

テーマ：微分法 (III)-平均値の定理、ロピタルの公式、テイラー展開

・極大点

関数 f が a において極大であるとは、 a の近く^{*1}に限定すれば a が f の値が最も大きくなる点であることを指す。このとき a を f の極大点と呼び、また $f(a)$ を極大値と呼ぶ。

極小点、極小値も同様に定義する。

極大点については、次の定理が成り立つ。これは最適化の問題を解くために本質的に重要なので、後に頻出する。

定理 (Fermat) : a が f の極大点あるいは極小点であり、また f が a で微分可能であるならば、 $f'(a) = 0$ である。

証明 : f の極小点は $-f$ の極大点であるから、極大点で主張が正しければ、 $-f'(a) = 0$ から $f'(a) = 0$ がわかるので、極小点についても主張が正しいことがわかる。そこで、極大点だけで証明することができれば、極小点についても証明できたことになるので、そちらだけ議論すればよい。

さて、 a が f の極大点であるとしよう。まず $h > 0$ のとき、十分 h が小さければ $a + h$ は a に十分近いので、 $f(a + h) \leq f(a)$ が成り立つ。ということは、 $f(a + h) - f(a) \leq 0$ であり、よって

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \leq 0$$

となる。そこで $h \downarrow 0$ とすれば、左辺は $f'(a)$ に収束するので、

$$f'(a) \leq 0$$

がわかる。同様に $h < 0$ のときには

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \geq 0$$

となるので、 $h \uparrow 0$ とすれば

$$f'(a) \geq 0$$

*1 近くという語はこの場合、ある $c > 0$ について $a - c < x < a + c$ を満たす点 x の全体を指す。 c はいくら小さくてもよい。別の言い方をすると、 a を含む十分小さな開集合において、ということである。

がわかる。故に、

$$0 \leq f'(a) \leq 0$$

なのだから、

$$f'(a) = 0$$

である。 ■

さて、第3章で出した最大最小原理を、実数の部分集合についての定理として書き直してみよう。

定理（最大最小原理）： A は実数の部分集合であり、 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ は A の中のどの点でも連続であるとする。このとき、

- 十分大きな実数 $M > 0$ を取れば、 A は区間 $[-M, M]$ の中に含まれる。（有界性）
- A は閉集合である。（閉性）

という2性質を A が満たしているならば、 $f(x)$ を A の中で最大にする点、および最小にする点が A の中に存在する。

特に、 $a \leq x \leq b$ という条件を満たす x をすべて集めてできた集合 $[a, b]$ は有界な閉集合なので、ここからただちに、次の定理が導ける。

定理： f は $a \leq x \leq b$ を満たすどの x についても、その点で連続であるとする。このとき、 $a \leq x \leq b$ という条件を満たす中で $f(x)$ を最大にする点、および最小にする点が存在する。

・ Rolle の定理と平均値の定理、グラフの書き方

上の2つの定理からすぐに出るのが、次の定理である。

Rolle の定理： f が $a \leq x \leq b$ となる任意の x において連続で、また $a < x < b$ となる任意の x において微分可能で、さらに $f(a) = f(b)$ であるとすれば、 $f'(c) = 0$ となるような c が a と b の間に少なくとも一つは存在する。

証明： 仮に区間 $[a, b]$ 内における f の最大点となる c が a と b の間にあるならば、前の定理から $f'(c) = 0$ であるから主張は正しい。

そのような c がないとすれば、 a と b だけが $a \leq x \leq b$ となる x についての f の最大点である。つまり、 $a < x < b$ ならば $f(x) < f(a)$ となることがわかる。そこで特に、 f の最小点となる c が a と b の間に必ずひとつは存在する。すると前の定理から $f'(c) = 0$ であるから、やはり主張は正しい。以上で証明が完成した。 ■

この定理はいくつかの重要な結果の基礎を与えてくれる。まず次を示してみよう。

平均値の定理： f が $a \leq x \leq b$ となる任意の x において連続で、また $a < x < b$ となる任意の x において微分可能であるとすれば、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

