経済数学（法政用）：第３章

細矢祐誉

テーマ：関数の連続性と最大最小原理・中間値の定理

　この節では、関数の最も基本的な性質である、連続性とその応用について述べる。あらかじめ述べておくと、本節はとても抽象的である。抽象的でない議論の仕方もできるのだが、じっくり議論する必要があり、時間に追われるこの講義ではそうすることができない。ある程度のところで納得して、ついてきて欲しい。

・集合

　本節では集合の演算をたくさん用いるので、最初に集合についての基礎知識を述べておこう。

　集合とは、ものがたくさん入ったなにかである。集合の書き方はだいたい、以下の２つで行われることが多い。

$$\{2,4,6\},\ \{n|n \text{ は偶数で、} 1 \le n \le 6\}.$$

上のふたつの集合はまったく同じ集合である。左の書き方は、集合に入っているものを全部書く書き方である。右の書き方は、この記号—の左側に「入っているものの名前」を、右が「入っているための条件」を書くルールである。ちなみに略式であるが、

$$\{2n|n \text{ は自然数で、} 1 \le n \le 3\}$$

などと書く場合もある。

　実は上の表現もやや不正確であり、実は右の書き方は、「すでに知られている集合の一部である」ということが約束されなければ使えないことが知られている（ラッセルのパラドックスで調べれば、詳細がわかる）。だから、自然数の集合 $\mathbb{N}$ を用いて

$$\{n \in \mathbb{N}|n \text{ は偶数で、} 1 \le n \le 6\}$$

というのが、最も正しい記述法である。しかし、面倒な場合は省略することが多い。

　上の例だと、集合の個数は３つだった。集合の個数が少ない場合、左側の、全部書く書き方のほうがわかりやすい。しかし正の偶数をすべて集めてできた集合などを考えると、これは無限の要素を含むため、そもそも左側の書き方はできない。この場合、たとえば

$$\{2n|n \in \mathbb{N}\}$$

などと書くと、ちゃんと表せる。より精密に書くと、存在を表す記号 $\exists$ を用いて

$$\{n \in \mathbb{N} | \exists m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n = 2m\}$$

となる。ここで s.t. というのは「such that」の略である。

さて、集合 $A = \{2, 4, 6\}$ を例に取って話をしよう。ここで、

$$2 \in A,\ 3 \notin A$$

などという文章が出てくる。この $\in$ という記号は「入っている」を表している。つまり最初の文は「2 は A に入っている」を表す。同様に、$\notin$ は「入っていない」を表すので、後の文は「3 は A に入っていない」を表す。このあたりは覚えておこう。B が別の集合であるとき、A の要素がすべて B にも入っているならば、$A \subset B$ と書く。たとえば上の A に対しては、$B = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$ であるとき、$A \subset B$ である。

$A \subset B$ かつ $B \subset A$ であれば、$A = B$ である。この、当たり前の事実は、実は集合論的な証明の際には最も重要な事実になる。おそらく学生が見落としているであろう事実を指摘すると、これは

$$\{2, 4, 6\} = \{2, 4, 6, 6\}$$

を含意することに注意する。つまり、集合は「入っているかどうか」だけが重要であって、入っている個数は判定しない。2 個書いていようが 3 個書いていようが、上の右側の集合は要素が 2,4,6 の三つだけであり、したがって左側の集合と一致する。

さて、ここで、重要な集合を表す記号をいくつか列挙しておこう。これらについては、以後この授業では説明なしで使うので、覚えておいてもらいたい。

- $\mathbb{N}$ は、上で述べたように、自然数の集合である。本講義では、自然数とは、1 から始まって、「+1 する」という作業を何回か行ってできる数を、すべて集めてきたものとする。0 は入っていない（これは、本講義の外では、しばしば自然数に 0 を含める人間がいるための注記である)。
- $\mathbb{Z}$ は整数の集合である。
- $\mathbb{Q}$ は有理数の集合である。
- $\mathbb{R}$ は実数の集合である。
- $[a, b]$ と書いてあったら、それは閉区間と呼ばれ、$a \le x \le b$ を満たすすべての $x \in \mathbb{R}$ を集めてできた集合である。(a, b) は開区間と呼ばれ、これは $a < x < b$ を満たすすべての $x \in \mathbb{R}$ を集めてできた集合である。同様に、半開区間 $(a, b]$ や $[a, b)$ も定義する。

