経済数学（法政用）: 第２章

細矢祐誉

テーマ：さまざまな関数とその性質

この節では、さまざまな関数についてその性質を理解することを目標とする。

・関数とは

観念的には、関数というのは、「なにかを入れると、別のものが出てくる規則」である。たとえば、１００円玉１つと１０円玉１つを入れたら缶ジュースがひとつ出てくる、というのも、この意味では「関数」ということになる。より数学らしい例で言えば、おそらく生徒が一度は見たことがあるであろう「x^2」なる関数は、「x という数を入れると、$x \times x$ という数が返ってくる、というルール」を表している数式である。

厳密に書くと以下の通りである。集合 A と B があるとしよう。ここで、A の各要素 x に対して、B の要素 $f(x)$ を対応させる規則のことを関数（あるいは函数[*1]）と呼ぶ。関数は普通、f で表す。f が A の要素に対して B の要素を対応させているということを意味する記号として、$f : A \to B$ と書く。この A のことを f の定義域、B のことを f の値域と書く。

さっきの x^2 という関数であれば、A は実数 $\mathbb{R}$ であり、B も実数 $\mathbb{R}$ である。この x^2 を f という関数の表記で書きたいときには、$f(x) = x^2$ と書いておくか、あるいは $f : x \mapsto x^2$ と書く。いずれにせよ、$f(x) = x^2$ と書かれていれば、「f という関数は、x に対して $x \times x$ を返す関数であるとする」という意味であると思ってもらって問題ない。

このテキストで考えられるほとんどすべての関数では、定義域は実数 $\mathbb{R}$ の部分集合、値域は $\mathbb{R}$ である。そうでない場合はその都度言及する。

・多項式

関数 $f(x)$ が、

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \text{ (ただし } a_n \neq 0 \text{ とする。)}$$

という形で書けているとき、この関数のことを n 次の多項式と言う。

[*1] この漢字は、欧米での関数の呼び名（英語だと function）に、中国人が音を当てて作った当て字である。戦前までは日本でもこの漢字が使われていたが、戦後になって「函」の字が常用漢字から外れたため、同じ読みの「関」を使うようになった。

たとえば、

$$f(x) = 1 - 2x$$

は、$a_1 = -2, a_0 = 1$ とすれば上の形になっているため、1 次の多項式である。また、

$$f(x) = x^2 + 2x$$

は、$a_2 = 1, a_1 = 2, a_0 = 0$ とすればやはり上の形になっているため、2 次の多項式である。さらに、

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + x + 2$$

は、$a_4 = 1, a_3 = 0, a_2 = -3, a_1 = 1, a_0 = 2$ と置いていけば上の形にできるため、4 次の多項式である。多項式というのはおおむね上に挙げたようなものだと思っておけばイメージとしては問題ない。

特別な形として、

$$f(x) = a$$

がすべての x について成り立つとき、定数関数と呼ばれる。このような f を 0 次の多項式と見なすことがある。

一次の多項式は、グラフが直線であるため、「直線」と言われることもある。このとき、$f(x) = ax + b$ であれば、a は、x がひとつ増えたときに $f(x)$ がどれだけ増えるか（あるいは、a がマイナスであれば、どれだけ減るか）を表している数であり、この直線の**傾き**と呼ばれる。

二次の多項式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ は、変形によって

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

と書ける。この $x + \frac{b}{2a}$ を X、$c - \frac{b^2}{4a}$ を C と書き直せば、

$$f(x) = aX^2 + C \tag{1}$$

ということである。ここから、$f(x)$ はせいぜい x^2 か、$-x^2$ と似たようなグラフしか持たないということがわかる。

特に重要なこととして、$a > 0$ のときには、$f(x) = 0$ という方程式（いわゆる**二次方程式**）の解が実数に存在するための条件は、$C \leq 0$ である。この $C \leq 0$ は、両辺に $-4a$ をかけ算することで

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

という形にできる（$a > 0$ だから、$4a$ をかけ算しても順序は狂わないことに注意)。一方で $a < 0$ のときには逆に、$f(x) = 0$ が実数解を持つための条件は、$C \geq 0$ になる。こちらも両辺に $-4a$ をかけ算すると、今度は $a < 0$ なので、

