講義ノート：総合講座（第一回）

細矢祐誉

テーマ：実数の基本性質（１）

・述語論理

本講義は主に、中央大学経済学部の講義体系では扱い切れていないが、経済学を本格的に勉強するためには欠かせないような数学的知識を補完するために行われる。その際、最も重要になるのが論理についての基本的な組み立て方である。

論理の基本的なところは高校数学で扱われていると思われる。つまり、たとえば「ＢならばＡ」という言葉は、Ｂが偽でＡが真ならば真であるが、逆にＢが真でＡが偽ならば偽である、などといった議論は、聞いたことがある学生が大半だろう。しかし、これは「命題論理」である。そして数学で使うために必要なのは「述語論理」という、もう一段階高等な論理なのである。

述語論理の世界では、ＢとかＡに「変数」が入る。つまり、「$B(x)$ ならば $A(x)$」といった文章が使われる。たとえば、「x が偶数ならば x^2 は４の倍数である」といった文章を扱いたいのである。これは、高校数学の論理学だけでは扱いきれない。

さらに、「すべての x に対して」とか、「ある y が存在して」といった文章を頻繁に使う。しかしこれらをいつも文章に表していた場合、非常に面倒な文を何度も何度も書くことになりかねない。そこで論理学者は略するための記号を作り出した。それが $\forall$ と $\exists$ の二つの記号である。「すべての x に対して」は「$\forall x$」と書かれるし、「ある y が存在して〇〇を満たす」は「$\exists y$ s.t. 〇〇」と書かれる[*1]。

たとえば、高校数学で概念だけ出てきて定義されていない「関数の連続性」は、正確には以下の論理式で定義される。

$$\forall x,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon. \tag{1}$$

この文章がなぜ連続性なのか、という解説は後回しにするとして、とりあえず読み方を説明しよう。まずこの文章の最初には $\forall x$ がある。これは「すべての x に対して」である。次に、$\forall \varepsilon > 0$ と書かれているが、これは「すべての正の数 ε に対して」という意味である。「正の数 ε」と書く代わりに「$\varepsilon > 0$」と略記していることに注意しよう。次は $\exists \delta > 0$ s.t. が来るので、「ある正の数 δ が存在して、以下を満たす」という意味である。最後に書かれているのは普通の命題論理の式なので、これは普通に「$|y - x| < \delta$ ならば

[*1] s.t. というのは such that という英語の略記である。

$|f(y)-f(x)|<\varepsilon$ である」と読めるだろう。したがって (1) 式は日本語に直すと以下のようになる。

「すべての x と、すべての正の数 ε に対して、ある正の数 δ が存在して、条件『$|y-x|<\delta$ ならば $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$ となる』を満たす」

慣れれば (1) の式が上の日本語を意味することはすぐにわかるようになる。そして後でわかることだが、(1) の方が日本語の文よりも優れている点はいくつかあるので、数学ではよく使われる。

ちなみに、(1) を、

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall x,\ \exists\delta>0 \text{ s.t. } |y-x|<\delta \Rightarrow |f(y)-f(x)|<\varepsilon$$

と書き直しても、意味は変わらない。記号 $\forall$ がついているもの同士で順番を入れ替えても、本質的にはなにも変わらないのである。ところが、これをさらに進めて

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \text{ s.t. } \forall x,\ |y-x|<\delta \Rightarrow |f(y)-f(x)|<\varepsilon \tag{2}$$

とすると、意味合いがまったく変わってしまう。たとえば、$f(x)=x^2$ という、とてもよく見かける関数を考えてみよう。後の授業で、我々はこの関数が (1) を満たすことを証明する。しかし一方で、この関数は (2) を満たさない。例として、$\varepsilon=1$ としてみよう。(2) が正しければ、ある $\delta>0$ が存在して、$|y-x|<\delta$ でさえあれば $|y^2-x^2|<1$ である、ということになる。しかし、N を十分大きく、$\frac{1}{\delta}$ より大きい自然数として取った場合、$x=N, y=N+\frac{\delta}{2}$ とすれば、

$$y^2-x^2=\left(N+\frac{\delta}{2}\right)^2-N^2=\delta N+\frac{\delta^2}{4}>\delta N>1$$

