講義ノート：総合講座（第十回）

細矢祐誉

テーマ：整級数とその微分

・整級数

　複素数の数列 (a_n) に対する次の級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^2 \tag{1}$$

を考える。ある連続関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ について、$a\in\mathbb{C}$ を含む集合 U が存在して、$z\in U$ であれば

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \tag{2}$$

が成立するとき、右辺を f の U 上における**整級数展開**と呼ぶ。

　整級数展開にはいくつもの素晴らしい性質があるが、それを示すためにはいくつものステップを踏んでいかなければならない。まず、級数の性質についてのいくつかの性質を示すが、そのために頻繁に使うため、前回証明した命題１の主張だけを再掲しよう。

命題１：以下が成り立つ。

(i) すべての n について $0\le |a_n|\le b_n$ かつ $\sum_n b_n$ が収束するならば、$\sum_n a_n$ は絶対収束する。

(ii) $a_n=ar^n$ で、$0\le r<1$ ならば、$\sum_{n=N}^{\infty} a_n=\frac{ar^N}{1-r}$ である。

(iii) $a_n>0$ がすべての n について成り立ち、かつ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$ であるとする。もし $r<1$ ならば $\sum_n a_n$ は収束し、$r>1$ ならば $\sum_n a_n$ は発散する。

(iv) $\sum_n a_n$ と $\sum_n b_n$ が共に絶対収束するなら、$c_n=a_n+b_n$ としたとき、$\sum_n c_n$ も絶対収束し、$\sum_n c_n=\sum_n a_n+\sum_n b_n$ が成り立つ。

(v) $\sum_n a_n$ と $\sum_n b_n$ が共に絶対収束するならば、$c_n=a_nb_0+a_{n-1}b_1+...+a_1b_{n-1}+a_0b_n$ とした級数 $\sum_n c_n$ も絶対収束し、$\sum_n c_n=(\sum_n a_n)\times(\sum_n b_n)$ が成り立つ。

定理１：複素数列 (a_n) に対する整級数 (1) を考える。このとき、$0\le R\le +\infty$ となるある R が存在して、以下が成り立つ。

1) もし $|z-a|<R$ ならば、(1) は絶対収束する。

2) もし $|z-a|>R$ ならば、(1) は収束しない。

証明：整級数 (1) が収束するような $z\in\mathbb{C}$ の集合を C とし、

$$R=\sup\{|z-a||z\in C\}$$

と定義する。$|z-a|>R$ ならば $z\notin C$ なので (1) は収束しない。一方、$|z-a|<R$ とすると、R の定義から $|y-a|>|z-a|$ となる $y\in C$ が存在する。このとき、y に対する (1) の部分和 $t_m=\sum_{n=0}^{m}a_n(y-a)^n$ はコーシー列であるから、任意の $\varepsilon>0$ に対してある N が存在して、$m\geq N$ ならば

$$|a_m(y-a)^m|=|t_m-t_{m-1}|<\varepsilon$$

となる。これは、

$$\lim_{m\to\infty}a_m(y-a)^m=0$$

を意味する。したがって複素数列 $(a_m(y-a)^m)$ は収束し、よって有界であり、ある $M>0$ が存在して、すべての m に対して

$$|a_m(y-a)^m|\leq M$$

が成り立つ。このとき、

$$|a_m(z-a)^m|=|a_m(y-a)^m|\frac{|a_m(z-a)^m|}{|a_m(y-a)^m|}\leq M\frac{|z-a|^m}{|y-a|^m}$$

となる。右辺を c_m とすると、命題 1 の (ii) から $\sum_n c_n$ は収束するため、命題 1 の (i) から $\sum_n a_n(z-a)^n$ は絶対収束する。以上で証明が完成した。 ■

この R を、整級数 (1) の**収束半径**と言う。収束半径を見つけるのは簡単ではないが、いくつかの条件付きで収束半径を判定する方法が知られており、以下はそのひとつである。

定理 2：複素数列 (a_n) について、$0\leq R\leq+\infty$ となるある R に対して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=R$$

ならば、R が (1) の収束半径である[*1]。

[*1] なお、R は実数とは限らない。$R=+\infty$ のときは、この数列が発散しているという意味である。

証明：$0 < R < +\infty$ のときだけを扱う。残りの場合は簡単なので学生諸君に任せる。いま、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}(z-a)^{n+1}|}{|a_n(z-a)^n|}=\frac{|z-a|}{R}$$

である。よって、命題１の (iii) から、$|z-a| < R$ のときは (1) は絶対収束し、逆に $|z-a| > R$ ならば (1) は収束しない。以上で証明が完成した。 ■

