経済数学（法政用）: 第 7 章

細矢祐誉

テーマ：偏微分

・多変数関数と偏微分

これまで扱ってきた関数は、実数を入れると実数が帰ってくる関数、つまりは $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ のケースであった。一方で、n 次元ベクトル $a=(a_1,...,a_n)$ というものを考えよう。これは数が n 個並んだだけのものであるが、このベクトルをすべて集めてできる集合を $\mathbb{R}^n$ と書き、n **次元ユークリッド空間**と呼ぶ。

今回考えるのは $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ という形の関数である。この関数は n 次元のベクトルを与えると、m 次元のベクトルが返ってくる関数である。ところがこれは、$f^1,f^2,...,f^m$ という m 個の関数で、$f^j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ となるものがあれば、$f=(f^1,f^2,...,f^m)$ という風に書けてしまう。よって上の関数は、m 個の実数値関数を集めたものと考えてもよい。また、入れるものも n 次元のベクトルではなく、「n 個の実数を入れる」と考えてもよい。$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ は、「n 個の数を入れると m 個の数が返ってくる」関数だとまとめてもよい。$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ のとき、これを「n 変数の多変数関数」と呼ぶことがある。

さて、最も初歩的な多変数関数として、$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$、つまりは二変数関数を考えてみよう。次に挙げる関数はすべて、二変数の関数の例である[*1]。

$$\begin{aligned}
f_1(x,y)&=xy-2xy^2\\
f_2(x,y)&=x^4+3xy-2\\
f_3(x,y)&=x+y\\
f_4(x,y)&=xy\\
f_5(x,y)&=\sqrt{xy}\\
f_6(x,y)&=\frac{y}{x}\\
f_7(x,y)&=x^ay^b\\
f_8(x,y)&=x\sin y\\
f_9(x,y)&=\log x+\log y\\
f_{10}(x,y)&=e^{xy}\\
f_{11}(x,y)&=(ax^c+by^c)^{\frac{1}{c}}\\
f_{12}(x,y)&=g(x)+y
\end{aligned}$$

ax^ny^m という形の項をいくつも足し合わせてできる形の関数はすべて多項式と呼ばれる。

[*1] x_1,x_2 と書くべきところは、適宜 x,y と書いてよい。

f_1 から f_4 まではすべて多項式である。これらの多項式のうち、各 ax^ny^m のことを項と呼び、そのとき $n+m$ の値のことをその項の次数と呼ぶ。多項式 f の項の中で最も大きな次数を持つ項の次数が N であるとき、f は N 次の多項式、と呼ばれる。たとえば f_1 は 3 次の多項式であり、f_2 は 4 次の多項式である。f_3 は 1 次の多項式で、f_4 は 2 次の多項式である。

一方、f_4, f_5, f_6 はすべて f_7 の特殊例である。たとえば、f_7 で $a=1, b=1$ だったら f_4 の形になる。$a=b=\frac{1}{2}$ だったら f_7 は f_5 になる。$a=-1, b=1$ だったら f_7 は f_6 の形と一致する。特に、$0<a<1$ で、かつ $b=(1-a)$ であるとき、この形の f_7 のことを Cobb=Douglas 型の関数と呼ぶ。この形の関数は経済学で頻出する。

f_{11} は非常に有名な関数である。この形の関数は消費者理論でよく登場し、この形の効用関数を持つ消費者について代替の弾力性と呼ばれる数値を計算すると、それが定数になるという性質を持っている。このため、この関数は代替の弾力性一定（constant elasticity of substitution）型、または省略して CES 型と呼ばれる。

f_{12} もしばしば扱われる関数である。この形の関数は準線形と呼ばれ、消費者理論をはじめとしたさまざまな理論でよく現れる。

・偏微分

さて、このような関数について、まずは微分の概念を定義したい。一変数の関数であれば、微分は簡単に定義できた。しかし多変数の関数については、微分自体を定義することが難しく、いくつも「微分」と呼ばれている概念がある。今回はそのうち最も簡単な、「偏微分」というものについて勉強しよう。

定義：$\mathbb{R}^n$ の部分集合 A 上で定義される関数 $f: A \to \mathbb{R}^m$ と $a=(a_1,...,a_n) \in \mathbb{R}^n$ について、

