経済数学（法政用）: 第１６章

細矢祐誉

テーマ：ベルマン方程式と政策関数

・政策関数

　ラムゼイモデルの、c_t を消去したバージョンを再掲しておこう。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_t) - k_{t+1}) \\ \text{subject to.} \quad & 0 \le k_t \le f(k_{t-1}), \\ & k_0 = \bar{k} > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

この問題の解を (k_t^*) としたときに、値

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_t^*) - k_{t+1}^*)$$

のことを、$V(\bar{k})$ と書く。$V(\bar{k})$ は $\bar{k}$ によって変動するので、これは $\bar{k}$ を変数とする V という関数を定義すると見なすことができる。この関数 V を**価値関数** (value function) と呼ぶ。

　ところで、$k_0 = \bar{k}$ であるときの解を (k_t^*) としたときに、$k_0 = k_1^*$ であるときの解は当然ながら、この番号をひとつずらしただけの (k_{t+1}^*) である。したがって、

$$\begin{aligned} V(\bar{k}) &= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_t^*) - k_{t+1}^*) \\ &= u(f(\bar{k}) - k_{t+1}^*) + \delta \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_{t+1}^*) - k_{t+2}^*) \\ &= u(f(\bar{k}) - k_{t+1}^*) + \delta V(k_{t+1}^*) \end{aligned}$$

となる。一方で、$0 \le k \le f(\bar{k})$ となる k をなんでもいいから取って来て $\bar{k}$ と取り替えた問題 (1) の解を (k_t^+) とすれば、$k_0 = \bar{k}$ とし、$t > 0$ ならば $k_t = k_{t-1}^+$ とした数列 (k_t) は

問題 (1) の元の制約条件を満たしていて、よって

$$\begin{aligned} V(\bar{k}) &= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_t^*) - k_{t+1}^*) \\ &\geq \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_t) - k_{t+1}) \\ &= u(f(\bar{k}) - k) + \delta \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_t^+) - k_{t+1}^+) \\ &= u(f(\bar{k}) - k) + \delta V(k) \end{aligned}$$

である。以上をまとめると、以下の定理が得られたことになる。

定理１：価値関数は以下の関数方程式（**ベルマン方程式** (Bellman equation) と言う）

$$V(\bar{k}) = \max\{u(f(\bar{k}) - k) + \delta V(k) | 0 \leq k \leq f(\bar{k})\} \tag{2}$$

を満たす。さらに、問題 (1) の解 (k_t^*) を取れば、k_1^* は右辺の最大を達成する k と一致する。

なお、最後の主張は、簡単に一般化できる。問題 (1) の $\bar{k}$ を k_1^* で置き換えたものを考えれば、方程式 (2) の $\bar{k}$ を k_1^* で置き換えたときに、右辺の最大は k_2^* で達成される。右辺の関数

$$u(f(\bar{k}) - k) + \delta V(k)$$

は、狭義凹関数であることを後で証明するが、これを先取りして使うと、次のことがわかる。いま、関数 p を、$\bar{k}$ に対して、(2) 式の右辺の最大を達成するただひとつの k を返す関数であると考えよう（ただひとつであることは狭義の凹性から保証される）。このとき、問題 (1) の解は差分方程式

$$k_{t+1} = p(k_t),\ k_0 = \bar{k}$$

で与えられる。この関数 p は問題 (1) の**政策関数** (policy function) と呼ばれる。

さて、V が凹関数であることの証明を与えておこう。

定理２：価値関数 V は凹関数であり、さらに微分可能で、

$$V'(\bar{k}) = u'(f(\bar{k}) - p(\bar{k}))f'(\bar{k}) \tag{3}$$

を満たす。

証明：まず、$k^0, k^1 > 0$ と $0 \le s \le 1$ を満たす s に対して、$k^s = (1-s)k^0 + sk^1$ と定義しよう。$s = 0$ や $s = 1$ のときに元の記号と整合性がとれていることに注意する。$\bar{k} = k^s$ に対応する問題 (1) の解を (k_t^s) と書くことにし、$\hat{k}_t^s = (1-s)k_t^0 + sk_t^1$ とする。このとき、

$$f(\hat{k}_t^s) \ge (1-s)f(k_t^0) + sf(k_t^1) \ge (1-s)k_{t+1}^0 + sk_{t+1}^1 = \hat{k}_t^s \ge 0$$

