成り立つ。

補題 1 の証明はとても簡単なので、読者への問題として残す。

さて、上の補題を我々の L に、ただし $x^* = (k_t^*, k_{t+1}^*)$ として適用すれば、問題 (1) の制約条件を満たす任意の (c_t, k_t) に対して、

$$\begin{aligned} &L(k_t, k_{t+1}) - L(k_t^*, k_{t+1}^*) \\ \le\ & DL(k_t^*, k_{t+1}^*)[(k_t, k_{t+1}) - (k_t^*, k_{t+1}^*)] \\ =\ & u'(f(k_t^*) - k_{t+1}^*)f'(k_t^*)(k_t - k_t^*) - u'(f(k_t^*) - k_{t+1}^*)(k_{t+1} - k_{t+1}^*) \\ =\ & u'(c_t^*)f'(k_t^*)(k_t - k_t^*) - u'(c_t^*)(k_{t+1} - k_{t+1}^*) \end{aligned}$$

を得る。そこで、固定した $T>0$ について、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{T}\delta^t u(c_t)-\sum_{t=0}^{T}\delta^t u(c_t^*)\\
=\ &\sum_{t=0}^{T}\delta^t[L(k_t,k_{t+1})-L(k_t^*,k_{t+1}^*)]\\
\le\ &\sum_{t=0}^{T}\delta^t u'(c_t^*)f'(k_t^*)(k_t-k_t^*)-\sum_{t=0}^{T}\delta^t u'(c_t^*)(k_{t+1}-k_{t+1}^*)\\
=\ &\sum_{t=0}^{T-1}\delta^t[\delta u'(c_{t+1}^*)f'(k_{t+1}^*)-u'(c_t^*)](k_{t+1}-k_{t+1}^*)-\delta^T u'(c_T^*)(k_{T+1}-k_{T+1}^*)\\
=\ &\delta^T u'(c_T^*)(k_{T+1}^*-k_{T+1})\\
\le\ &\delta^T u'(c_T^*)k_{T+1}^*
\end{aligned}
$$

を得ることができる。ただし、三行目から四行目への等号は $k_0=k_0^*=\bar{k}$ を用いており、次の等号はオイラー方程式を用いていて、最後の不等号は $\delta u'(c_T^*)k_{T+1}\ge 0$ を用いている。この最後の行の式は横断性条件から、$T\to\infty$ としたときに 0 に収束するので、

$$\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t u(c_t)-\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t u(c_t^*)\le 0$$

がわかったことになるが、(c_t,k_t) は (1) の制約条件を満たす任意のものだったから、(c_t^*,k_t^*) は解である。以上で証明が完成した。 ■

なお、横断性条件は一般論としては解の必要条件**ではない**ことがわかっている（上東 (2002) 等を参照)。ただ、ラムゼイモデルについては横断性条件は解の必要条件である。興味があれば Hosoya (2014) を参照されたい。

・発展：目的関数の定義可能性と解の存在（注意！　難しい！）

ここまででマクロ経済学のテキストにあるラムゼイモデルの解析は終わりなのだが、ひとつ注意がある。まず、そもそも制約条件を満たす (c_t,k_t) に対して、

$$\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t u(c_t) \tag{5}$$

という数の存在を保証できるのか、という問題がある。この式の本当の定義は

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{t=0}^{T}\delta^t u(c_t)$$

ということであるのだが、この極限は本当に存在するのだろうか？

一般的に、級数 $\sum_{t=0}^{\infty} a_t$ の収束は**絶対収束**と**条件収束**に分類される。上の級数 $\sum a_t$ が絶対収束するとは、

$$\sum_{t=0}^{\infty}|a_t| < \infty$$

が成り立つことである（なお、非減少数列の極限は、実数の連続性公理から、$+\infty$ を許せば必ず存在することが示せるので、上の式の左辺は常になんらかの意味で存在している）。絶対収束する級数は必ず収束することが知られている。ちなみに、上の級数が条件収束するとは、絶対収束はしないが収束はしているということである。

