

テーマ：微分法 (II)-合成関数の微分の公式

・微分の公式、その2

前回、5つの公式を紹介した。

1. $(c)' = 0$
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
3. $(cf(x))' = cf'(x)$
4. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

今回紹介するのは残りの3つの公式と、その応用である。まず公式を列挙すると、

6. $\ell(x) = f(g(x))$ が常に成り立つとき、 $\ell'(x) = f'(g(x))g'(x)$ である。(合成微分の公式、連鎖律)
7. $f(g(x)) = x$ のとき、 $g'(a) = \frac{1}{f'(g(a))}$ が成り立つ。(逆関数の微分の公式。このような g を f の逆関数と呼び、 f^{-1} と書くことに注意。)
8. $f(x) > 0$ であり、 $g(x) = \log f(x)$ が微分可能ならば $f'(x) = f(x)g'(x)$ である。(対数微分の公式)

しかしこれらを証明するにはたいへんな手間を要する。6. の公式の証明を以下に書くが、これは後でやり直すので、現時点では飛ばしても構わない。

・6. (合成関数の微分の公式) の証明

この公式の証明は、多くの教科書ではまじめに示していない。代わりに、次のような議論で証明したということにしている。まず、 $g(x+h) - g(x) = k$ と置くと、 $g(x+h) = g(x) + k$ となる。そこで、

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x) + k) - f(g(x))}{k} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \rightarrow f'(g(x))g'(x)$$

となって、公式が証明できたとするのである*1。

*1 あとで使うが、微分可能な関数は連続であるという定理があるので、 $h \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$ であることに注意。

この証明は一見するとたしかに正しいように見える。しかし、実は $k = 0$ の可能性を排除できておらず、そのときには成り立たない。したがって、別の技術で証明することが必要になる。それを以下できっちりとやっつけていこう。

まず、補題 (lemma) というものをひとつ用意する。補題とは、「ある定理を証明されるために使われる別の定理」を呼ぶ名前である。

補題： f が x で微分可能で $f'(x) = a$ であることと、次の条件：

$$(1) f(x+h) - f(x) = ah + \varepsilon(h)h.$$

$$(2) h \rightarrow 0 \text{ のとき } \varepsilon(h) \rightarrow 0.$$

を満たす関数 ε が存在することは同値である。

補題の証明：最初にまず、条件を満たす関数 ε があったとしてみよう。このとき、

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a + \varepsilon(h)$$

である。 $h \rightarrow 0$ のとき右辺は a に収束するので、左辺も a に収束し、したがって $f'(x) = a$ である。

逆に、 $f'(x) = a$ だったとしよう。このとき、

$$\varepsilon(h) = \begin{cases} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - a & (h \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (h = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

としてみよう。まず、 $h \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon(h) \rightarrow f'(x) - a = 0$ だから、(2) の条件は満たす。そして、 $h \neq 0$ ならば

$$ah + \varepsilon(h)h = f'(x)h + f(x+h) - f(x) - f'(x)h = f(x+h) - f(x)$$

であり、また $h = 0$ ならば

$$ah + \varepsilon(h)h = 0 = f(x+h) - f(x)$$

であるから、(1) の条件も満たしている。よって、この ε が条件を満たすことがわかった。これで補題の証明が終了する。 ■

さて、補題を利用して合成関数の微分の公式を証明してみよう。

最初に、

$$\begin{aligned} f(g(x) + k) - f(g(x)) &= f'(g(x))k + \varepsilon_1(k)k \\ g(x+h) - g(x) &= g'(x)h + \varepsilon_2(h)h \end{aligned}$$

となるような、補題の条件 (1)(2) を満たす $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を取っておく。このとき、

$$g(x+h) - g(x) = k$$

と置くと、 $g(x+h) = g(x) + k$ である。また ε_2 の定義から、

$$k = g'(x)h + \varepsilon_2(h)h$$

であることに注意しよう。したがって $h \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$ でもある。すると、 $\ell(x) = f(g(x))$ に対して、

$$\begin{aligned} \ell(x+h) - \ell(x) &= f(g(x+h)) - f(g(x)) \\ &= f(g(x) + k) - f(g(x)) \\ &= f'(g(x))k + \varepsilon_2(k)k \\ &= f'(g(x))(g'(x)h + \varepsilon_1(h)h) + \varepsilon_2(k)(g'(x)h + \varepsilon_1(h)h) \\ &= f'(g(x))g'(x)h + [\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(k)(g'(x) + \varepsilon_1(h))]h \end{aligned}$$