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

という、まったく前と同じ式が出てくる。この左辺のことをこの二次方程式の**判別式**と呼んで、D で表す。つまり方程式 $f(x) = 0$ が解を持つのは、$D \leq 0$ のとき、そしてそのときに限る。

さらに分析を続けてみよう。$D \geq 0$ であったとする。このとき、(1) から、

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow aX^2 + C = 0 \Leftrightarrow X = \pm\sqrt{\frac{C}{a}}$$

が、わかることになる。$X = x + \frac{b}{2a}$ だったことを思い出して整理すると、

$$\begin{aligned} x &= X - \frac{b}{2a} \\ &= \frac{-b \pm 2a\sqrt{\frac{C}{a}}}{2a} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{4aC}}{2a} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \end{aligned}$$

を得る。こうして、二次方程式の解の公式が求まった。これを見ればわかるように、解がひとつしかないのは $D = 0$ のときで、それ以外は解がふたつある。これは図解でも確かめることができる。

なお、三次、四次の方程式の解の公式は知られているが、これは簡単ではない。五次方程式の一般的な解の公式は作れないことが証明されている（アーベル＝ガロワの定理)。

・べき乗関数

次に関数、

$$f(x) = x^a$$

について知っておかなければならない。この x^a について a は任意の実数でよいのだが、実際のところ a が自然数 n である際には x^n はわかりやすい定義を持っているものの、それ以外のケースについては必ずしもわかりやすくはない。これについて解説を試みたい。

まず、自然数 n についての $f(x)=x^n$ については知っての通り、x を n 回掛け合わせたものが $f(x)$ になる。これについては、次の 2 つの公式、

1. $x^{n+m}=x^nx^m$
2. $(x^n)^m=x^{nm}$

が成り立つことがとてもよく知られている（たとえば $n=2, m=3$ などとして、読者自ら確かめてみるとよい)。x^a という数を決める際に、このふたつの式が相変わらず成り立つように、つまり

1. $x^{a+b}=x^ax^b$
2. $(x^a)^b=x^{ab}$

が成り立つように、決めていくためにはどうすればよいか。それを考えていこう。

まず、$n+0=n$ なので、$x^{n+0}=x^nx^0$ であるためには、$x^0=1$ でなければならない。そこで x^0 は常に 1 であると約束しよう。

$0=n+(-n)$ であるから、$x^nx^{-n}=x^0=1$ でなければならない。したがって我々は、$x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ ということにしよう。この定義からただちにわかるように、$x=0$ のときは x^{-n} は定義されない。

$x^1=x$ であり、$1=m\times\frac{1}{m}$ である。よって、$(x^{\frac{1}{m}})^m=x$ でなければならない。そこで $x^{\frac{1}{m}}$ というのは、m 乗すると x になる正の数を意味するということにしよう。ただし、m が正のときでも、$x^{\frac{1}{m}}$ は $x\geq 0$ に対してしか定義してはいけないことになっている（これは、$\sqrt{x}$ は x が正でないとおかしいことになるというのと関係している。実際、我々の記号を使えば、$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ である)。m が負のときには、さきほどと同じ理由から、$x=0$ のときにも $x^{\frac{1}{m}}$ は定義されない。

$\frac{n}{m}=n\times\frac{1}{m}$ なので、$x^{\frac{n}{m}}$ は、$(x^{\frac{1}{m}})^n$ として定義される。

以上で、x^a は a が有理数の時にはすべて定義された。最後に、a が有理数でないときには、a を十進小数展開して、その小数点 n 桁目までで打ち切り、残りを切り捨ててできた数を a_n としよう。この a_n は有理数であるため、x^{a_n} は定義される。そこで、

$$x^a=\lim_{n\to\infty}x^{a_n}$$

として x^a を定義する。こうすることで、x^a は a が実数であればなんであっても定義される。ただしこれも前と同様に、$a>0$ のときは x^a は $x\geq 0$ に対してのみ、$a<0$ のときは x^a は $x>0$ に対してのみ定義されることに注意すること。

