経済数学（法政用）: 第 4 章

細矢祐誉

テーマ：微分法 (I)-定義と四則演算の公式、多項式の微分

本節では、微分法の基本的な考え方について触れ、いろいろな関数の微分を計算していくことを目的としている。

まず、微分に入る前に、**傾き**という言葉について確認しておこう。直線 $f(x) = cx + d$ を考える。この直線は、x という入れる数が 1 増えるたびに、c だけ値が大きくなる。このように、入れる数を増やしたのに対してどのくらいの割合だけ出てくる数が上がるかというのは、c という数で完全に決められる。この数 c のことを、直線 $cx + d$ の傾きと呼ぶのである。

次に一般の関数、たとえば $f(x) = x^2$ などについて考えてみよう。これは、x を 1 から 2 に増やすと値は 3 増え、2 から 3 に増やすと値は 5 増える。このように x がいくつから増やすかによって、値が増える量は変わってしまうので、直線のときと同じように傾きを定義するのは難しい。

そこで、点 a を決めて、a における $f(x)$ の傾きというのを考えてみることにしよう。こうしたとき、すぐ思いつくのは、$f(x)$ という関数のグラフを書いたときに、その $(a, f(a))$ という点における接線の傾きを、f の a における傾きと呼んでしまうことである。接線は直線なので、先ほど考えたやり方で傾きというものを決めることができる。こうして、直線でない関数についても傾きという概念は定義できる。

残る問題は、その傾きの計算法である。ある関数が与えられたとき、その関数の点 a における傾きをどうやって計算するか？　ここでは、フェルマーが考えニュートンが定式化したやり方について述べておこう。まず、a という点と、$a + h$ という点の 2 つについて、$f(x)$ と値が一致するような直線 $cx + d$ を考える。そのような直線は普通、f のグラフと接してはいない。実際、$f(x) = x^2$ で考えれば、この直線はグラフを a の点で突き抜けてしまい、$a + h$ の点でまた突き抜けて外に飛び出していくような形になっている。しかし、これは h が 0 に近づくにつれて、だんだんと接するようになっていくだろうと考えられる。おおざっぱに言えば、a と $a + h$ だけでグラフとタッチする直線は、h が 0 になれば a だけでグラフとタッチするようになり、接線になるのではないかということである。

では具体的に先ほどの直線 $cx + d$ の傾き c はいくつだろうか？　ここで重要なのは、この直線が a と $a + h$ の 2 点で f と値が一致するという性質である。つまり、

$$f(a + h) = c(a + h) + d$$

$$f(a) = ca + d$$

が成り立つわけである。上から下を引くと、

$$f(a+h) - f(a) = ch$$

となり、これを h で割ることにより、

$$c = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

という式を得る。この式の、h を 0 に近づけた極限が、おそらく f の a における接線の傾きになるであろう。

以上の考察を厳密に定式化して得られるものが、微分法である。

定義：f は実数の一部から実数への関数とし、a をその定義域の内部の（つまり、端ではない）点とする。このとき、

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するならば、f は a で**微分可能** (differentiable) と言い、上の極限の値を f の a における**微分の値** (derivative) と呼んで $f'(a)$ と書く。

注意：$f'(a)$ の代わりに $(f(x))'|_{x=a}, \dot{f}(a), \frac{df}{dx}(a), Df(a)$ などの記号が使われることもある。文書によって、また文脈によって書き方が変わることがあるので注意しよう[*1]。

例：$f(x) = x^2$ として、$a = 2$ での微分の値 $f'(2)$ を求めてみよう。

そのためにはまず、$\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ を計算する。実行してみると、

$$\begin{aligned}
\frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\
&= \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \\
&= \frac{4h + h^2}{h} \\
&= 4 + h
\end{aligned}$$

となる。$h \to 0$ のとき $4 + h \to 4$ なので、$f'(2) = 4$ であることがわかった。

[*1] 特に $\dot{f}$ はニュートンがよく使ったので、物理学で微分を扱うときにはこの書き方が多い。その場合、x は時間と解釈されるのが普通であり、x よりは t という文字で書かれることが多い。