である。そこで、上の最後の式の大括弧の中身を $\varepsilon(h)$ と名付けると、

$$\ell(x+h) - \ell(x) = f'(g(x))g'(x)h + \varepsilon(h)h$$

となる。つまり補題の (2) の条件が成り立つわけである。

あとは補題の (1) の条件をチェックするのであるが、これは容易である。なぜなら、 $h \rightarrow 0$ のときに $\varepsilon_1(h) \rightarrow 0$ であり、また $h \rightarrow 0$ なら $k \rightarrow 0$ なのだから、 $\varepsilon_2(k) \rightarrow 0$ でもあるからである。したがって補題から、 $\ell'(x) = f'(g(x))g'(x)$ が成り立つ。これで 6. の証明が終わった。

計算例： $h(x) = (x^2 + 10)^{100}$ の導関数を求めてみよう。

$f(x) = x^{100}$, $g(x) = x^2 + 10$ と置けば、 $h(x) = f(g(x))$ である。そこで、 k に合成関数の微分の公式を適用してやればよい。実際に計算してやれば、

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = f'(x^2 + 10)g'(x)$$

となる。一方で、すでに前回示してあるように $f'(x) = 100x^{99}$ であり、また $g'(x) = 2x$ であるから、当てはめてやれば、

$$h'(x) = 100(x^2 + 10)^{99}(2x) = 200x(x^2 + 10)^{99}$$

となる。

・ e^x の微分の公式

次に進む前に若干寄り道をして、 e^x の微分を計算しておきたい。 $f(x) = e^x$ と置けば、

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}$$

であるから、この問題は本質的には

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

がいくつになるかということに帰着する。我々は上の極限が1であることをこれから証明する。したがって結論は $f'(x) = e^x$ であり、 e^x は微分すると自分自身が出てくるという性質を持った関数である。

さて、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ を示そう。このためには、主張を $h > 0$ のときと $h < 0$ のときに分けるのがコツである。しかし、準備が若干いる。まず、思い出しておきたいこととして、

$$e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

という公式があったことを思い出そう。また、 $e^y = x$ という方程式の解であるような y のことを、 $\log x$ と書くのだったということを思い出そう。 $x = 1$ のとき、このような y は0しかなく、したがって $\log 1 = 0$ である。また、 $x = e$ のとき、 $e^y = e$ の解は $y = 1$ しかないの、 $\log e = 1$ である。以上のことを思い出した上で、計算を見ていく。

さて、 $h > 0$ のときも $h < 0$ のときも、

$$h = \log \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

となるような数 p が存在する。この p は $h > 0$ のときは正であるが、 h が0に近づけば、 $\log 1 = 0$ であることから、 $1 + \frac{1}{p}$ が1に近づくことになり、したがって $p \rightarrow +\infty$ である。このとき、

$$e^h = e^{\log(1 + \frac{1}{p})} = 1 + \frac{1}{p}$$

なので、公式 $a \log b = \log b^a$ を使うと、

$$\begin{aligned} \frac{e^h - 1}{h} &= \frac{1 + \frac{1}{p} - 1}{\log(1 + \frac{1}{p})} \\ &= \frac{1}{p \log(1 + \frac{1}{p})} \\ &= \frac{1}{\log(1 + \frac{1}{p})^p} \end{aligned}$$