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, a_2, ..., a_i+h, ..., a_n) - f(a)}{h} = c$$

となる数 c があるとき、f は a において x_i について偏微分可能である、と言う。このとき、この数 c のことを f の a における x_i についての偏微分の値、と呼び、$f_{x_i}(a)$ という記号で書く[*2]。もし f がすべての点で x_i について偏微分可能であるならば、x に対して $f_{x_i}(x)$ を返す関数 f_x のことを、f の x_i についての偏導関数と呼ぶ。

[*2] 本によっては $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ などという書き方をしている場合もある。ここで ∂ はラウンドデルタ、あるいは省略してラウンドと呼ばれる記号である。

見ての通り、f の x_i についての偏微分とは、$x_1, ..., x_n$ のうち x_i 以外を定数と見なして x_i だけの関数として見たときの微分の値のことである。

・偏微分の計算

それではこれを、具体的に先ほど例示した二変数関数で計算してみよう。

(a, b) における偏微分を計算するには、偏導関数を最初に示してしまって、後でその偏導関数の (x, y) に (a, b) を代入するのが最も早く計算が終わる。そこで、ここでは偏導関数の計算を例として見せることにする。

・$f_1(x, y) = xy - 2xy^2$ の場合

この場合、x についての偏導関数を求めるには、y を定数と見なして x だけの関数と思って微分を計算すればよい。そこで位置変数関数の $(f(x))'$ などの記法と同様に、$(f(x, y))_x$ という記号を x についての偏微分を表す記号として使ってみよう[*3]。計算のコツは一変数の場合と同様であり、やってみると

$$\begin{aligned} f_{1,x}(x, y) &= (xy - 2xy^2)_x \\ &= (xy)_x - (2xy^2)_x \\ &= y(x)_x - 2y^2(x)_x \\ &= y - 2y^2 \end{aligned}$$

がわかる。同様に、

$$\begin{aligned} f_{1,y}(x, y) &= (xy - 2xy^2)_y \\ &= (xy)_y - (2xy^2)_y \\ &= x(y)_y - 2x(y^2)_y \\ &= x - 4xy \end{aligned}$$

である。

したがって、たとえばもし $(a, b) = (1, 2)$ のときの偏微分が計算したいなら、これらの関数の x に 1 を、y に 2 を代入すればよい。計算すると、

$$f_{1,x}(1, 2) = -6$$

$$f_{1,y}(1, 2) = -7$$

[*3] この記号はあまり標準的ではないので、他の場所で使う場合には注意。

である。

・$f_2(x,y) = x^4 + 3xy - 2$ の場合
　この場合も同様に計算すれば、

$$f_{2,x}(x,y) = 4x^3 + 3y$$
$$f_{2,y}(x,y) = 3x$$

であることがすぐにわかる。

・$f_3(x,y) = x + y$ の場合
　この場合もまったく同様にして、

$$f_{3,x}(x,y) = 1$$
$$f_{3,y}(x,y) = 1$$

がわかる。

・$f_7(x,y) = x^a y^b$ の場合
　この場合、y^b は x の偏微分を計算する際には定数として扱われる。よって、

$$f_{7,x}(x,y) = ax^{a-1}y^b$$

である。同様に、x^a は y の偏微分を計算する際には定数として扱われる。よって、

$$f_{7,y}(x,y) = bx^a y^{b-1}$$

である。

・$f_8(x,y) = x \sin y$ の場合
　この場合、$\sin y$ は x の偏微分を計算する際には定数として扱われる。よって、

$$f_{8,x}(x,y) = \sin y$$

である。同様に計算すれば、

$$f_{8,y} = x \cos y$$

である。

・$f_{11}(x,y) = (ax^c + by^c)^{\frac{1}{c}}$ の場合

この場合、y^c は x の偏微分を計算する際には定数として扱われる。後は合成関数の微分の公式を地道に使えば、

$$f_{11,x}(x,y) = a(ax^c + by^c)^{\frac{1}{c}-1}x^{c-1}$$

を計算できる。同様にして、

$$f_{11,y} = b(ax^c + by^c)^{\frac{1}{c}-1}y^{c-1}$$

を計算できる。

このような計算で偏微分を計算することができる。実際に手を動かして計算し、上の結果が合っているかどうか確かめてみると、計算のよい訓練になるだろう。

問題１：上で偏微分を計算しなかった、$f_4, f_5, f_6, f_9, f_{10}, f_{12}$ について、偏導関数を求めてみなさい。

・二階の偏微分

前期の授業で、一変数関数の二階の微分について扱い、それが最大化問題を解く際に重要になることを示した。今回は、その二階の微分に当たるものを二変数関数にどう定義するかを議論しておきたい。