を満たす c が a と b の間に必ず存在する*2。

証明：まず、

$$h(x) = (f(b) - f(a))(x - a) - (b - a)(f(x) - f(a))$$

と定義すれば、

$$h(a) = h(b) = 0$$

となる。よって Rolle の定理から $h'(c)$ となる c が a と b の間に存在するが、

$$0 = h'(c) = (f(b) - f(a)) - (b - a)f'(c)$$

であるから、これを整理して

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

を得る。 ■

この定理は「平均値の定理」として名高い定理である。これ自体がとても有用であり、たとえば次のような応用ができる。

応用例： $a < b$ であり、また $a < x < b$ となるどんな x に対しても $f'(x) > 0$ であるとすれば、 $f(b) > f(a)$ である。つまり、 f' が正であるところでは f は増加する。

実際、平均値の定理から、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

*2 特に $f(a) = f(b)$ であるときには、この式の左辺が 0 になるので、この定理は Rolle の定理と同じ内容になる。

となる c が a と b の間にある。 $a < c < b$ なので $f'(c) > 0$ であり、よって左辺も正でなければならない。 $b - a > 0$ なので、 $f(b) > f(a)$ であることがわかる。

逆に、 $a < x < b$ となるどんな x に対しても $f'(x) < 0$ であれば、同じロジックによって $f(b) < f(a)$ であることもわかる。つまり、 f' が負であるところでは f は減少するのである。こうして、関数の増加・減少というものと、微分の符号というものが関係を持つことがわかった。

この応用は非常に有用であり、様々なところで使われる。よく覚えておこう。

さて、この結果を用いて、グラフの書き方についてひとつのやり方を提示しておこう。

グラフは、原理的には非常に細かい折れ線を書くことによって、だいたい正確なものが書ける。実際、コンピュータなどではそのようにして書いているプログラムが非常に多い。が、これは手作業では無理である。そこで、まだ多少は人間にもできて、なおかつそこそこ正確な姿を書くことができるやり方を提示したい。それが、次に書く「増減表」である。

増減表の書き方の例示のために、 $f(x) = 8x^3 - 13x^2 + 6x$ の $0 \leq x \leq 1$ の範囲でのグラフを書いてみよう。まず最初に、プログラムに書かせたものを張っておく。(図1)

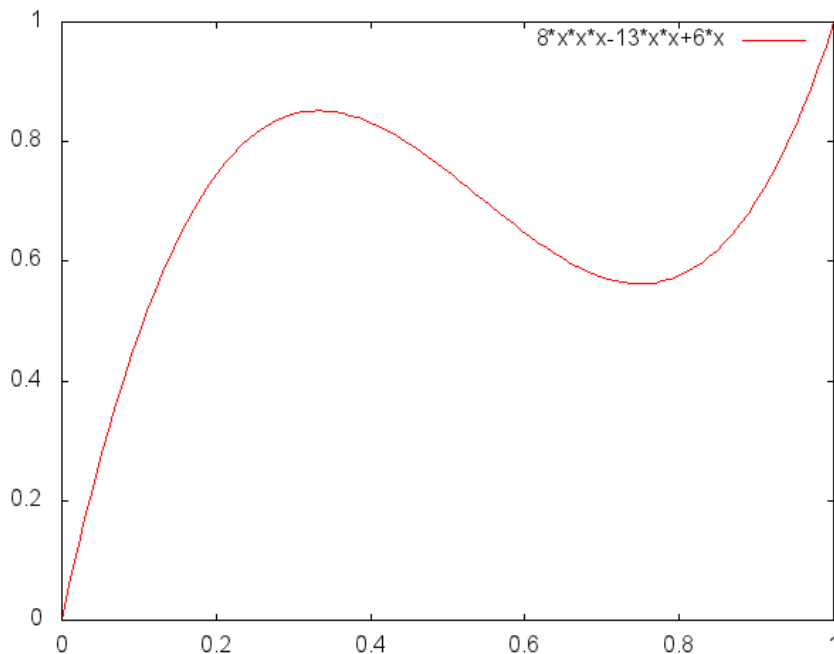


図1 $f(x)$ のグラフ

これを手書きで書けるようにするのが当面の目的である。そのためには、「増減表」というのを作らなければならない。そして増減表を作るためには、 f' と f'' の符号をメモしなければならないのである。以下、まずはその計算をしていこう。