次の命題は簡単であるが、非常に重要である。

命題２：ふたつの整級数

$$f(z)=\sum_n a_n(z-a)^n,\ g(z)=\sum_n b_n(z-a)^n$$

を考え、これについて収束半径の小さい方を R とし、$R > 0$ とする。このとき、以下が成り立つ。

1) $c_n = a_n \pm b_n$ に対する整級数 $\sum_n c_n(z-a)^n$ の収束半径は R 以上で、$|z-a| < R$ ならば

$$f(z)\pm g(z)=\sum_n c_n(z-a)^n$$

が成り立つ。($\pm$ の部分は複号同順)

2) $d_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ に対する整級数 $\sum_n d_n(z-a)^n$ の収束半径は R 以上で、$|z-a| < R$ ならば

$$f(z)g(z)=\sum_n d_n(z-a)^n$$

が成り立つ。

証明：命題１の (iv) から 1) が、(v) から 2) がただちに導かれる。 ■

さて、ここまで準備してきたのは、この整級数の微分について議論したかったからである。一般に、整級数で定義されるとは限らない関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ に対して、

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

が存在するとき、これを f の z における**複素微分**の値と言って $f'(z)$ で表す。当たり前に見えるが、実は h は今回複素数値を取れるので、上の極限が存在するという条件は、実数

の上の関数における微分可能性よりはるかにきつい条件になっている。しかし、多項式

$$f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$$

に対しては、

$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + ... + 2a_2 z + a_1$$

となることが、前と同様に数学的帰納法から簡単に示せる。また、第七回講義ノートの定理１の証明をそのまま使うことで、複素微分可能な関数はすべて連続であることを示せる。

より重要なこととして、次の事実がある。複素数 $\mathbb{C}$ は実数 $\mathbb{R}$ を含むため、$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は、定義域を $\mathbb{R}$ に制限して、$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ と見なすことができる。この場合、f が複素微分可能であれば当然ながら、普通の意味でも微分可能であり、$x \in \mathbb{R}$ に対して $f'(x)$ は微分でも複素微分でも値は変わらない[*2]。これを念頭に置いて、以下の定理を見てみよう。

定理３：ふたつの整級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,\ g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$$

を考える。このとき、f の収束半径と g の収束半径は同一である。それを R としたとき、$|z-a| < R$ ならば $f'(z) = g(z)$ が成り立つ。

証明：まず、$f(z)$ の収束半径を R、$g(z)$ の収束半径を R' と置こう。$n \geq 1$ ならば

$$|a_n(z-a)^n| \leq |n a_n (z-a)^{n-1}||z-a|$$

なので、$g(z)$ が絶対収束すれば $f(z)$ も絶対収束する。よって、$R' \leq R$ である。もし $R = 0$ ならば $R' = 0$ であり、定理は正しい。そこで $R > 0$ を仮定する。$|z-a| < R$ である $z \in \mathbb{C}$ を取り、$|z-a| < r < R$ となる r を取る。収束半径の定義から

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

は絶対収束するので、$\lim_{n\to\infty} a_n r^n = 0$ でなければならず、よって数列 $(a_n r^n)$ は有界であって、ある $M > 0$ に対して $|a_n r^n| \leq M$ が常に成り立つ。すると、

$$|n a_n (z-a)^{n-1}| = \frac{|a_n r^n|}{r} \times \frac{n|z-a|^{n-1}}{r^{n-1}} \leq \frac{nM}{r} \frac{|z-a|^{n-1}}{r^{n-1}}$$

[*2] 実はこのとき、f は**何度でも微分可能**であることが示せる。上で「きつい条件」と言ったのはこのためである。

であるが、この右辺を b_n とすると、命題 1 の (iii) によって $\sum_n b_n$ は収束する[*3]。よって命題 1 の (i) から、$g(z)$ も絶対収束しており、$R' = R$ がわかる。これで収束半径の同一性が示せた。

次に、$|z-a| < R$ とし、$|z-a| < r < R$ となる r を取る。$|h| < R - r$ となる $h \in \mathbb{C}$ をひとつ取れば、

$$|z+h-a| \leq |z-a| + |h| < r + R - r = R$$

なので、$z+h$ に対して整級数 $f(z+h)$ と $g(z+h)$ は共に収束する。そこでこのような h に対して

$$\varphi(h) = \begin{cases} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z+h-a)^n-(z-a)^n}{h} & \text{if } h \neq 0, \\ g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1} & \text{if } h = 0 \end{cases}$$

と定義する（ここで上の計算に命題 2 の 1) を用いた)。ここで、

$$w_1^n - w_2^n = (w_1 - w_2)(w_1^{n-1} + w_1^{n-2} w_2 + \ldots + w_1 w_2^{n-2} + w_2^{n-1})$$

を使って整理すると、$h = 0$ でも $h \neq 0$ でも共通に、

$$\varphi(h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{i=0}^{n-1} (z-a)^i (z-a+h)^{n-1-i}$$

と書き直せる。特に $|h| < r - |z-a|$ ならば $|z-a+h| < r$ なので、

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} (z-a)^i (z-a+h)^{n-1-i} \right| \leq n |a_n| r^{n-1}$$