- $[a,+\infty)$ と書いてあったら、これは $a \leq x$ を満たすすべての $x \in \mathbb{R}$ を集めてできた集合である。$(a,+\infty)$ や、$(-\infty,a]$, $(-\infty,a)$ の定義も同様である。これらは半直線と言い、端点である a が入っているものは閉半直線、入っていないものは開半直線と呼ぶ。$[0,\infty)$ はしばしば $\mathbb{R}_+$ と略して書くことがある。$(0,\infty)$ もしばしば $\mathbb{R}_{++}$ と略して書かれることがある。
- ひとつも要素が入っていない集合を空集合と呼び、$\emptyset$ という記号で表す。
- 実数の部分集合 I について、$a<b$ かつ $a,b \in I$ である時には必ず $[a,b] \subset I$ であるとき、I は「区間」であると本講義では呼ぶことにする。実際には、区間は上の開区間と閉区間、半直線と、実数全体、それから空集合のみであり、それ以外には存在しない。これは当たり前の事実に見えるが、証明するためには本講義のレベルを超えた話が必要である。
- A^2 と書いてあったら、$\{(a,b)|a \in A, b \in A\}$ という、つまり A の要素をふたつ並べてできるものを集めてできた集合である。たとえば、$A=\{2,4,6\}$ の場合、

$$A^2=\{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$$

  である。
- A^3, A^4 なども上と同様に定義する。$\mathbb{R}^n$ の形の集合は n 次元ユークリッド空間と呼ばれ、その要素 $a=(a_1,...,a_n)$ は n 次元ベクトルと呼ぶ。a_i は a の第 i 要素と呼ぶ。
- $\mathbb{R}^n_+$ は、すべての要素が 0 以上である n 次元ベクトルの集合である。$\mathbb{R}^n_{++}$ は、すべての要素が 0 より大きい n 次元ベクトルの集合である。
- 集合の合併 $A \cup B$ は、A と B の要素すべてからなる集合である。また、共通部分 $A \cap B$ は、A と B 両方の要素からなる集合である。たとえば $A=\{2,4,6\}$ かつ $B=\{1,2,3\}$ なら、$A \cap B=\{2\}$ であり、$A \cup B=\{1,2,3,4,6\}$ である。

・距離と開球、開集合

ある集合 X に対して、X^2 から $\mathbb{R}$ への関数 ρ が次の 3 つの性質を持つとき、この関数 ρ は X 上の距離 (metric) であると言う[*1]。

1. $\rho(x,y) \geq 0$ であり、$\rho(x,y)=0$ と $x=y$ は同値である。
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ が常に成り立つ。

[*1] X^2 から $\mathbb{R}$ への関数、という言い方がわからなければ、「X の要素をふたつ放り込むと数が返ってくる関数」と読めばいい。

3. $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$ が常に成り立つ（三角不等式)。

たとえば、実数 $\mathbb{R}$ において $\rho(x,y) = |x-y|$ と置くと、これが上の 3 つの性質を満たすことはよく知られている。より一般に、n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

と定義すると、これも上の 3 つを満たすことが知られているが、その証明はより後の講義で行うので、ここでは実数を念頭に置いて議論することにしよう。

距離 ρ が与えられた空間 X を**距離空間** (metric space) と呼ぶ。距離空間上で、x を中心とする半径 $r > 0$ の開球 $B_r(x)$ とは、集合 $\{y \in X | \rho(x,y) < r\}$ のことである。X の部分集合 U が**開集合** (open set) であるとは、どんな $x \in U$ に対しても、ある $r > 0$ を十分小さく取れば $B_r(x) \subset U$ となることを言う。X の部分集合 V が**閉集合** (closed set) であるとは、その補集合 $U = X \setminus V$ が開集合であることを言う。

なぜこんな話を始めたか？　すべては、次節で述べる関数の連続性を定義するためである。

・関数の連続性

$f : X \to Y$ と $U \subset Y$ について、$f^{-1}(U) = \{x \in X | f(x) \in U\}$ を U の f による**逆像** (inverse image) と呼ぶ。

距離空間 X から Y への関数 $f : X \to Y$ について、Y の開集合 U の逆像 $f^{-1}(U)$ が常に開集合であるとき、f は**連続** (continuous) であると言う。

なぜ、連続性という性質がこのような抽象的な定義なのか？　これは様々な理由がある。関数の連続性の定義には他にもいろいろなやり方があり、たとえば ε-δ 法などという名前のついた有名な議論の仕方がある。それらの定義はすべて論理的には同値なのだが、同値であることを示すには時間がかかる。本講義で関数の連続性を上のような形で定義したのは、このやり方で定義することが最も、抽象的な様々な関数の性質を議論するのに対して効率がいいからである。興味のある学生は、連続性に関する他の定義を調べて見比べてみるといい。