なので、$\hat{k}_t^s$ は問題 (1) の制約条件を満たしている。よって、

$$\begin{aligned}
V(k^s) &= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_t^s) - k_{t+1}^s) \\
&\ge \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(\hat{k}_t^s) - \hat{k}_{t+1}^s) \\
&\ge (1-s)\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_t^0) - k_{t+1}^0) + s\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(f(k_t^1) - k_{t+1}^1) \\
&= V(k_0) + V(k_1)
\end{aligned}$$

となって、V の凹性が証明できる。（ここの計算の途中で、前回の定理 2 の証明の最初で示した L という関数の凹性を用いていることに注意する）

以降、この授業で証明していない事実を少々用いる。q が点 $\bar{k}$ における凹関数 V の**劣微分** (subdifferential) であるとは、不等式

$$V(k) - V(\bar{k}) \le q(k - \bar{k})$$

が常に成り立つことを言う。前回、補題 1 として、$V'(\bar{k})$ が存在すれば、それが劣微分であることを示した。実は、実数値の凹関数については、すべての点で劣微分が存在することがわかっている。さらに、V は $\bar{k}$ で微分可能であることと、劣微分がひとつしかないことが同値であることも、また示されている。そこでいま、q が V の $\bar{k}$ における劣微分であるとしよう。ここで、

$$\bar{V}(k) = u(f(k) - p(\bar{k})) + \delta V(\bar{k})$$

と定義する。$\bar{V}(k)$ はもちろん凹関数で、$V(k) \ge \bar{V}(k)$ を満たすが、$\bar{V}(\bar{k}) = V(\bar{k})$ であることは定義から明らかである。よって、

$$\bar{V}(k) - \bar{V}(\bar{k}) \le V(k) - V(\bar{k}) \le q(k - \bar{k})$$

であり、q は $\bar{V}$ の $\bar{k}$ における劣微分である。ところが $\bar{V}(k)$ は微分可能であるから、その劣微分は微分しかあり得ない。よって

$$q = \bar{V}'(\bar{k}) = u'(f(\bar{k}) - p(\bar{k}))f'(\bar{k})$$

がわかった。q は V の $\bar{k}$ における任意の劣微分だったから、これは V の $\bar{k}$ における劣微分が

$$u'(f(\bar{k}) - p(\bar{k}))f'(\bar{k})$$

ただひとつしかないことを示しており、したがって (3) 式が成り立つ。以上で証明が完成した。 ■

ここで (3) 式について、少し注釈を述べておこう。数学において、次のような関数

$$h(x) = \max_y \{g(x,y) | y \in A\}$$

について微分したとき、右辺の最大を達成する y を $y(x)$ と書くと、

$$h'(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y(x))$$

になるという現象がしばしば発生する。この種の定理は通常、**包絡線定理** (envelope theorem) と呼ばれる。いま、$g(x,y)$ のところに $u(f(x) - y) + \delta V(y)$ を当てはめてみると、(3) 式はまさに、(2) 式についての包絡線定理の形をしていることがわかるだろう。

ただし、その理屈はまったく通常の包絡線定理とは異なる。この理由は以下の通りである。通常の包絡線定理では、$y(x)$ で g が最大になることから、

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y(x)) = 0$$

となることを使えば、

$$h(x) = g(x, y(x))$$

を x で微分して合成微分の公式を使って

$$h'(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y(x))$$

となって証明が完成する。しかし、この証明では $y(x)$ の微分可能性を用いている。一方で $p(x)$ の微分可能性は通常、証明できないので、このやり方では (3) は証明できない。この結果はあまりにも重要なので、証明した人間の名前を取って、ベンベニスト＝シャインクマンの包絡線定理 (Benveniste-Scheinkman envelope theorem) と呼ばれている。

前に述べたオイラー方程式

$$u'(f(k_t) - k_{t+1}) = \delta u'(f(k_{t+1}) - k_{t+2})f'(k_{t+1})$$

は、ベルマン方程式 (2) と Benveniste-Scheinkman の包絡線定理 (3) を用いても簡単に得られる。つまり、右辺の関数

$$g(k) = u(f(k_t) - k) + \delta V(k)$$

は、$k = p(k_t)$ のところで最大になるので、$g'(p(k_t)) = 0$ である。これを代入すると、

$$\begin{aligned} 0 = g'(p(k_t)) = &-u'(f(k_t) - p(k_t)) + \delta V'(p(k_t)) \\ = &-u'(f(k_t) - p(k_t)) + \delta u'(f(p(k_t)) - p(p(k_t)))f'(p(k_t)) \end{aligned}$$