となって、矛盾が生じてしまう。よって、このような $\delta>0$ は絶対に存在しない。ここからわかるのは、$\forall$ のところと $\exists$ のところはうかつに順序を交換してはいけない、ということである。これは複雑な問題だとプロの数学者ですらしばしば犯す間違いなので、注意しなければならない。

……さて、ところで。

いま、上の議論で、「N を十分大きく、$\frac{1}{\delta}$ より大きい自然数として取った場合」という文章がでてきた。しかし、そのような大きな自然数は本当に存在するのだろうか？

当然存在する、と思う学生は多いだろう。しかし、現代数学ではこのような「当然」は、すべて疑いの対象として見られるのである。この問題は古典的であって、紀元前の頃から

議論があった。紀元前３世紀、アルキメデスという数学者がとある図形の面積を求めようとしたとき、論理の最後の詰めでこの問題が立ちはだかったのである。アルキメデスはこの問題を解決するために、「すべての数に対してそれより大きな自然数が存在する」という前提を「認めてもらえるとすれば」この図形の面積は〇〇である、という文章を自分の結論として提出した。そのため、この文言

「すべての数に対して、それより大きな自然数が存在する」

は、**アルキメデスの原理**と呼ばれている。

１９世紀、このような「原理」は果たしてどのような前提があれば成り立つのかについて、数学の探究を深めていこうとする研究グループがあった。彼らは熱心に研究して、最初は「実数」というものについて、大半の数学者から正しいとして合意を得られる性質を「公理」と呼び、その「公理」から得られる結論は正しいということにして数学を厳密に構築しようとした。後にそのグループは「実数」ではなく「自然数」へ、さらには「集合」へと公理を置く対象を変えていき、抽象的な理論から得られる結論の限界を見極めるための議論を深めていった。この動きは１９３１年に「ゲーデルの不完全性定理」という、彼らがやろうとしていたことが「できない」ということを証明する定理が発表されるまでは活発に続いたが、その後は少し下火になっている。

ともあれ、本講義でもいったんはこの「実数の公理」から出発して、その公理から得られる結果を整理することから始めたい。現代の数学が用いている「実数の公理」から出発すれば、アルキメデスの原理は公理ではなく、「定理」として証明できる。したがって上の議論で現れた問題はきちんと解決するのである。

・実数

この「実数」という概念がなにを表すかについては、非常に長い歴史上の議論がある。まず、**自然数**と呼ばれる概念に触れよう。これは、0 から出発して、「+1 する」という操作を何回か繰り返してできる数を指す言葉である。たとえば 2 は、0 に +1 して、それからもう一度 +1 すれば到達できるので、自然数である。2.5 はこのやり方では到達できないので、自然数ではない。

0 自身を自然数と見なすかどうかには論争があり、数学者の中にも、派閥のようなものができていて、教科書ごとに自然数に 0 が含まれるかどうかが変わる。とりあえずこの講義では 0 を自然数の中に含める方を原則として採用することにする。したがって自然数とは $0, 1, 2, 3, \ldots$ といった数になる。ただし、不便な場合には 0 を自然数から除外して考え

ることを妨げない。このあたりは適宜柔軟に議論することにする。

自然数にマイナス符号をつけてできる数 $-1, -2, -3, ...$ は自然数とは呼ばれないが、**整数**と呼ばれる。もちろん、自然数も整数と呼ばれる。

整数ふたつの比でできる分数 $\frac{n}{m}$ は**有理数**と呼ばれる。ただし、m に 0 を選ぶことは禁止されている。どんな整数 n も $\frac{n}{1}$ と書けるので、これは有理数である。一方で $2.5 = \frac{5}{2}$ は有理数であるが、整数ではない。

ここまでは、紀元前六世紀のピタゴラス教団がすでに取り扱っていた数である。いわゆる三平方の定理の発見者として知られるピタゴラスは数を崇拝する団体を作っていて、そこで秘密の研究が行われていたとされている。いまとは違って特許権などがない時代なので、当時の数学者たちは発明を外部に漏らすことを大変嫌った。彼らだけが解決できる問題が、他人に解決できることになれば、依頼が減り、収入も減ってしまうからである。この風潮はそれ以降もかなり長い間続き、たとえば１６世紀には三次関数の解の公式を巡って裁判まで起こっている。