まず、すでに上で $f(x)$ の偏導関数 f_{x_i} について定義した。この偏導関数がすべての i についてについて連続であるとき、f は**連続微分可能**である、と言う。

連続微分可能と偏微分可能は大きな違いがある。たとえば、a で f が x と y のどちらについても偏微分可能であるにもかかわらず、f では連続でない関数も存在する。例としては原点 $(0,0)$ における

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{if } y = x^2, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

などがある。一変数関数では微分可能である関数は連続だったが、二変数関数ではそうではないのである。しかし、f が a の近くで連続微分可能であれば、f は連続であることが示せる。

さて、二階微分の定義を示そう。

f_{x_i} の x_j についての偏導関数を $f_{x_ix_j}$、あるいは $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ と書く。x_i と x_j の順番が書き方によって変わることに注意。もし $i = j$ なら、後者は単に $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ と書かれることもある。

二階の偏導関数がすべて存在してしかも連続であるとき、f は**二階連続微分可能**であると言う。経済学に出てくるたいていの関数は二階連続微分可能である。

・二階の偏微分の計算

それではこれを、さきほど例示したいくつかの関数で計算してみよう。

・$f(x,y) = xy - 2xy^2$ の場合

さきほど、

$$f_x = y - 2y^2$$

$$f_y = x - 4xy$$

を示した。これをもう一回 x や y で微分することで、二階の偏導関数が計算できる。やってみると、

$$f_{xx} = 0$$

$$f_{xy} = 1 - 4y$$

$$f_{yx} = 1 - 4y$$

$$f_{yy} = -4x$$

がわかる。$f_{xy} = f_{yx}$ となることに注意。

・$f(x,y) = x^4 + 3xy - 2$ の場合

さきほど、

$$f_x = 4x^3 + 3y$$

$$f_y = 3x$$

を示した。よって、

$$f_{xx} = 12x^2$$

$$f_{xy} = 3$$

$$f_{yx} = 3$$

$$f_{yy} = 0$$

がわかる。ここでも $f_{xy} = f_{yx}$ である。

・$f(x,y) = x + y$ の場合

　さきほど、

$$f_x = 1$$

$$f_y = 1$$

を示した。よって、

$$f_{xx} = f_{xy} = f_{yx} = f_{yy} = 0$$

がわかる。

・$f(x,y) = x^a y^b$ の場合

　さきほど、

$$f_x = ax^{a-1}y^b$$

$$f_y = bx^a y^{b-1}$$

を示した。ここから計算すれば、

$$f_{xx} = a(a-1)x^{a-2}y^b$$

$$f_{xy} = abx^{a-1}y^{b-1}$$

$$f_{yx} = abx^{a-1}y^{b-1}$$

$$f_{yy} = b(b-1)x^a y^{b-2}$$

がわかる。ここでもまた、$f_{xy} = f_{yx}$ であることが示されている。

・$f(x,y) = x \sin y$ の場合

　さきほど、

$$f_x = \sin y$$

$$f_y = x \cos y$$

を示した。よって、

$$f_{xx} = 0$$

$$f_{xy} = \cos y$$

$$f_{yx} = \cos y$$

$$f_{yy} = -x \sin y$$

がわかる。これも $f_{xy} = f_{yx}$ となっている。

・$f(x,y)=(ax^c+by^c)^{\frac{1}{c}}$ の場合

さきほど、

$$f_x=a(ax^c+by^c)^{\frac{1}{c}-1}x^{c-1}$$

$$f_y=b(ax^c+by^c)^{\frac{1}{c}-1}y^{c-1}$$

を計算した。そこでこれをもう一回微分すると、

$$f_{xx}=ab(c-1)(ax^c+by^c)^{\frac{1}{c}-2}x^{c-2}y^c$$

$$f_{xy}=ab(1-c)(ax^c+by^c)^{\frac{1}{c}-2}x^{c-1}y^{c-1}$$

$$f_{yx}=ab(1-c)(ax^c+by^c)^{\frac{1}{c}-2}x^{c-1}y^{c-1}$$

$$f_{yy}=ab(c-1)(ax^c+by^c)^{\frac{1}{c}-2}x^cy^{c-2}$$

がわかる。ここでもまた、$f_{xy}=f_{yx}$ である。

以上のケースを見ると、そのすべてにおいて $f_{xy}=f_{yx}$ となっていることがわかる。それでは、これはどんな場合にも成り立つのだろうか、という疑問が浮かぶのだが、残念ながらこれは次の例を見れば成り立たないことがわかる。

例：次の関数、