べき乗関数については上の 1. と 2. の式が成り立つことに注意すること。この公式は何

度も登場するのでしっかり覚えるべきである。

・指数関数

$a > 0$ に対して、$f(x) = a^x$ という形状の関数を指数関数と呼ぶ。

指数関数を語る上でどうしても外せないのが、自然対数の底として知られる数 e である。この数はネイピアの数とも呼ばれ、だいたい 2.71828... 程度の値になる。この e については様々な性質が知られており、たとえば、

$$e = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

であることが知られている。ここで $n!$ は n の階乗と言い、1 から n までのすべての自然数を掛けた値である。$0! = 1$ とするのが慣例である。したがって最後の式は、

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$$

ということを意味している。より精密に言うと、

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

が言える。関数 e^x のことは $\exp(x)$ と書く人間もいる。

・対数関数

方程式、$x^a = b$ を考えよう。方程式を解くとは、この式が成り立つ x を見つけることを指す言葉である。幸いこの場合、両辺を $\frac{1}{a}$ 乗すれば、

$$x = (x^a)^{\frac{1}{a}} = b^{\frac{1}{a}}$$

という形で非常に簡単に解ける。この事実は後々よく使うので覚えておいてもらいたい。

一方で、方程式 $a^x = b$ を考えてみよう。この方程式の解は $a > 0, b > 0$ かつ $a \neq 1$ であれば必ず存在し、しかもひとつしかないことが知られている。しかしこの解はたいていの場合、いままで使ってきた記号ではうまく表せない。そこで、この方程式の解には特別な名前がつけられている。それは、

$$\log_a b$$

という名前である。もちろん、$a > 0, b > 0$ でなければ上の方程式には解がないため、$\log_a b$ は定義できない。この log という記号に対して、$f(x) = \log_a x$ として定義される

関数のことを対数関数と呼ぶ。a のことを対数の底と呼ぶ。a がたまたまネイピアの数 e であったときは、省略して log とだけ書く場合が多い。(ln と書く場合もある。)

対数については、べき乗関数で紹介したのとは逆の公式がいくつかあるので、ここに列挙しておく。

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

$$\log_{1/a} b = -\log_a b$$

これらの証明はどれもそれほど難しくない。たとえば最初の式であれば、$\log_a x$ の定義から、$a^{\log_a x} = x$ が常に成り立つことに注意すれば、

$$a^{\log_a b} = b, a^{\log_a c} = c$$

である。そこで、

$$a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} a^{\log_a c} = bc$$

となる。一方で

$$a^x = bc$$

となる x のことを $\log_a bc$ と呼んだのだから、上の式は $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$ を意味する。こうして最初の公式が証明できた。二番目、三番目の公式も同じように地道に計算すれば計算できるので、挑戦する意思のある学生は試しに示してみるとよいだろう。

対数関数 $\log_a x$ に対しては、$a > 1$ のときと $a < 1$ のときで形状が逆転する。図 9 に書かれているグラフを参照のこと。$x = 1$ のときに 0 になることに注意。

ところで、対数関数のグラフと指数関数のグラフにはとある不思議な特徴がある。いま、$f(x) = x$ のグラフになる線(4 5 度線)を書き、対数関数 $\log_a x$ のグラフをその線についてぱたんと折り返してみたとしよう。するとそのグラフは指数関数 a^x のグラフになる。これは、このふたつの関数が「逆関数」と呼ばれる特殊な条件を満たすことから成り立っている。詳しく言うと、$f(x) = a^x, g(x) = \log_a x$ としたとき、

$$f(g(x)) = a^{\log_a x} = x,$$

となり、また

$$g(f(x)) = \log_a a^x = x \log_a a = x$$

となる。このように、関数 f に対して関数 g が、

$$g(f(x)) = x$$

を常に満たすとき、g は f の逆関数である、と言い、$g = f^{-1}$ と書く。

いまの例であれば、指数関数は対数関数の逆関数であり、また対数関数は指数関数の逆関数である。この事実は後で、どちらかの微分を計算する際に重要な役割を果たす。

なお、他の例で言うと、

$$f(x) = x^3, g(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

とすると、これもお互いに逆関数になる。また、

$$f(x) = 2x, g(x) = \frac{1}{2}x$$

とすると、これもお互いに逆関数になる。このような例を見ると、逆関数についてイメージすることができるようになるだろう。

・三角関数

(x, y)-平面上にある、原点を中心とする半径 1 の円を考えよう。これは $x^2 + y^2 = 1$ となる点 (x, y) をすべて集めてできた図形である。この円を、$x = 1, y = 0$ の点から反時計回りになぞってできる線の長さが a のときの y 座標の値を $\sin a$ と呼び、x 座標の値を $\cos a$ と呼ぶ。また、$\cos a$ が 0 でないとき、$\frac{\sin a}{\cos a}$ のことを $\tan a$ と呼ぶ。

