経済数学（法政用）：第１７章

細矢祐誉

テーマ：ラムゼイモデル（連続時間型）とＨＪＢ方程式

・連続時間型のラムゼイモデル

離散時間型と異なり、連続時間型のラムゼイモデルは次のように記述される。

$$\begin{aligned}
\max \quad & \int_0^\infty e^{-\rho t}u(c(t))dt \\
\text{subject to.} \quad & k(t) \ge 0,\ c(t) \ge 0, \\
& \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t), \\
& k_0 = \bar{k} > 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

ただし、この記述は正確ではない。厳密に言うと、これに加えて、$k(t)$ と $c(t)$ がどのような関数ならばよいのか、というものが必要である。$c(t)$ としてなんでもよいということになると、上の積分が定義できなくなってしまう可能性がある。ここでは、$k(t)$ と $c(t)$ が共に連続であることを要求し、さらに、積分

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}u(c(t))dt$$

が確定することを要求することにする。

ところで、$\dot{k}(t)$ とはなんであろうか。これは、k の t における微分という意味である。では、なぜこれについて

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t)$$

という方程式を要請するのだろうか？　これも離散時間と同様に、t 時点における資本蓄積 $k(t)$ を用いた生産の値を $g(k(t))$ で表すことにし、投資を $i(t)$ で表すことにすると、次の式

$$c(t) + i(t) = g(k(t))$$

が成り立っていなければならない。一方で、資本は $i(t)$ の分だけ増加するが、同時に一定割合 $d > 0$ で壊れるので、

$$\dot{k}(t) = i(t) - dk(t)$$

が成り立っていなければならない。両者を合わせると、

$$\dot{k}(t) = g(k(t)) - dk(t) - c(t)$$

を得るので、我々は公式

$$f(k(t)) = g(k(t)) - dk(t) \tag{2}$$

を得ることになる。

離散時間のときの公式、

$$f(k_t) = g(k_t) + (1-d)k(t)$$

と比較してみると、f の形が変わっていることに気づく。g が狭義凹関数であれば f も狭義凹関数であることまでは前回と同じだが、g に稲田条件

$$\lim_{k\to 0} g'(k) = +\infty, \lim_{k\to\infty} g'(k) = 0$$

を課すと、

$$\lim_{k\to 0} f'(k) = +\infty, \lim_{k\to\infty} f'(k) = -d < 0$$

となって、f はもはや増加関数ではなくなる。この点は離散時間と連続時間で f に仮定できる条件が異なるということなので、強く注意しなければならない。

・オイラー方程式とデュボワ＝レーモンの補題

さて、簡単化のために上の問題に解 $(k^*(t), c^*(t))$ が存在し、しかも $k^*(t) > 0$ と $c^*(t) > 0$ が常に成り立っているとしよう。このとき、この解は以下のオイラー方程式

$$\frac{d}{dt}(u' \circ c^*)(t) = (\rho - f'(k^*(t)))(u' \circ c^*)(t) \tag{3}$$

を満たす。これを証明してみよう。

最初に、次の補題を証明しておこう。これは、変分法でデュボワ＝レーモンの補題と呼ばれている定理の、亜種である。

補題 1 (du Bois-Reymond)：$b(t)$ は $[t_0, t_1]$ 内の連続関数であり、$x(t_1) = 0$ かつ

$$\int_{t_0}^{t_1} x(t)dt = 0$$

を満たすすべての連続関数 $x(t)$ に対して、

$$\int_{t_0}^{t_1} b(t)x(t)dt = 0$$

が成り立つとする。このとき、$b(t)$ は定数関数である。

証明：仮に定数関数でないとすれば、t_2, t_3 という二点があって、$b(t_2) \neq b(t_3)$ が成り立つ。一般性を失うことなく $t_0 \le t_2 < t_3 \le t_1$ であると仮定してよい。また、必要ならば b と $-b$ を交換することで、$b(t_2) > b(t_3)$ であると仮定してよい。さらに、b が連続であることから、必要ならば t_2 や t_3 を少しだけずらして、$t_0 < t_2 < t_3 < t_1$ であると仮定してよい。さらに、$b(t)$ は連続であるから、$\delta > 0$ を十分小さく取れば、

$$0 < 2\delta < \min\{t_2 - t_0, t_3 - t_2, t_1 - t_2\},$$

$$\min\{b(t) | |t - t_2| \le \delta\} > b^* > \max\{b(t) | |t - t_3| \le \delta\}$$