ピタゴラス教団、特にピタゴラスは有理数という概念を非常に好んでいたようで、数はすべて有理数だと考えていたようである。したがってその当時の彼らに「実数」という概念について尋ねれば、有理数だという答えが返ってきただろう。ところがここで困ったことがあった。次の図１を見てみよう。

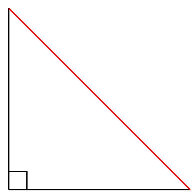

図１　直角二等辺三角形

見ての通り、この図はとても簡単な直角二等辺三角形の図である。短い辺の長さは１であるとする。問題は長い辺である赤い線の長さである。三平方の定理によれば、直角三角形の斜辺の長さの二乗は、それ以外の辺の長さの二乗の合計と等しい。したがってこの赤い線の長さを x とすると、

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

という式が成り立たなければならない。問題は、この x が有理数でないということが、比較的簡単に証明できてしまうことである。

ピタゴラスによれば、すべての数は有理数である。しかし上の数 x は有理数ではない。証明は簡単で、間違いは見つかりそうになかった。となると x は数ではないことになる

が、そうすると赤い線の長さは数ではないことになってしまう。伝説によると、ピタゴラスはこの問題を発見した弟子を処刑することで問題を解決したという。秘密の研究団体であるピタゴラス教団ならばそれでよかったのだが、現代社会において上の x（これは $\sqrt{2}$ という名前が与えられた数である）が有理数でないことはよく知られているため、困ったことになる。

しかし、なぜこの問題は深刻なのだろうか？　考えてみると、つまりそれは赤い線の長さが測れないという点にあるように思える。ということは、問題の前提として、**実数とは、およそあり得るすべての線の長さを表現できるものでなければならない**という哲学があるように見える。もしこの哲学を放棄すれば、赤い線の問題は、「x は数ではない」と言って解決することができる。しかしそれはどうも、多くの数学的な問題では望ましくないようなのだ。

したがって、実数には「線の長さはすべて表現できる」という性質が必要だと考えてみよう。これをどう数学的に表現するべきだろうか？　そのためには、数直線という概念を少し考えないといけない。

・数直線

学生諸君が数直線を見たことがない、ということはまずないと思われるが、一応念のために数直線の概念を示しておこう。それは、次の図 2 のような直線で示される。

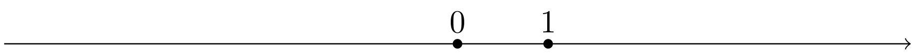

図 2　数直線

この数直線にはふたつの点が必要である。まず基準点となる点で、これは 0 と書かれる。次に、長さの単位になる点で、これは 1 と書かれる。1 は 0 の右側に書くのが普通である。

0 と 1 があれば、それ以外の点を書き込んでいくのは容易である。たとえば、1 の位置に 0 を移動させた場合に、1 が移動する場所を見てみよう。この点は 2 と呼ばれる。(図 3）