与えられた数 x に対して $\sin x$ を返す関数を正弦関数と呼び、$\cos x$ を返す関数を余弦関数と、$\tan x$ を返す関数を正接関数と呼ぶ。これらは経済学ではそれほど多くは出てこないが、基本的な関数であるので知っておいたほうがよい。

$\sin x$ は、$x = 0$ のときに 0 になり、$-\sin x = \sin(-x)$ を満たす。また、2π の周期で循環するのが特徴である。この特徴から、sin は循環運動を記述するのによく使われる。

$\cos x$ は、$x = 0$ のときに 1 になり、$\cos x = \cos(-x)$ を満たす。後は sin と非常によく似たカーブを描く。実際、$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ であることが知られている。

$\tan x$ は、$-\frac{\pi}{2}$ に近づくにつれて $-\infty$ に近づき、逆に $\frac{\pi}{2}$ に近づくにつれて $+\infty$ に近づく。また、$x = 0$ のところで 0 になる。

・逆三角関数

先ほど、指数関数と対数関数は逆関数であると述べた。三角関数にも逆関数があるが、ただし注意がいる。三角関数は循環するので、その逆関数は無数に存在するのである。ただし、その中で最も有名な関数というのが存在して、「主値」という名がつけられている。これらはそれぞれ arcsin, arccos, arctan と呼ばれている。

arcsin は -1 から 1 まで定義され、-1 のところで $-\frac{\pi}{2}$ を、1 のところで $\frac{\pi}{2}$ を取る。また、$x = 0$ ならば 0 である。

arccos は -1 から 1 まで定義され、-1 のところで π を、1 のところで 0 を取る。また、$x=0$ ならば $\frac{\pi}{2}$ である。

arctan はすべての実数で定義され、x が $-\infty$ に行くに従って $-\frac{\pi}{2}$ に収束する。また、x が $+\infty$ に行くに従って $\frac{\pi}{2}$ に収束する。最後に、x が 0 ならば 0 を取る。

・関数の定数倍、和、積、合成

上で書いた形で基本的な関数はだいたい網羅している。しかし数学では、それ以外の関数もたくさん出てくる。たとえば、

$$2\sqrt{x}, e^{-x}, x^2a^x, \log(\sin x + 2)$$

などといった関数は上では出てきていないが、普通に扱う。最後に、これらのような関数を扱うためにはどうすればいいかについて述べておこう。

まず、関数 f と定数 a から、$g(x) = af(x)$ として新しい関数 g を作ることができる。この g は f の a 倍と呼ばれる。次に、関数 f と g から、$h(x) = f(x) + g(x)$ や $k(x) = f(x)g(x)$ として新しい関数 h, k を作ることができる。この h は関数 f と g の和、k は積と呼ばれる。これらはだいたい、読者にも容易に想像がつくだろう。x^a のグラフの形状がわかっていれば $2x^a$ のグラフの形状を想像することは比較的簡単にできると思う。

ただし、次の操作は慣れていないとイメージをつかむことが難しいので、特記しておく。関数 f と g から、$h(x) = f(g(x))$ という形で作られた関数 h のことを、f と g の合成と呼ぶ。この h は $f \circ g$ と書かれることもある。

関数の合成は、新しい関数を作るに当たって基本的な操作であり、非常に多く出てくる。実際、微分法で最も重要な公式は合成関数の微分の計算公式だと言って問題ない。これによって、極めて複雑な関数であっても微分計算が比較的容易に行えるようになるので、この公式の使い方を覚えることは授業の大目標のひとつである。勉強する際には、それを強く意識しておいてもらいたい。