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x\neq 0 \text{ または } y\neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

を考える。このとき、簡単な計算によって、$(x,y)\neq(0,0)$ ならば

$$f_x(x,y)=\frac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

がわかる。よって特に、$y\neq 0$ のとき $f_x(0,y)=-y$ である。また $f_x(0,0)=0$ も計算できる。したがってどんな y に対しても $f_x(0,y)=-y$ なので、$f_{xy}(0,0)=-1$ であることがわかる。同様にすれば、$f_{yx}(0,0)=1$ も計算できる。よって $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ である。

次の節で我々は、$f_{xy}=f_{yx}$ が成り立つのはどういう場合かについて、もう少しだけ深く見ていくことにする。

問題２：上で二階の偏微分を計算しなかった、$f_4, f_5, f_6, f_9, f_{10}, f_{12}$ について、二階の偏導関数を求めてみなさい。

・ヤングの定理

春学期で、いわゆる平均値の定理について学習した。f が微分可能なとき、a と b の間にある c をうまく取ると、

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

となる、というのがその内容だった。特に $b = a + h$ とすれば、上の式は

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h)$$

となる、$0 < \theta < 1$ となる定数 θ が存在する、という意味になる。

今回はこの定理を使って、次の結果を導出しよう。

定理１ (Young) : f_{xy} と f_{yx} が共に (a,b) の近くで定義されて連続であるとき、$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ が成り立つ。

証明のために、

$$\Delta(h) = f(a+h, b+h) - f(a+h, b) - f(a, b+h) + f(a,b)$$

と定義しよう。実は、

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{xy}(a,b)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}(a,b)$$

のふたつが示せるのである。これがもし正しいとすれば明らかに $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ であるから、我々の証明の目標は、このふたつの式を示すことだけになる。

証明はどちらも同様なので片方だけ示すことにし、

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{xy}(a,b)$$

だけを目標としよう。

まず、

$$p(x) = f(x, b+h) - f(x, b)$$

と置く。すると、

$$\Delta(h) = p(a+h) - p(a)$$

であるから、平均値の定理から $0 < \theta_1 < 1$ となるある θ_1 に対して、

$$\Delta(h) = hp'(a + \theta_1 h)$$

となる。ところが一方で、

$$p'(x) = f_x(x, b+h) - f_x(x, b)$$

だから、これは

$$\Delta(h) = h[f_x(a+\theta_1 h, b+h) - f_x(a+\theta_1 h, b)]$$

を意味する。そこで今度は

$$q(y) = hf_x(a + \theta_1 h, y)$$

として平均値の定理を適用すれば、$0 < \theta_2 < 1$ となるある θ_2 に対して、

$$\Delta(h) = hq'(b + \theta_2 h)$$

となる。一方で

$$q'(y) = hf_{xy}(a + \theta_1 h, y)$$

であるから、上の結果は

$$\Delta(h) = h^2 f_{xy}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 h)$$

となる。よって、

$$\frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{xy}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 h)$$

であるから、$h \to 0$ のとき明らかに右辺は $f_{xy}(a, b)$ に収束し、よって、

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{xy}(a, b)$$

が示せた。これで証明が完成したことになる。

問題３：上の証明について、省略した $\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}(a, b)$ のほうも示してみなさい。