となる。そこで、

$$x(t) = \begin{cases} \delta - |t - t_2| & \text{if } |t - t_2| \le \delta, \\ -\delta + |t - t_3| & \text{if } |t - t_3| \le \delta, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

と定義すれば、$x(t_1) = 0$ かつ

$$\int_{t_0}^{t_1} x(t)dt = 0$$

であるが、一方で

$$\int_{t_0}^{t_1} b(t)x(t)dt > 0$$

となってしまい、矛盾が生ずる。以上で証明が完成した。 ■

さて、$T > 0$ を固定し、$x(T) = 0$ かつ

$$\int_0^T x(t)dt = 0$$

となる連続関数 $x(t)$ を取ってきて、

$$k(t) = \int_0^t x(s)ds$$

と定義しよう。すぐわかることは、$k(0) = k(T) = 0$ かつ $\dot{k}(T) = 0$ であることである。これを用いて、

$$k_s(t) = \begin{cases} k^*(t) + sk(t) & \text{if } 0 \le t \le T, \\ k^*(t) & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$c_s(t) = f(k_s(t)) - \dot{k}_s(t)$$

と定義すると、これらは $|s|$ が十分小さいときにはいつでも 0 以上な連続関数であり、さらに

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}u(c_s(t))dt = \int_0^T e^{-\rho t}u(c_s(t))dt + \int_T^\infty e^{-\rho t}u(c^*(t))dt$$

は定義可能で、よって、問題 (1) の制約条件をすべて満たす。そこで、

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-\rho t}u(c_s(t))dt$$

と定義すると、$(k^*(t), c^*(t)) = (k_0(t), c_0(t))$ が解であることから、g は $s = 0$ で極大となる。よって、もし g が $s = 0$ で微分可能ならば $g'(0) = 0$ でなければならないが、積分記号下の微分公式から、

$$g'(0) = \int_0^T e^{-\rho t}[u'(c^*(t))f'(k^*(t))k(t) - u'(c^*(t))\dot{k}(t)]dt$$

となることが簡単に示せる。ここの前半部に部分積分公式

$$\int_0^T h'(t)\ell(t)dt = h(T)\ell(T) - h(0)\ell(0) - \int_0^T h(t)\ell'(t)dt$$

を適用すると、

$$\begin{aligned}
0 &= g'(0) \\
&= \int_0^T e^{-\rho t}u'(c^*(t))f'(k^*(t))k(t)dt - \int_0^T e^{-\rho t}u'(c^*(t))\dot{k}(t)dt \\
&= \int_0^T \left[\int_t^T e^{-\rho\tau}u'(c^*(\tau))f'(k^*(\tau))d\tau - e^{-\rho t}u'(c^*(t))\right]\dot{k}(t)dt
\end{aligned}$$

を得る。$\dot{k}(t) = x(t)$ なので、補題 1 から、ある定数 b^* が存在して、

$$\int_t^T e^{-\rho\tau}u'(c^*(\tau))f'(k^*(\tau))d\tau - e^{-\rho t}u'(c^*(t)) = b^*$$

がすべての t に対して成り立つということがわかる。これを変形すると、

$$e^{-\rho t}u'(c^*(t)) = \int_t^T e^{-\rho\tau}u'(c^*(\tau))f'(k^*(\tau))d\tau - b^* \tag{4}$$