がわかる。 $h \rightarrow 0$ のとき $p \rightarrow +\infty$ であるから、右辺は

$$\frac{1}{\log e} = 1$$

に収束し、したがって左辺も同じ値に収束する。

$h < 0$ のときは、 $p < 0$ であり、 $h \rightarrow 0$ のときには $p \rightarrow -\infty$ である。この事実が気をつけば、あとの計算はまったく同じで、やはり $h \rightarrow 0$ のときに

$$\frac{e^h - 1}{h} \rightarrow \frac{1}{\log e} = 1$$

であることが示せる。こうして証明が完成した。結論として我々は $(e^x)' = e^x$ という公式を得たことになる。

・ 7. (逆関数の微分の公式) の証明

逆関数の微分公式はそれほど難しい証明は要さない。合成関数の微分の公式を簡単に使うだけである。ただし、そこにはひとつ注意書きがある。

これまでの公式はぜんぶ、微分可能性について触れていなかった。たとえば足し算の微分の公式 (前回の 2. のこと) であれば、 $f(x)$ と $g(x)$ が両方とも微分可能であれば、 $f(x) + g(x)$ も微分可能であるかどうか、というのは、明らかであるとは言えない性質である。足し算の微分の公式の証明を見れば、幸いにしてそれは証明の内部で示されているので、正しいと言える。これは 1. から 6. まですべて同様に言える。

しかし、この 7. に関して言えば、 f が微分可能だからといって f^{-1} も微分可能かどうかは、式の形だけからは明らかではない。実のところ、この件に関しては次の定理が解決してくれる。

逆関数定理 : 関数 f が点 a で連続微分可能であり、 $f'(a) \neq 0$ とする。このとき、 $f(a)$ の付近で f の逆関数 f^{-1} は存在し、それは連続微分可能である。

しかし、この定理の証明は極めて難しく、本講義のレベルを大幅に逸脱してしまう。そこで今回は、この定理の証明自体はあきらめ、逆関数が微分可能であると仮定してその微分を計算することをやってみよう。

まず、 g が f の逆関数であるというのは、 $f(g(x)) = x$ が常に成り立っていることを指す。これは既に述べた通りである。この両辺を x で微分すると、右辺の微分は前回示したように 1 になる。また左辺の微分は合成微分の公式から $f'(g(x))g'(x)$ となる。よって、

$$f'(g(x))g'(x) = 1$$

が成り立つことになる。そこで $f'(g(x))$ で両辺を割ると、

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

となって、逆関数の微分の公式 7. が証明できた。

・使い方

$g(x) = x^{\frac{1}{2}}$ を微分してみよう。このとき、 $f(x) = x^2$ とすれば、 $f(g(x)) = x$ となる。また、 $f'(x) = 2x$ はわかっている。よって、

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

となって計算が終わる*2。

さて、これを利用して $f(x) = \log x$ の微分を計算してみよう。上でもう書いたことだがもう一度だけ思い出しておくと、 $e^y = x$ という方程式の解 y のことを、我々は $\log x$ と呼ぶのであった。したがって $e^{\log x} = x$ である。ここで $g(x) = e^x$ とすれば、 $e^{\log x} = x$ であり、したがって f は g の逆関数である。これに逆関数の微分の公式を適用すれば、

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$$

となる。ところで $g'(x) = e^x$ であるから、

$$f'(x) = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

となる。したがって $(\log x)' = \frac{1}{x}$ であることがわかった*3。

・ 8. (対数微分の公式) の証明

*2 つまり、 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ということである。また、これは $(x^a)' = ax^{a-1}$ の a に $\frac{1}{2}$ を入れたときの結果とも一致している。

*3 逆関数定理の結果を使わず、対数関数が微分可能であることから証明したいという読者のために別解を用意しておく。ただし、 \log の連続性は証明せずに使う。

まず、 $t = \frac{x}{h}$ と置くと、 $h = \frac{x}{t}$ である。よって、

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{\log \frac{x+h}{x}}{h} = \frac{t \log(1 + \frac{1}{t})}{x} = \frac{1}{x} \log(1 + \frac{1}{t})^t$$

である。 $h > 0$ かつ $h \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow +\infty$ なので、右辺は $\frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x}$ に収束する。 $h < 0$ のときは逆に $h \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow -\infty$ なのでやはり同じ式が成り立つ。これで示せた。