まず、

$$f'(x) = 8(x^3)' - 13(x^2)' + 6(x)' = 24x^2 - 26x + 6$$

であり、

$$f''(x) = 24(x^2)' - 26(x)' + (6)' = 48x - 26$$

である。したがって後の式から、 $x < \frac{13}{24}$ ならば $f''(x) < 0$ 、 $x > \frac{13}{24}$ ならば $f''(x) > 0$ 、そして $x = \frac{13}{24}$ ならば $f''(x) = 0$ である。

次に $f'(x)$ であるが、これが 0 になるのは二次方程式の解の公式から、

$$x = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 24^2}}{48} = \frac{26 \pm 10}{48} = \frac{16}{48}, \frac{36}{48} = \frac{1}{3}, \frac{3}{4}$$

である。 $\frac{1}{3} < \frac{13}{24} < \frac{3}{4}$ なので、 f'' の符号から、 $f'(x)$ は $\frac{1}{3}$ の付近では減少的、そして $\frac{3}{4}$ の付近では増加的である。よって、以下のことがわかる。

- 1) $x < \frac{1}{3}$ ならば $f'(x) > 0$ であり、よって $f(x)$ は増加的である。ただし $f''(x) < 0$ なので、 $f'(x)$ は 0 に向かってどんどん減少していく。
- 2) $\frac{1}{3} < x < \frac{3}{4}$ ならば $f'(x) < 0$ であり、よって $f(x)$ は減少的である。このうち、 $\frac{1}{3} < x < \frac{13}{24}$ ならば f'' がマイナスなので、 f' はマイナス方向へさらに減少していき、結果として $f(x)$ の減少スピードはどんどん速くなる。一方で $\frac{13}{24} < x < \frac{3}{4}$ では f'' がプラスなので、 f' は逆にマイナス側から 0 に近づいていき、よって $f(x)$ の減少スピードはだんだん減っていく。
- 3) $\frac{3}{4} < x$ ならば $f'(x) > 0$ であり、また $f''(x) > 0$ でもある。よって $f(x)$ は増加していき、さらにその増加速度もどんどん増していく。

以上の結果を表にまとめたのが、以下の増減表である。なお、あらかじめ元の関数の形から、

$$f(0) = 0, f(1) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{13}{9} + \frac{6}{3} = \frac{23}{27}$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{8 \times 27}{64} - \frac{13 \times 9}{16} + \frac{6 \times 3}{4} = \frac{9}{16}$$

を計算しておく。

x	0	...	$\frac{1}{3}$...	$\frac{13}{24}$...	$\frac{3}{4}$...	1
f	0	増加、上に凸	$\frac{23}{27}$	減少、上に凸		減少、下に凸	$\frac{9}{16}$	増加、下に凸	1
f'	+	+	0	-	-	-	0	+	+
f''	-	-	-	-	0	+	+	+	+

この表を使えば、後は先ほど見せた図を書くのは容易である。特に重要なのはどこで増加から減少に転じるのかという情報であって、この情報があればたいのグラフは「それっぽく」見えるようになる。

・ Cauchy の平均値の定理

平均値の定理は強力な定理であるが、ほとんどまったく同じ証明法を用いてさらに強力な定理を示すことができる。それを次に紹介しよう。

Cauchy の平均値の定理： f, g が $a \leq x \leq b$ となる任意の x において連続で、また $a < x < b$ となる任意の x において微分可能であり、 $g(b) \neq g(a)$ で、さらに $a < x < b$ ならば $g'(x) \neq 0$ であるとする。このとき、

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす c が a と b の間に必ず存在する。

証明：まず、

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

と定義すれば、

$$h(a) = h(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

となる。よって Rolle の定理から $h'(c)$ となる c が a と b の間に存在するが、

$$0 = h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$$

であるから、これを整理して

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を得る。 ■

この結果が、様々な分析に重大な役割を果たす。

・l'Hopital の定理とその応用

まず、極限の計算に有用である l'Hopital の定理について述べる。この定理はしばしば有用であるが、その証明には先の Cauchy の平均値の定理を用いる。

l'Hopital の定理 : a は実数か $\pm\infty$ のいずれかとし、関数 f, g は a を除いた a の近くで微分可能であり、 g は a を除いた a の近くで $g(x) \neq 0$ と $g'(x) \neq 0$ を満たし、また $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ であるとする*3。このとき、仮に $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$ であったとすれば、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