同様にして、3 や 4 も図に書くことができる。

今度は 0 の位置をそのままにして、数直線を反転させてみよう。そのとき 1 がある場所は、元の数直線では -1 と書かれる。(図 4）

これも同様にして、-2 や -3 も書くことができる。

今度は 0 の位置をそのままにして、1 が 2 になるような、新しい数直線を書いてみよう。

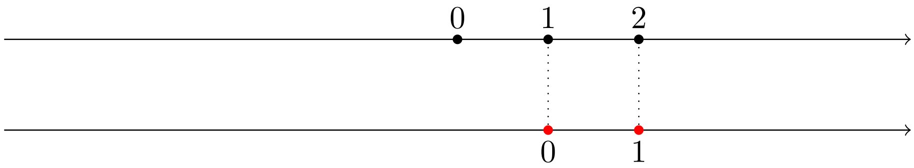

図 3　数 2 の発見

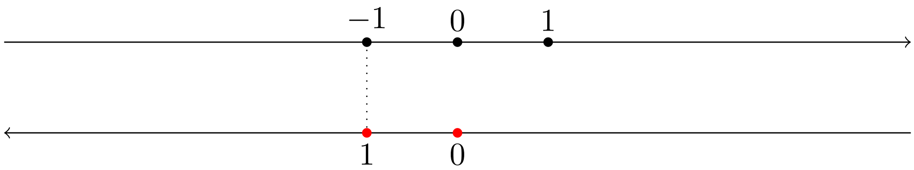

図 4　数 −1 の発見

その新しい数直線で 1 になっている数は $\frac{1}{2}$ と書かれる。（図 5）

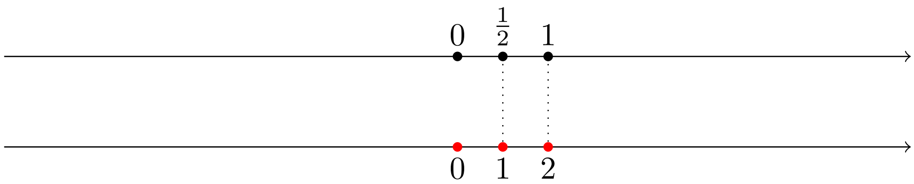

図 5　数 $\frac{1}{2}$ の発見

もちろん、$\frac{5}{2}$ が欲しければ、下の数直線で 5 になっているところを上の数直線で見ればよい。（図 6）

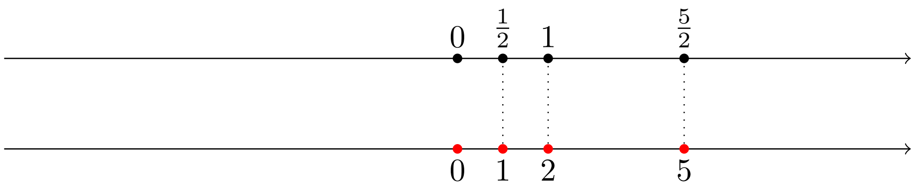

図 6　数 $\frac{5}{2}$ の発見

というわけで、数直線はずらしたり、反転させたり、縮尺を変えたりする操作によって、自在に有理数を生み出すことができることがわかった。この意味で、数直線はどうやら「すべての有理数」という概念は少なくとも含んでいるわけである。

では、哲学の話に戻ろう。我々が考える実数というのは、「どんな線も長さを測れなければならない」という要請を満たさなければならない、という話だった。これを数直線に置き換えると、「どんな場所に目盛りを打っても、その点に対応する『数』が存在しなければならない」ということになる。（図７）

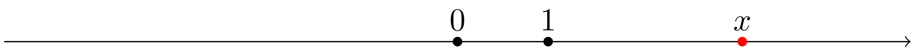

図７　謎の数 x

図７では、非常に適当に点を打ち、その上に x という文字を載せてある。この x に対応する数が必ずなければならない、というのが、ピタゴラス教団の問題から我々が継承し続けている「哲学」である。これを、もっと厳密に数学的な用語で表すことができないだろうか。そのためには、少し寄り道して集合論の話をする必要がある。

・デデキントの切断公理

まず、集合という概念の話をしよう。集合とは、なんらかのものの集まりを数学的に表したものである。簡単な集合は、中に入っているものを列挙することで書くことができる。たとえば、

$$\{1, 2, 3\}$$

などといった感じである。なお、集合には「何個入っているか」という情報は意味がないと見なされる。したがって

$$\{1, 2, 3, 3\}$$

と書いても、

$$\{1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3\}$$

と書いても、これらの集合は全部同じである。

ある要素が集合に入っているのを書くときには、$\in$ という記号が使われる。たとえば、

$$2 \in \{1, 2, 3\}$$

などと書かれる。入っていないときには $\notin$ が使われる。たとえば

$$4 \notin \{1, 2, 3\}$$

などと書かれる[*2]。

しかし、上記の「全部書く」という操作ができるのは簡単な集合のみである。実際には、「すべての偶数の集合」などというものは要素を無限に含むため、書くことができない。そこで、数学者は次のような書き方を編み出した。

$$\{x|x \text{ は偶数 }\}$$

この書き方は、まず | という記号の左側が「入っているものの名前」で、右側が「入っているための条件」になっている。ただし、厳密にはこの書き方はまずいこともわかっていて、無制限にこういう書き方をするととんでもないことが起こる[*3]。現在の数学で最も歓迎される書き方は、この集合がすでに知られている集合の一部であることを、あらかじめ | の左側に最初から書いてしまうことである。たとえば、整数をすべて集めてできた集合 $\mathbb{Z}$ を用いて、

$$\{x \in \mathbb{Z}|x \text{ は偶数 }\}$$

と書けば、とりあえず問題は回避できる。

上で $\mathbb{Z}$ が出てきたが、自然数の集合 $\mathbb{N}$ や有理数の集合 $\mathbb{Q}$、それから実数の集合 $\mathbb{R}$ や複素数の集合 $\mathbb{C}$ のように、いくつかの有名な集合にはそれ相応の名前がついている。これらは、無条件に使ってよい集合として知られている。