・導関数と高階導関数

定義：関数 f がその定義域のどの点でも微分可能なとき、f は単に微分可能という。このとき、点 x に対して $f'(x)$ を対応させる関数を f' と書き、これを f の**導関数** (differential) と呼ぶ。

導関数 f' が連続であるとき、f は**連続微分可能** (continuously differentiable) であると言う。

導関数 f' が a で微分可能であるとき、f' の a における微分の値のことを f の a における二階の微分の値と呼び、$f''(a)$ または $f^{(2)}(a)$ と書く。またこのとき、f は a において二階微分可能であると言う[*2]。

導関数 f' がどの点でも微分可能なとき、f は二階微分可能であると言う。このとき、点 x に対して $f''(x)$ を対応させる関数を f'' と書き、これを f の二階の導関数と呼ぶ。

二階の導関数 f'' が連続であるとき、f は二階連続微分可能であると言う。

以下、三階、四階、……の導関数も同様に定義していける。

注意：導関数と微分の値はきちんと区別すること。

たとえば公式集などを見て、$(x^2)' = 2x$ と書いてあったとして、x^2 の $a = 2$ での微分の値として $2x$ と書いたら×になる。このようなときは、x に $a = 2$ を代入して $2 \times 2 = 4$ ときちんと計算し、その結果を答案に書き込むこと。

例：$f(x) = x^2$ の導関数（上で書いた $(x^2)'$）を計算してみよう。

そのためにはまず、$\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ を計算する。やってみると、

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= 2x + h\end{aligned}$$

となる。$h \to 0$ のとき $2x + h \to 2x$ なので、$f'(x) = 2x$ がわかった。

[*2] これも、$\frac{d^2 f}{dx^2}(a)$ とか、$\ddot{f}(a)$ とかいった別の書き方がある。この授業では用いないが、本によっては普通に使うので注意。

・微分の公式、その 1

上で計算したような簡単な関数ならともかく、多くの関数は微分や導関数を計算するのは簡単ではない。そこで、微分を簡単に計算できるようになるための便利な公式、というものが作られている。この授業でもそれらを紹介するが、そこで扱うのは以下の 8 つである。

1. $f(x) \equiv c$ となる定数関数については、$f'(x) = 0$ である。
2. $k(x) = f(x) + g(x)$ が常に成り立つとき、$k'(x) = f'(x) + g'(x)$ である。
3. $g(x) = cf(x)$ が常に成り立つとき、$g'(x) = af'(x)$ である。
4. $k(x) = f(x)g(x)$ が常に成り立つとき、$k'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ である。（ライプニッツの公式）
5. $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ が常に成り立つとき、$k'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ である。
6. $\ell(x) = f(g(x))$ が常に成り立つとき、$\ell'(x) = f'(g(x))g'(x)$ である。（合成関数の微分の公式）
7. $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ である。（逆関数の微分の公式）
8. $f(x) > 0$ のとき、$f'(x) = f(x)(\log f(x))'$ である。（対数微分の公式）

これらをきちっと使いこなすことができれば、たいていの関数は微分を計算することができるようになる。しかしこれらのうち、6. と 7. と 8. の証明はかなり難しいので、これは次回に回し、今回は 1. から 5. の公式の証明と、使い方を見てみよう。特に最初の 3 つの公式は重要であり、また証明もさほど難しくない。

1. の証明：これは容易である。実際、

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0$$

が常に成り立つので、$h \to 0$ としてやれば $f'(x) = 0$ となる。

2. の証明：実際、

$$\begin{aligned}\frac{k(x+h)-k(x)}{h} &= \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\end{aligned}$$

なので、$h \to 0$ としてやれば、

$$k'(x) = f'(x) + g'(x)$$

となる。

3. の証明：実際、

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

なので、$h\to 0$ としてやれば $g'(x)=cf'(x)$ となる。

計算例１：$f(x)=3x^2+100$ の導関数を求めてみよう。

$$\begin{aligned}f'(x)&=(3x^2+100)'\\&=(3x^2)'+(100)'\ (2.\ \text{による。})\\&=(3x^2)'+0\ (1.\ \text{による。})\\&=3(x^2)'\ (3.\ \text{による。})\\&=6x\ ((x^2)'=2x\ \text{による。})\end{aligned}$$