である。$p(k_t) = k_{t+1}$ とし、$p(p(k_t)) = k_{t+2}$ として上に代入して整理すれば、オイラー方程式が得られることは明白であろう。

ベルマン方程式については、以下のような結果が知られている。まず、任意の関数 V_0 を取ってきて、以降、

$$V_{t+1}(k) = \max\{u(f(k) - k') + \delta V_t(k) | 0 \le k \le f(k)\}$$

とする。すると関数の列 (V_t) が作れるが、この (V_t) は、u と f がそこそこいい条件を満たせば、価値関数 V に収束することが知られている。したがって、これを利用すれば我々は、V をコンピュータで近似計算するプログラムを簡単に書ける。しかし、実は u と f が満たすべき「そこそこいい条件」というのが、かなり厳しいことが理論的にはわかっている。このため、基礎理論的には (V_t) が V に収束することが「保証されていない」にもかかわらず、応用の研究で上のやり方で V を近似計算していることが非常に多い。これはマクロ経済理論最大の課題のひとつであると思われる。

・価値関数の性質と定常状態

ラムゼイモデルの価値関数 $p(k)$ は次の条件を満たすことが知られている。

1) p は連続で単調増大であり、さらに $k > 0$ ならば $0 < p(k) < f(k)$ が成り立つ。
2) $p(k^*) = k^*$ を満たす点 $k^* > 0$ がただひとつ存在する。これを**定常状態** (steady state) と呼ぶ。
3) $p^0(k) = k$ とし、$p^{t+1}(k) = p(p^t(k))$ として、関数 $p^t(k)$ を作る。このとき、すべての $k > 0$ に対して $\lim_{t\to\infty} p^t(k) = k^*$ である。この性質は定常状態の**安定性** (stability) と呼ばれる。
4) $f'(k^*) > 1$ である。
5) $c(k) = f(k) - p(k)$ とすると、$c(k)$ も増加的である。

6) 次の無限積

$$x(k)=\prod_{t=1}^{\infty}\delta f'(p^t(k))=\lim_{T\to\infty}\prod_{t=1}^{T}\delta f'(p^t(k))$$

は正の値に収束し、x は減少的な正の実数値関数である。

これらの性質の証明はしない。一部は簡単である（たとえば 4) は、オイラー方程式の両辺に k^* を代入すれば、$f'(k^*)=\delta^{-1}$ が出てくるので、すぐにわかる）が、一部は難しい。どうしても証明がほしい人間は Hosoya (2014) を参照すること。

実は、次のことが言える。まず、$c>0$ をひとつ取り、$k=c^{-1}(c)$ とする。このとき、オイラー方程式から、

$$\begin{aligned}
u'(c)&=u'(c(k))\\
&=u'(f(k)-p(k))\\
&=\delta u'(f(p(k))-p^2(k))f'(p(k))\\
&=\delta^2u'(f(p^2(k))-p^3(k))f'(p(k))f'(p^2(k))\\
&=...\\
&=\left(\prod_{t=1}^{T}\delta f'(p^t(k))\right)u'(f(p^T(k))-p^{T+1}(k))
\end{aligned}$$

となる。右辺を $T\to\infty$ とすれば、$u'(f(p^T(k))-p^{T+1}(k))$ は $u'(c(k^*))$ に収束するので、6) から、

$$u'(c)=x(k)u'(c(k^*))$$

がわかったことになる。したがって、

$$u(c)=u(c(k^*))+u'(c(k^*))\int_{c(k^*)}^{c}x(c^{-1}(y))dy$$

ということで、$u(c(k^*))$ と $u'(c(k^*))$ さえ指定すれば、u は逆算できてしまう！　4) から、δ も p と f から逆算できることに注意すると、我々は上のやり方で p と f から、u と δ を逆算する方法を得たことになる。

これに付随して、関数 f が与えられているときに、ラムゼイモデルの政策関数に課すことができる性質は、上の 1)-6) だけであることがわかる。なぜなら、上の条件を満たすどんな p に対しても、対応してそれが政策関数になる u と δ を、上のやり方で作れるからである！