であるから、両辺を t で微分すれば、

$$-\rho e^{-\rho t}u'(c^*(t)) + e^{-\rho t}\frac{d}{dt}(u'\circ c^*)(t) = -e^{-\rho t}u'(c^*(t))f'(k^*(t))$$

となり、これを整理することによって、オイラー方程式 (3)、つまり

$$\frac{d}{dt}(u'\circ c^*)(t)=(\rho-f'(k^*(t)))(u'\circ c^*)(t)$$

が得られたことになる。

なお、u の二階微分可能性を仮定すれば、c^* は微分可能であることが (4) 式からただちにわかる。したがって、その場合にはオイラー方程式をさらに変形して、

$$\dot{c}^*(t)=(\rho-f'(k^*(t)))\frac{u'(c^*(t))}{u''(c^*(t))}$$

とすることが可能である。教科書の中には、こちらを採用しているものも多い。

・横断性条件

連続時間モデルでの横断性条件は

$$\lim_{T\to\infty}e^{-\rho T}u'(c^*(T))k^*(T)=0 \tag{5}$$

で表される。(3) 式と (5) 式が解の十分条件であることを示そう。まず、離散時間のときと同様に、

$$L(k,\dot{k})=u(f(k)-\dot{k})$$

と定義すれば、この関数は二変数の凹関数であり、よって任意の $(k,\dot{k})$ に対して、

$$\begin{aligned}&L(k,\dot{k})-L(k^*(t),\dot{k}^*(t))\\ \le\ &\frac{\partial L}{\partial k}(k^*(t),\dot{k}^*(t))(k-k^*(t))+\frac{\partial L}{\partial \dot{k}}(k^*(t),\dot{k}^*(t))(\dot{k}-\dot{k}^*(t))\\ =\ &u'(c^*(t))f'(k^*(t))(k-k^*(t))-u'(c^*(t))(\dot{k}-dotk^*(t))\end{aligned}$$

を得る。したがって (3) 式と (5) 式と部分積分公式から、問題 (1) の条件を満たすどんな

$(k(t), c(t))$ に対しても、

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T e^{-\rho t}u(c(t))dt - \int_0^T e^{-\rho t}u(c^*(t))dt \\
= &\int_0^T e^{-\rho t}[L(k(t), \dot{k}(t)) - L(k^*(t), \dot{k}^*(t))]dt \\
\le &\int_0^T e^{-\rho t}u'(c^*(t))f'(k^*(t))(k(t) - k^*(t))dt - \int_0^T e^{-\rho t}u'(c^*(t))(\dot{k}(t) - \dot{k}^*(t))dt \\
= &\int_0^T e^{-\rho t}[(f'(k^*(t)) - \rho)u'(c^*(t)) + \frac{d}{dt}(u' \circ c^*)(t)](\dot{k}(t) - \dot{k}^*(t))dt \\
&+ e^{-\rho T}u'(c^*(T))(k^*(T) - k(T)) \\
= &\, e^{-\rho T}u'(c^*(T))(k^*(T) - k(T)) \\
\le &\, e^{-\rho T}u'(c^*(T))k^*(T) \to 0 \text{ as } T \to \infty
\end{aligned}
$$

という評価式を得る。よって

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}u(c(t))dt \le \int_0^\infty e^{-\rho t}u(c^*(t))dt$$

となり、したがって $(k^*(t), c^*(t))$ は問題の解である。

・ＨＪＢ方程式

　連続時間のときのベルマン方程式に対応するものはハミルトン＝ヤコビ＝ベルマン方程式（以下、ＨＪＢ方程式）と呼ばれ、これは

$$\max_{c \ge 0}\{(f(k) - c)V'(k) + u(c)\} - \rho V(k) = 0$$

という形で表される。以下、(1) に解が存在することを既知として、このＨＪＢ方程式を導出してみよう。

　まず、価値関数 $V(k)$ の定義を明確にしておこう。$(k^*(t), c^*(t))$ が $\bar{k} = k$ であるときの問題 (1) の解であるとき、$V(k) = \int_0^\infty e^{-\rho t}u(c^*(t))dt$ である。解が存在する場合、価値関数は連続微分可能であることが Benveniste and Scheinkman (1979) で証明されているので、以下の議論ではそれを用いることにする。また、$(k(t), c(t))$ が (1) の制約条件を $\bar{k} = k$ に対して満たしていれば、任意の T に対して