となる。よって、$f'(x)=6x$ となる。

このように、1. から 3. までの公式を使えば、かなり多くの関数の微分が計算できる。

引き続き証明に戻ろう。今度は 4. と 5. の公式を示す。ここでは、ある重要な発想の転換が必要である。たとえば、$a-b$ という数式がそのままでは扱いづらいとき、適当な c という数をうまく選んで、

$$a-b=(a-c)+(c-b)$$

と変形すると、$a-c$ と $c-b$ が両方ともうまい具合に扱える、ということがよくある。下の式変形は、この変形を念頭に置いて読むと大幅に理解しやすくなるだろう。

4. の証明：実際、

$$\begin{aligned}\frac{k(x+h)-k(x)}{h}&=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\&=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\&=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\end{aligned}$$

なので、$h\to 0$ とすれば、

$$k'(a)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

となって望んでいた公式を得る[*3]。

5. の証明：実際、

$$\begin{aligned}
\frac{k(x+h)-k(x)}{h} &= \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h} \\
&= \frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h} \\
&= \frac{1}{g(x+h)g(x)}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]
\end{aligned}$$

となるので、$h \to 0$ とすれば、

$$k'(x) = \frac{1}{(g(x))^2}(f'(x)g(x)-f(x)g'(x))$$

となって望んでいた公式を得る。

計算例２：$f(x) = x^2(x^2+100)$ の導関数を求めてみよう。

このためには、4. の公式の $f(x)$ を x^2 に、$g(x)$ を (x^2+100) に当てはめてみよう。すると、

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^2(x^2+100))' \\
&= (x^2)'(x^2+100)+x^2(x^2+100)'
\end{aligned}$$

となる。

ここで、先ほどやったように $(x^2)' = 2x$ である。また、$(x^2+100)' = (x^2)'+(100)' = 2x$ であることもわかる。そこでこれを上の式に当てはめれば、

$$f'(x) = 2x(x^2+100)+x^2(2x) = 4x^3+200x$$

ということがわかる。

計算例３：$f(x) = \frac{x^2}{x^2+100}$ の導関数を求めてみよう。

[*3] 細かいことを言うと、微分可能な関数はすべて連続であるという定理があり、ここではそれを使っている。実際、$h \to 0$ のときに $g(x+h) \to g(x)$ であるためには、g が x という点で連続でなければならない。

このためには、5. の公式の $f(x)$ を x^2 に、$g(x)$ を x^2+100 に当てはめてみよう。すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x^2+100)^2}((x^2)'(x^2+100)-x^2(x^2+100)') \\ &= \frac{1}{(x^2+100)^2}(2x(x^2+100)-x^2(2x)) \\ &= \frac{200x}{(x^2+100)^2} \end{aligned}$$

となって計算が終わる。

・具体的な関数の微分、その 1

上の公式を使うだけでも、かなり多くの関数の微分を計算することができる。しかし、やはりそれでも、いくつかの基本的な関数の微分の公式を知っておかなければならない。特にこの授業で扱う公式は次のようなものがある。

(I) $(x^n)' = nx^{n-1}$
(II) $(x^{-n})' = (-n)x^{-n-1}$
(III) $(x^a)' = ax^{a-1}$
(IV) $(a^x)' = (\log a)a^x$
(V) $(\log x)' = \frac{1}{x}$
(VI) $(\sin x)' = \cos x$
(VII) $(\cos x)' = -\sin x$
(VIII) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(IX) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

これらはどれも重要ではあるのだが、いまの段階ではどれも証明が難しいものばかりである。そこで今回は (I) と (II) だけを証明し、残りは次回以降に回すことにする[*4]。

まず (I) を示す。このためには、「数学的帰納法」と呼ばれる特殊な証明方法が必要である。数学的帰納法とは、「すべての自然数 n に対して○○が成り立つ」ということを示すために、次の 2 ステップを証明すればよいという論法である。