前回述べたすべての関数は連続であることに注意する。これは自明ではない。証明すべき事実であるが、今回はそれもしない。多項式程度ならば証明はそれほど難しくないが、べき乗や指数関数の連続性はかなり難しいことを指摘しておく。

・連結性

距離空間 X の部分集合 A が**連結** (connected) であるとは、X の中の A との共通部分が空でないようなふたつの開集合 U_1, U_2 で、$A \subset U_1 \cup U_2$ かつ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となるものが、ひとつも存在しないことを言う。

この「連結性」の定義も、なぜこれを連結と言うのかただちにはわからないという学生が多いかもしれない。実は「弧状連結」という、もっと「連結」の名にふさわしい概念があるのだが、弧状連結は連結よりも強い概念で、連結であるが弧状連結でないという集合が存在する（杉浦光男「解析入門 I 」第 1 章第 8 節参照）。ところが、実は実数の部分集合に関しては、連結性は単に「区間」であることと同値なのである。ここでそれを、定理の形で示しておこう。

定理１：実数の部分集合 I について、I が距離 $\rho(x,y) = |x-y|$ の下で連結になることと、「区間」であることは同値である。

忘れているといけないのでもう一度書くと、本講義で I が「区間」であるとは、$a < b$ かつ $a, b \in I$ ならば必ず $[a,b] \subset I$ となる、という性質を表すのだった。「区間」であれば連結であることの証明は、上限 (supremum) と呼ばれる難しい概念について勉強しないといけないので、ここでは脚注にヒントだけ書いておき、本文では扱わない[*2]。逆に連結ならば「区間」であることは、対偶法によって次のようにしてわかる[*3]。まず、I が「区間」でないとしよう。すると、$a < b$ かつ $a, b \in I$ となる a, b で、$a < c < b$ となるある c に対して、$c \notin I$ であることがわかる。このとき、

$$U_1 = (-\infty, c), U_2 = (c, \infty)$$

とすると、$I \subset U_1 \cup U_2$ であり、$U_1 \cap U_2 = \emptyset$ である。また定義から U_1, U_2 とも開半直線なので、これは開集合である。そして U_1 は $a \in I$ を含み、U_2 は $b \in I$ を含むので、I との共通部分が空でない。よって I は連結ではない。対偶を取って、I が連結ならば、「区間」でなければならないことがわかった。

この事実は単純だが、極めて重要である。なぜ重要であるかということは次の結果でわかる。

[*2] 仮に I が区間であるが、U_1, U_2 という I との共通部分が空でない開集合があって、$I \subset U_1 \cup U_2$ かつ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ であるとする。$a \in U_1$ かつ $b \in U_2$ であるとし、簡単のために $a < b$ とする。このとき c^* を、$[a,c] \subset U_1$ となる $c \geq a$ の上限とすると、$c^* \in U_1$ でも $c^* \in U_2$ でも矛盾が生ずることを示せばよい。

[*3] 対偶法とは、「A ならば B」と「B でないならば A でない」が同値であることを利用して、「A ならば B」を示す代わりに「B でないならば A でない」を示すという証明法である。

・中間値の定理

関数 $f: X \to Y$ を考え、A は X の部分集合であるとする。集合

$$f(A) = \{b \in B | \exists a \in A, f(a) = b\}$$

は、f による A の像 (image) と呼ばれる。X と Y が両方距離空間で、f は連続であるとする。$f(A)$ が連結でないとすると、$f(A)$ との共通部分が空でない開集合 U_1, U_2 で、$U_1 \cap U_2 = \emptyset$ かつ $f(A) \subset U_1 \cup U_2$ となるものが存在する。このとき、$V_1 = f^{-1}(U_1), V_2 = f^{-1}(U_2)$ とすると、これは f の連続性から両方開集合であり、A との共通部分が非空で、そして $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ かつ $A \subset V_1 \cup V_2$ である。よって A も連結ではない。対偶を取ると、A が連結であるとき、$f(A)$ も連結であることがわかる。

この当たり前のような事実は、定理 1 と組み合わせたとき、以下の結果を導く。X と Y が両方とも実数の部分集合であり、距離 $\rho(a, b) = |a - b|$ で距離空間となっている場合を考える。$[a, b] \subset X$ であるとき、$f([a, b])$ は区間でなければならない。よって $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の y に対して、$f(x) = y$ となる x が $a \leq x \leq b$ となる x の中になければならない！　こうして我々は、中間値の定理に到達する。