$$V(k) \ge \int_0^T e^{-\rho t}u(c(t))dt + e^{-\rho T}V(k(T))$$

であることは、離散時間のときと同様に簡単に示せるので、以下ではそれを前提として扱う。さらに $(k^*(t), c^*(t))$ に対しては当然ながら、

$$V(k) = \int_0^T e^{-\rho t} u(c^*(t))dt + e^{-\rho T} V(k^*(T))$$

である。

さて、まず、$k > 0$ と $c \geq 0$ に対して、$[0, \varepsilon]$ 上で $c(t) = c$ が常に満たされるような、(1) の制約条件を満たす $(k(t), c(t))$ を考える。そのようなものは、$\varepsilon > 0$ さえ十分小さければ、常に存在することが示せる。そこで、

$$\int_0^\varepsilon e^{-\rho t} u(c)dt + e^{-\rho\varepsilon} V(k(\varepsilon)) \leq V(k)$$

である。両辺から $V(k(\varepsilon))$ を引いて $\varepsilon > 0$ で割り算すると、

$$-\frac{V(k(\varepsilon)) - V(k(0))}{\varepsilon} \geq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon e^{-\rho t} u(c)dt + \frac{e^{-\rho\varepsilon} - e^{-\rho 0}}{\varepsilon} V(k(\varepsilon))$$

を得る。$\varepsilon \downarrow 0$ として、

$$-\dot{k}(0)V'(k) \geq u(c) - \rho V(k)$$

を得るので、これを整理すれば、

$$(f(k) - c)V'(k) + u(c) - \rho V(k) \leq 0$$

を得る。$c \geq 0$ はなんでもよかったので、

$$\max_{c \geq 0}\{(f(k) - c)V'(k) + u(c)\} - \rho V(k) \leq 0$$

がわかった。

また、離散時間のときと同様、V は凹関数であることが示せる。したがってそれを使うと、

$$\begin{aligned}\int_0^t -(f(k^*(s)) - c^*(s))V'(k)ds &= V'(k)(k - k^*(t)) \\ &\leq V(k) - V(k^*(t)) \\ &= \int_0^t e^{-\rho s} u(c^*(s))ds + (e^{-\rho t} - 1)V(k^*(t))\end{aligned}$$

を得る。よってこれをまとめて

$$\int_0^t [(f(k)-c^*(s))V'(k)+u(c^*(s))]ds+\int_0^t (e^{-\rho s}-1)u(c^*(s))ds$$
$$+\int_0^t (f(k^*(s))-f(k))V'(k)ds+(e^{-\rho t}-1)V(k^*(t))\geq 0$$

を得る。さらに、

$$\int_0^t [(f(k)-c^*(s))V'(k)+u(c^*(s))]ds\leq \max_{c\geq 0}\{(f(k)-c)V'(k)+u(c)\}t$$

なので、これを使うと、

$$\max_{c\geq 0}\{(f(k)-c)V'(k)+u(c)\}+\frac{1}{t}\int_0^t (e^{-\rho s}-1)u(c^*(s))ds$$
$$+\frac{1}{t}\int_0^t (f(k^*(s))-f(k))V'(k)ds+\frac{e^{-\rho t}-1}{t}V(k^*(t))\geq 0$$

を得る。$t\downarrow 0$ とすれば、

$$\max_{c\geq 0}\{(f(k)-c)V'(k)+u(c)\}-\rho V(k)\geq 0$$

がわかるが、前の不等式と併せて、

$$\max_{c\geq 0}\{(f(k)-c)V'(k)+u(c)\}-\rho V(k)=0$$

がわかった。以上で証明が完成した。