次に、合併と共通部分という二つの概念を説明しよう。集合 A, B に対して、$A \cup B$ という記号で、A と B のどちらかに含まれるものをすべて集めた集合を書くことにする。これは A と B の**合併**と呼ばれる。また、$A \cap B$ という記号は、A と B の両方に含まれるものをすべて集めたものを表すとし、これは A と B の**共通部分**と表すことにする。

A の要素がすべて B の要素でもあるとき、A は B の**部分集合**と呼び、$A \subset B$ と書く。また、ひとつも要素を含まない集合は**空集合**と呼び、$\emptyset$ という特別な記号で書く。

以上で準備が整った。実数 $\mathbb{R}$ の空集合ではない部分集合 A と B のペアは、以下の 3 つの条件を満たすとき、実数の**切断**と呼ぶ。

1) $A \cup B = \mathbb{R}$ である。
2) $A \cap B = \emptyset$ である。
3) $a \in A$ で $b \in B$ ならば $a < b$ である。

[*2] この $\in$ は、百年前には ε と書かれていたものが、だんだん崩れてきていまの形になったものであって、本来は $\varepsilon\sigma\tau\iota$ という古代ギリシア語の語彙の省略形である。これは英語の 'is' に当たる。たとえば He is Japanese という文は「彼」が「日本人」という集合に入っていることを指すが、それと同じ意味だと思えばよい。

[*3] 知りたい学生は「ラッセルのパラドックス」という語を調べるとよい。

こう書いただけではわからないだろうから、再び数直線で説明しよう。図 7 をもう一度見てもらいたい。この図の赤い点を境に、数直線を二つに「切断」したのが図 8 である。

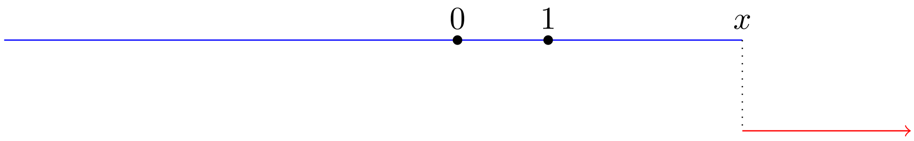

図 8　謎の数 x での切断

このように、数直線を x の点で左側と右側に分けてみて、色をつけた場合、青い線の部分が A で、赤い線の部分が B である。切断の条件 1) は、数直線の要素は切った後もどちらかの線に含まれていることを示している。条件 2) は、上と下の線に共通部分がないことを示している。そして条件 3) は、青い線に含まれる数は必ず赤い線に含まれる数より左側にあることを示している。

さて、それでは実数論で最も重要な公理である、デデキントの切断公理を述べよう。

公理（デデキントの切断公理）：A と B は実数の切断とする。このとき、どちらか片方が必ず成り立つ。

i. A には最大の数が存在する。
ii. B には最小の数が存在する。

これは、図 8 が数 x での切断であることに対応する。つまり、x は A に入っているか、B に入っているかのどちらかである。そして A に入っているとすれば線の右端なのだから A の中で最大の数であり、逆に B に入っているとすれば線の左端だから B の中で最小の数である。つまり、デデキントの切断公理は、数直線をどのように「切断」しても、対応する「切断箇所」の数 x が存在する、という公理なのである。

これを使ってアルキメデスの原理を証明してみよう。証明は背理法による。仮に、すべての自然数より大きい実数 x^* が存在したとしよう。A を、x より大きな自然数が存在するような数 x の集合とし、B は、すべての自然数より大きな数 y の集合とする。$-1 \in A$ であり、$x^* \in B$ なのだから、A も B も非空であり、またこの A と B は切断の条件をすべて満たす。したがってデデキントの切断公理から、A に最大数があるか、B に最小数があるかのどちらかである。