[*4] なお、(III) は (I) と (II) を含むんじゃないのか、という疑問を覚える学生もいるかもしれない。確かに形だけみればその通りだが、x^n や x^{-n} は x がマイナスでも定義できるのに対して、x^a は x がプラスでなければ定義できなかったことを思い出してもらいたい。この性質のために、(III) と (I)(II) は違う証明の仕方をしなければならない。

1) $n = 1$ のときは○○は正しい。
2) $n = k$ のときに○○が正しければ、$n = k + 1$ でも○○は正しい。

どうしてこれを示せば「すべての自然数 n に対して○○が成り立つ」ということが示せたことになるのか、というと、それは次のような理屈による。まず、$n = 1$ のときは 1) から○○は正しい。次に $n = 2$ のときを考えよう。$k = 1$ としたとき、$n = k$ に対して○○が正しいことをすでに確認している。したがって 2) から、$n = k + 1$ に対しても○○は正しい。$k + 1$ はいまの場合 2 なので、$n = 2$ の場合に○○は正しいことになる。次は $n = 3$ の場合を考えよう。$k = 2$ とすれば、$n = k$ に対して○○は正しいことがすでに確認されている。したがって 2) から、$n = k + 1$ に対しても○○は正しいが、$k + 1$ はいま 3 なので、$n = 3$ の場合にも○○は正しいことになる。

$n = 4$ の場合、$n = 5$ の場合……と、n がいくつになっても上の議論は正しいことがわかるだろう。よって、すべての自然数 n に対して○○は正しいことになり、証明が完了するのである[*5]。

そこでこの○○を、「$(x^n)' = nx^{n-1}$」という内容だと考えてみよう。これを示すためには、我々は次の 2 つを証明すればよいことになる。

1) $(x^1)' = 1 \times x^0 = 1 \times 1 = 1$ である。つまり、$f(x) = x$ ならば $f'(x) = 1$ である。
2) $(x^k)' = kx^{k-1}$ ならば $(x^{k+1})' = (k + 1)x^k$ である。

これを順番に示していこう。

まず 1) について。これは、$f(x) = x$ とすれば、

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{x + h - x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

であることから、$h \to 0$ とすれば、

$$f'(x) = 1$$

となることで示される。

次に 2) について。これは、$x^{k+1} = x \times x^k$ であるから、上の 4. の公式（かけ算の微分

*5 より精密に議論すると次のようになる。いま、1) と 2) の証明が完成したとしよう。仮にある自然数 n に対して○○が成り立たなかったとすると、そのような自然数で最小の数が存在するので、それを n^* と置く。1) から、n^* は 1 ではない。したがって $n^* - 1$ も自然数である。$k = n^* - 1$ とすれば、n^* は○○が成り立たないような最小の自然数だから、$n = k$ のとき○○は成り立っている。すると 2) によって $n = k + 1$ でも○○は成り立っていることになるが、$k + 1 = n^*$ であるからこれは矛盾である。よってこのようなことはあり得ない。

の公式）から、

$$
\begin{aligned}
(x^{k+1})' &= (x \times x^k)' \\
&= (x)'x^k + x(x^k)' \text{ (4. の公式による。)} \\
&= 1 \times x^k + x \times kx^{k-1} \text{ (示しておいた } (x)' = 1 \text{ と、} (x^k)' = kx^{k-1} \text{ による。)} \\
&= (k+1)x^k
\end{aligned}
$$

となって、たしかに 2) が正しいことがわかった。これで証明が完成したことになる。

次に (II) の公式を示す。学生はもしかすると、こちらも数学的帰納法を用いるのではないかと思っているかもしれない。しかしそうではなく、この公式はずっと簡単に示せる。

というのも、$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ だからである。これによって、$f(x) = 1, g(x) = x^n$ として割り算の微分の公式を適用すれば、

$$
\begin{aligned}
(x^{-n})' &= \left(\frac{1}{x^n}\right)' \\
&= \frac{(1)' \times x^n - 1 \times (x^n)'}{x^{2n}} \\
&= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} \\
&= \frac{-n}{x^{n+1}} = (-n)x^{-n-1}
\end{aligned}
$$

となるからである。これだけで示せてしまう。

特に上の公式から、

$$
\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}
$$

がわかる。これは特に重要なので覚えておくとよい。