いま、数列 (a_t) に対して

$$a_t^+ = \max\{0, a_t\},\ a_t^- = \max\{0, -a_t\}$$

としたとき、$a_t = a_t^+ - a_t^-$ であるが、実は $\sum a_t$ が絶対収束することは、$\sum a_t^+$ と $\sum a_t^-$ が共に絶対収束することと同値である。また、$\sum a_t^+$ と $\sum a_t^-$ のどちらかが絶対収束していれば、

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{\infty} a_t &= \lim_{T\to\infty}\left[\sum_{t=0}^{T} a_t^+ - \sum_{t=0}^{T} a_t^-\right]\\ &= \lim_{T\to\infty}\sum_{t=0}^{T} a_t^+ - \lim_{T\to\infty}\sum_{t=0}^{T} a_t^-\\ &= \sum_{t=0}^{\infty} a_t^+ - \sum_{t=0}^{\infty} a_t^-\end{aligned}$$

となって、少なくとも $\sum a_t$ を定義はできる（$\sum a_t^+$ と $\sum a_t^-$ が両方 $+\infty$ であると、上の式に $\infty - \infty$ が出てきて証明が壊れることに注意）。したがって、(5) 式が定義できていることを保証するためには、$a_t^+ = \max\{0, \delta^t u(c_t)\}$ としたときに、$\sum_t a_t^+$ が絶対収束していることを示せれば十分である。

ところで、もし $u(c_t) \le M$ となる数 $M > 0$ が存在したとすれば、

$$a_t^+ \le \delta^t M$$

となるので、

$$\sum_{t=0}^{\infty} a_t^+ \leq \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t M = \frac{M}{1-\delta} < \infty$$

となって、(5) 式が定義できることがわかる。したがって証明すべきはそのような M の存在である。しかしこれは簡単である。実際、いま我々は稲田条件を仮定しており、したがって、十分大きな $k > 0$ に対して $f'(k) < 1$ となることを仮定している。f は凹関数なので f' は減少関数であり、よって、ある $\tilde{k} > 0$ に対して $f(\tilde{k}) = \tilde{k}$ となることがわかる。このとき、$k_t > \tilde{k}$ であれば、

$$k_{t+1} \leq f(k_t) < k_t$$

が成り立つため、$\hat{k} = \max\{\bar{k}, \tilde{k}\}$ としたときに、問題 (1) の制約条件を満たすすべての (c_t, k_t) は $k_t \leq \hat{k}$ を満たさなければならない。すると $c_t \leq f(\hat{k})$ が成り立たなければならず、よって $M = u(f(\hat{k}))$ とすれば条件が成り立つ。以上を結果としてまとめておくと以下の定理が成り立つ。

定理３：問題 (1) の条件を満たす任意の (c_t, k_t) に対して、(5) 式は（$-\infty$ であることも含めて）必ず定義できる。

　なお、$0 < k < \min\{\bar{k}, \tilde{k}\}$ となる k をひとつ用意して、

$$k_t = k \text{ for all } t \geq 1$$

とすれば、これは (2) の制約条件を満たす。なので $c_t = f(k) - k$ と定義するとやはり (c_t, k_t) は (1) の制約条件を満たすが、これについて (5) 式の値は正の数になる。したがって定理 2 の計算で極限を取ったときに $\infty - \infty$ は絶対出てこないということに注意しておこう。それがあるから、あの証明は正しいのである。

　最後に、解の存在について述べよう。当然ながら、(1) の解の存在は (2) の解の存在と同値である。そして (2) の制約条件の集合は、集合[*4]

$$\prod_{t=1}^{\infty} [0, \hat{k}]$$

の部分集合であることが、すでに上の議論からわかっている。この集合は、距離（定義は今後詳しく述べる）

$$\rho((k_t), (k_t')) = \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-t} |k_t - k_t'|$$

[*4] これは、$k_t \in 0, \hat{k}$ を常に満たす数列 (k_t) の集合である。

の下にコンパクト集合になることが知られていて、(2) の制約条件集合はこの距離の下で閉集合である。そして (5) の関数はこれについて上半連続であることがわかっている。したがってコンパクト集合上の上半連続関数が必ず最大点を持つという有名な定理から、(2) には必ず解が存在することがわかる。

すでに解がただひとつしか存在しないことを示しているので、上から次の定理を得る。

定理４：問題 (1) には解がただひとつだけ存在する。