定理２（中間値の定理）：関数 f が実数の部分集合 X から実数への連続関数であるとし、$[a, b] \subset X$ とする。このとき、y が $f(a)$ と $f(b)$ の間にあるならば、$f(x) = y$ となる x が a と b の間に必ず存在する。

なぜ連結性をここまで議論してきたかと言えば、それはすべてこの中間値の定理を証明するためだった。この定理は図で書けば当たり前の定理だが、証明はこのように、難解を極める。数学にはこのように「言っていることは当たり前なのに、証明が極めて難しい」定理が山ほどあるので、覚悟してもらいたい。

・コンパクト性と、最大最小原理

集合 X の部分集合 A に対して、集合族（たくさんの集合だと思えばいい）(U_i) が A の**被覆** (covering) であるとは、A が U_i の合併に含まれることを言う。ここで U_i の合併とは、

$$\{x \in X | \exists i, x \in U_i\}$$

で書かれる集合であり、通常 $\cup_i U_i$ と書かれる。つまり被覆であるための条件は、$A \subset \cup_i U_i$ である。特に、X が距離空間で、U_i がすべて開集合であるとき、(U_i) は**開被覆** (open covering) であると言う。

距離空間 X の部分集合 C が**コンパクト** (compact) であるとは、C のどんな開被覆も、有限個からなる部分被覆を持つ、という条件を指す。つまり、$U_{i_1},...,U_{i_N}$ という (U_i) の中の N 個（N はなんでもいいが、とにかく有限）のものをうまく抜き出してくると、

$$A \subset \cup_j U_{i_j}$$

が成り立つ、という性質を指している。

抽象的な性質に見えるが、距離空間 X がユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ にユークリッドの距離 $\rho(x,y) = \|x-y\|$ を入れたものであった場合には、C がコンパクトであることは、次の条件を満たす閉集合であることと同値であることが知られている。

「ある数 M が存在して、すべての $x \in C$ に対して $\|x\| \le M$ である」

この性質は**有界性** (boundedness) と呼ばれる（同値性の証明は高木貞治「解析概論」の第 1 章、ハイネ＝ボレルの被覆定理の証明を見よ）。

定理３：$f : X \to Y$ が連続関数であり、$C \subset X$ がコンパクトであれば、その像 $f(C)$ もコンパクトである。

証明：(U_i) を $f(C)$ の任意の開被覆であるとする。このとき、$V_i = f^{-1}(U_i)$ とすれば、V_i は f の連続性から開被覆であり、また $C \subset \cup_i V_i$ なので、(V_i) も開被覆である。すると、C はコンパクトなので、有限部分被覆 $V_{i_1},...,V_{i_N}$ が存在する。このとき $C \subset \cup_j V_{i_j}$ なので、$f(C) \subset \cup_j U_{i_j}$ であり、よって $U_{i_1},...,U_{i_N}$ は (U_i) の有限部分被覆である。よって、任意の開被覆 (U_i) に有限部分被覆があることがわかったので、$f(C)$ はコンパクトである。

これを利用して、次の定理が示せる。

定理４（最大最小原理）：X は距離空間、C はコンパクト集合で、$f : X \to \mathbb{R}$ は連続関数だとする。このとき、ある $x^* \in C$ が存在して、すべての $x \in C$ に対して

$$f(x^*) \ge f(x)$$

が成り立つ。

注意：このような x^* を、f の**最大点**と呼ぶ。つまり、上の定理は「C がコンパクトなら、C の中で f を最大にするところがある」という点を述べている。

なお、不等号を逆向きにすれば、**最小点**の定義が得られる。f の最小点は $-f$ の最大点であり、f が連続であることと $-f$ が連続であることは同値なので、定理 4 は最小点の存在も同時に示している。

証明：実際、このとき $f(C)$ は有界な閉集合なので、$f(C)$ の中に最も大きい点が存在する。その点を y^* とすると、定義から $y^* \in f(C)$ なので、C 内に $f(x^*) = y^*$ となる x^* がなければならない。すると、$x \in C$ ならば $f(x) \in f(C)$ なので、$f(x) \leq y^* = f(x^*)$ であり、よって主張は正しい。

この最大最小原理は後々の議論で極めて重要になるものなので、きっちり押さえておきたい。