が成り立つ。

証明 : 最初に a が実数であるケースを考えよう。必要ならば $f(a) = g(a) = 0$ と再定義してしまえば、 f も g も a の近く全体で定義された連続関数になる。したがって Cauchy の平均値の定理から、

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる c が x と a の間に存在する。 $x \rightarrow a$ のとき $c \rightarrow a$ なので、 $\frac{f'(c)}{g'(c)} \rightarrow \alpha$ となり、従って $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \alpha$ となる。これでこの場合は示せた。

次に、 $a = +\infty$ であるときを考える。 $h(x) = f(\frac{1}{x}), k(x) = g(\frac{1}{x})$ としよう。 $y = \frac{1}{x}$ とすると、 $x \rightarrow +\infty$ のとき $y \downarrow 0$ である。また、

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{h(y)}{k(y)}$$

であることもわかる。ところで、合成関数の微分の公式から

$$h'(y) = -\frac{f'(\frac{1}{y})}{y^2} = -\frac{f'(x)}{y^2}, \quad k'(y) = -\frac{g'(\frac{1}{y})}{y^2} = -\frac{g'(x)}{y^2}$$

なので、

$$\frac{h'(y)}{k'(y)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*3 この定理は $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ であるときにも成り立つが、その証明は若干難しい。

である。右辺は $x \rightarrow +\infty$ のときに α に収束するので、左辺は $y \downarrow 0$ のときに α に収束する。そこで先ほど示しておいた結果と同様にして、

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{h(y)}{k(y)} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{h'(y)}{k'(y)} = \alpha$$

となって、示したかったことが証明されたことになる。 $a = -\infty$ の場合も同様にすればよい。以上で証明が完成した。 ■

この定理を用いることで、いくつかの極限は劇的に計算しやすくなる。例を示そう。

例： $\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1}$ の計算

実際このとき、

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{2x}{e^x} = \frac{0}{1} = 0$$

となる。これで計算ができた。

・ Taylor 展開と Taylor 級数

Cauchy の平均値の定理のもうひとつの応用例を示しておこう。 f が難しい関数であるとき、その挙動を調べるのは多くの場合に難しい。そこで、より簡単な関数で f と似た動きをするものを見つけて、その関数を調べることで f を調べる代わりとすることが考えられる。この、より簡単な関数のことを f の近似と呼ぶが、今回は多項式で f を近似するときの近似式の作り方を考えてみよう。すると次の定理が成り立つ。

Taylor の定理： f は a の近くで n 回連続微分可能であるとし、

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i$$

と定義する*4。このとき、

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

*4 \sum の記号に慣れていない読者のために解説する。 $\sum_{i=0}^n a_n$ と書いてあったら、これは $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ のことを意味していると思ってよい。したがって、上に書いた $\sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i$ というのは、

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

を意味している。ちなみに $n!$ というのは 1 から n までのすべての数を掛け合わせてできる大きな数を表す記号で、「 n の階乗」と読む。

を満たす c が a と x の間に必ず存在する。特に、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

が成り立つ*5。

この $f(x) - R_n(x)$ で表される多項式のことを、 f の Taylor 展開と呼ぶ。これは x が a に近いときには非常に $f(x)$ と似た動きをする。特に $a = 0$ のときは Maclaurin 展開と呼ぶこともある。

まず正式な証明の前にアイデアを述べておこう。最初のアイデアは平均値の定理である。いま $x \neq a$ として、

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$$

となる c を a と x の間から取ってこよう。この両辺に $x - a$ を掛ければ、

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$$

である。そこでこれを変形すれば、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(c)(x - a) \\ &= f(a) + f'(a)(x - a) + (f'(c) - f'(a))(x - a) \end{aligned}$$