対数微分の公式の証明のために、 $e^{\log x} = x$ という関係をふたたび用いる。 x の代わりに $f(x)$ を入れれば、 $\log f(x) = g(x)$ のときに、

$$f(x) = e^{\log f(x)} = e^{g(x)}$$

である。 $h(x) = e^x$ と置けば、右辺は $h(g(x))$ なので、合成微分の公式 6. から、

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x)$$

である。ところが我々はすでに $h'(x) = e^x$ を知っているので、

$$h'(g(x)) = e^{g(x)} = e^{\log f(x)} = f(x)$$

であり、よって

$$f'(x) = f(x)g'(x)$$

がわかった。以上で証明が完成した。

・具体的な関数の微分、その2

対数微分の公式を用いることで、いままでは難しかったいろいろな関数の微分が計算できる。以下に例を挙げよう。

・ $(x^a)' = ax^{a-1}$ ($x > 0$ のとき)

これは、 $f(x) = x^a$ とすれば、上の $g(x) = \log x^a = a \log x$ であるから、 $g'(x) = \frac{a}{x}$ であるので、

$$f'(x) = g'(x)f(x) = \frac{a}{x}x^a = ax^{a-1}$$

という形で証明できる。

・ $(a^x)' = (\log a)a^x$

これは、 $f(x) = a^x$ とすれば、上の $g(x) = \log a^x = x \log a$ であるから、 $g'(x) = \log a$ であるので、

$$f'(x) = g'(x)f(x) = (\log a)a^x$$

という形で証明できる。

なお、上の $(x^a)' = ax^{a-1}$ は $x > 0$ のときにしか適用できないことには注意が必要である。理由は、 $\log x$ という関数が $x > 0$ のときにしか定義されていないため、 $g(x)$ が定義できないからである。

前回示した公式、

$$(x^n)' = nx^{n-1}, (x^{-n})' = (-n)x^{-n-1}$$

と今回の公式との差はここである。実際、前回の証明は x が 0 以下でも成り立つ。しかし $(x^a)' = ax^{a-1}$ については、 $x > 0$ でなければ対数微分の公式が使えないため、証明できないのである。

最後に三角関数の微分については、これまでとは違った注意が多少必要である。よく数学の教科書には、三角関数の微分を計算するために、次の公式、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

という関係を利用する。この公式を出すために、

$$|\sin h| \leq |h| \leq |\tan h|$$

という関係が成り立つことを利用するのだが、この事実の証明がたいの教科書には書かれていない。この事実の証明にはたいの場合微分を用いねばならないが、今回の場合は三角関数の微分を計算する前にこの事実を証明しなければならないため、その論法は使えない。

上の事実をきちんと証明する議論はないわけではないが、その証明のためには複素解析という分野についての深い知識を必要とする。そこでこの講義ノートでは、

$$(\sin x)' = \cos x$$

という事実は証明なしに事実として扱うことにする。より深い知識が必要な読者は、杉浦光男『解析入門 I』（東京大学出版会）の第三章を見るとよい。

さて、上の事実から、さまざまな三角関数の微分がすぐに計算できる。たとえば、 $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ である事実を用いると、 $f(x) = \sin x$ 、 $g(x) = x + \frac{\pi}{2}$ とすれば $\cos x = f(g(x))$ となっているので、合成関数の微分の公式から、

$$(\cos x)' = f'(g(x))g'(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \pi) = -\sin x$$

という形で、 $(\cos x)' = -\sin x$ が示せる。すると $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ なので、割り算の微分の公式から、

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$$

が示せる。

逆三角関数の微分も逆関数の微分の公式から簡単に計算できる。まず、 \arctan は \tan の逆関数なので、

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

となる。また、 \arcsin の微分については、 $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ であることから、 $\cos x > 0$ であれば $\cos x = \sqrt{1 - (\sin x)^2}$ となることを利用すると、

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

となる。

以上のようにして三角関数の微分は計算できた。

読者は、以上で前回に挙げた (I) から (IX) までのすべての公式を証明し尽くしたことを確認して欲しい。