もし A に最大数 z が存在すれば、$z \in A$ なので、$z < N$ となる自然数 N があるが、こ

のとき $z+1 \in B$ なのに $z+1 < N+1$ となって矛盾が生ずる。B に最小数 w が存在すれば、$w \in B$ である。一方 $w-1 \in A$ であるため、$w-1 < N$ となる自然数 N が存在するが、このとき $w < N+1$ となって $w \notin B$ となり、やはり矛盾が生ずる。こうしてどの場合にも矛盾が生ずることがわかったので、仮定であった x^* の存在が間違っていて、アルキメデスの原理は正しいことがわかる。

このように、デデキントの切断公理は、数直線の当たり前の性質であるかのように見えるにもかかわらず、極めて多くの定理を生み出す魔法のような公理である。次回、このデデキントの切断公理から出てくる様々な結果を説明するが、それらはどれも、後の分析に必要不可欠なものになる。

・今回の課題

もう一度 (1) 式を掲載しよう。

$$\forall x,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |y-x| < \delta \Rightarrow |f(y)-f(x)| < \varepsilon.$$

実はこの文章には、「$\forall y$」という、本来ならあってしかるべき記号が抜けている。もちろん、入れなかったとしても内容は理解できるのだが、もしこの式の中に $\forall y$ という記号を入れるとしたら、どこに入れるべきだろうか。以下のうちから答えてみよう。

1. 記号「$\forall x$」の前。
2. 記号「$\forall x$」と「$\forall \varepsilon > 0$」の間。
3. 記号「$\forall \varepsilon > 0$」と「$\exists \delta > 0$」の間。
4. 記号「$\exists \delta > 0$ s.t. 」の後。
5. 上記４つのどこでもいい。

・付録：$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明

本文で書いたように、x^2 が 2 になるような正の数は $\sqrt{2}$ と書く。この数が有理数でないことを証明しておこう。証明には背理法が使われる。まず、$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ としよう。$\sqrt{2}$ は正なので、$m > 0$ と $n > 0$ を仮定してよい。よって m も n も自然数である。ここで集合

$$N = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \exists m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \sqrt{2} = \frac{m}{n} \right\}$$

と定義すると、N は $\mathbb{N}$ の非空な部分集合であるため、最小値が存在する。そこで、その最小値を $\bar{n}$ と書き、対応して $\sqrt{2} = \frac{\bar{m}}{\bar{n}}$ となるような自然数 $\bar{m}$ を取る。すると、

$$\bar{m} = \sqrt{2}\bar{n}$$

であるから、両辺を二乗して

$$\bar{m}^2 = 2\bar{n}^2$$

であり、よって $\bar{m}^2$ は偶数でなければならない。奇数の二乗は奇数なので、$\bar{m}$ は偶数であり、$\bar{m} = 2\hat{m}$ となる自然数 $\hat{m}$ が存在する。このとき、

$$4\hat{m}^2 = \bar{m}^2 = 2\bar{n}^2$$

なので、両辺を 2 で割って

$$\bar{n}^2 = 2\hat{m}^2$$

である。上と同じ理屈で $\bar{n}$ は偶数であり、よって $\bar{n} = 2\hat{n}$ となる自然数 $\hat{n}$ が存在することになる。すると、

$$\sqrt{2} = \frac{\bar{m}}{\bar{n}} = \frac{\hat{m}}{\hat{n}}$$

となるため $\hat{n} \in N$ かつ $\hat{n} < \bar{n}$ となるが、これは $\bar{n}$ が N の最小数であったという仮定に矛盾する。以上で証明が完成した。

この証明は、「$\mathbb{N}$ の非空な部分集合には必ず最小数が存在する」という事実を用いて構成されている[*4]。この性質は、数学的な議論を自然数から始める場合には、自然数の「公理」として扱われるか、あるいはこの性質と同値な「公理」が置かれるかのどちらかが通常、行われる。しかし、我々は実数から議論を始めるため、厳密には上の事実は証明されなければならない。次回、実数の公理をすべて述べた後で、我々はこれについての厳密な証明を行う。

[*4] この性質は**最小値原理**という名前が付けられている。