となる。この $(f'(c) - f'(a))(x - a)$ のことを $R_1(x)$ と上の定理では呼んでいるわけである。この $R_1(x)$ を誤差だと考えれば、 $f(x)$ の動きは $f(a) + f'(a)(x - a)$ という直線でおおむね近似できることになる。このようにして $f(x)$ をより簡単に動きが見える $f(a) + f'(a)(x - a)$ で近似してしまおうというのが Taylor の定理の考えていることである。

証明： $g(x) = (x - a)^n$ と定義しよう。ここで、合成関数の微分の公式を $x - a$ と x^n に適用すれば、

$$g'(x) = n(x - a)^{n-1}$$

であることが計算できる。よってこれを利用すれば、

$$g(a) = g'(a) = g''(a) = \dots = g^{(n-1)}(a) = 0$$

*5 これは $R_n(x)$ が、 x が a に近づくに従って $(x - a)^n$ より早い速度で 0 に近づくことを意味する。この事実を表す記号として、 $R_n(x)$ を $o((x - a)^n)$ と書くことがある。

$$g^{(n)}(x) = n!$$

であることは簡単にわかる。また一方で地道な計算により、

$$R_n(a) = R'_n(a) = \dots = R_n^{(n-1)}(a) = 0$$

$$R_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)$$

であることも計算できる。そこで Cauchy の平均値の定理から、

$$\begin{aligned} \frac{R_n(x)}{g(x)} &= \frac{R_n(x) - R_n(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{R'_n(x_1)}{g'(x_1)} \\ &= \frac{R'_n(x_1) - R'_n(a)}{g'(x_1) - g'(a)} = \frac{R''_n(x_2)}{g''(x_2)} \\ &= \dots \\ &= \frac{R_n^{(n)}(x_n)}{g^{(n)}(x_n)} \\ &= \frac{f^{(n)}(x_n) - f^{(n)}(a)}{n!} \end{aligned}$$

となるような、 x と a の間の x_1 、 x_1 と a の間の x_2 、 \dots x_{n-1} と a の間の x_n がそれぞれ存在する。そこで $x_n = c$ と置いて上の式を整理すれば、

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

となる。特に、

$$\frac{R_n(x)}{(x - a)^n} = n!(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a))$$

であるが、 $x \rightarrow a$ のとき $c \rightarrow a$ なので、この右辺は 0 に収束する。以上で証明が完成した。 ■

以下、余談。興味ない生徒は読まなくてよい。

Taylor の定理で特に興味深いのは、 $R_n(x)$ が x を固定して n を増やしていくと 0 に近づいていくケースである。この場合、

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i + R_n(x)$$

の n を ∞ に向けて極限を取れば、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

という式ができる。この右辺を、 f の Taylor 級数と呼ぶ。

実のところ、ここまでのこの講義で扱ってきたほとんどすべての関数は Taylor 級数に展開することが可能であり、たとえば、 $a = 0$ と設定することで、

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

であるとか、

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

であるとか、

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

であるとかいう結果はすぐに確認できる。また $a = 1$ で議論すれば、 $|x - 1| < 1$ であるときに

$$\log x = \frac{1}{1}(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

であるとかいった結果もすぐに出る。

これらの結果は、しかし、実は少し色物の関数を使い出すととたんに成り立たなくなる。たとえば、次の有名な関数を考えてみよう。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

L'Hopital の定理を何度も繰り返し適用することで、この関数は $x = 0$ を含めてすべての点で何回でも微分でき、特に $f'(0) = 0, f''(0) = 0, \dots$ が成り立つことが確認できる。もしこの関数が 0 の近くで Taylor 級数に展開できるとすれば、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!}x^n = 0$$

が成り立っていないなければならないことになる。しかし明らかに、 $x > 0$ のときこの等式は成り立っていない。

このような関数には注意が必要である。Taylor 級数に展開可能な関数は解析関数と呼ばれ、数学の中ではかなり特別な関数になる。解析関数については膨大な理論があるが、それについて深入りすることはこの講義ではしない。しかし、上で挙げた f のケースのように、何回でも微分できるが解析関数でない関数というのは実在するのである。