となっている。そこで $M_n = n a_n r^{n-1}$ とする。すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = g(a-r)$$

である。$r < R$ であり、R は g の収束半径であるため、この級数は絶対収束する。よって前回の定理 2 を正項級数 $\sum_n |M_n|$ に適用すると、$\varphi(h)$ は連続であることがわかる。故に

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \varphi(h) = \varphi(0) = g(z)$$

であるから、$f'(z) = g(z)$ がわかる。以上で証明が完成した。 ■

[*3] ここで必要になる関係 $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ は、$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ から示せる。

・指数関数と対数関数

整級数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \tag{3}$$

を考えよう。この整級数において $a_n=\frac{1}{n!}$ であるため、定理2からただちに $R=+\infty$ を得る。よってこの整級数はすべての複素数に対して絶対収束する。この関数 $f(z)$ は通常 $\exp(z)$ と書かれる。

定義から明らかに、

$$\exp(0)=1+0+0+0+...=1,\ \exp(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$$

である。定理3から、

$$\exp'(z)=\exp(z)$$

であるため、$\exp(z)$ は微分しても値が変わらない関数である。特に exp はすべての点で微分可能なため、連続関数である。

さらに、命題1の (v) を用いると、

$$\exp(z+w)=\exp(z)\exp(w) \tag{4}$$

が簡単に計算できる。実際、右辺は命題1の (v) から

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}z^i w^{n-i}$$

と書けるが、二項定理から

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}z^i w^{n-i}=\frac{1}{n!}(z+w)^n$$

とできるため、(4) 式が正当化できる。これは関数 $\exp(z)$ の**加法定理**と呼ばれる。

この加法定理を使うと、まず任意の $n\geq 1$ に対して、

$$\exp(n)=e^n$$

がわかる。実際、たとえば $n=1$ であればこの式は正しい。$n=k$ についてこの式が正しいとすれば、

$$\exp(k+1)=\exp(k)\exp(1)=e^k e=e^{k+1}$$

となるので、$n = k + 1$ についても正しい。よって数学的帰納法の原理から、この式はすべての n について正しいことがわかる。そこでこれを一般化し、任意の $x \in \mathbb{R}$ 対して

$$e^x = \exp(x)$$

と定義しよう。

この e^x がどのような性質を持っているかを少し見ていこう。すでに見たように、$e^0 = 1$ であり、1 以上の自然数 n に対しては e^n は通常の定義と変わらない。一方、$x \in \mathbb{R}$ に対して、加法定理 (4) から、

$$1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x)\exp(-x) = e^x e^{-x}$$

がわかるため、公式

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \tag{5}$$

が得られる。また、$x \in \mathbb{R}$ と自然数 n に対して、

$$e^{nx} = \exp(nx) = (\exp(x))^n = (e^x)^n \tag{6}$$

である。特に、$e^{1/n}$ は n 乗すると e になる正の数であることが、ここからただちにわかる。

$\exp(z)$ の微分は $\exp(z)$ であるが、$x \in \mathbb{R}$ であるとき $\exp(x) > 0$ であるから、$(e^x)' = e^x > 0$ である。一般に、$f'(x) > 0$ が常に成り立つ関数 f については、$a < b$ であれば平均値の定理から、ある $c \in (a, b)$ に対して

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) > 0$$

なので、増加関数である。したがって関数 e^x も増加関数である。また、

$$\lim_{n\to\infty} e^n = +\infty, \ \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$$

であるから、中間値の定理から、任意の数 $x > 0$ に対して

$$e^y = x$$

となる数 y が存在し、しかもそれはただひとつに定まる。そこでこの数 y を

$$\log x$$

と書くことにする。このとき、$e^{\log x} = x$ なので、$\log x$ は e^x の逆関数である。逆関数定理から $\log x$ は微分可能で、

$$(\log x)' = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

が成り立つ。

さて、ここまでは e^x の話であった。これを一般化して、正の数 $a>0$ に対する**指数関数** $f(x)=a^x$ を定義しよう。それは次の式で定義される。

$$a^x=\exp(x\log a).$$

すぐにわかるように、$a^0=1, a^1=a$ であり、加法定理 (4) から、a^n は通常の定義と一致する。また、(5) 式と (6) 式から、

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x},\ a^{nx}=(a^x)^n \tag{7}$$

が直ちに導かれる。特に後者から、$a^{\frac{1}{n}}$ は n 乗すると a になる正の数であることがわかる。

次の命題は非常に重要である。

命題３：次の公式が成り立つ。

$$a^{x+y}=a^xa^y,\ a^{xy}=(a^x)^y. \tag{8}$$

証明：まず前者については、(4) から

$$a^{x+y}=\exp((x+y)\log a)=\exp(x\log a)\exp(y\log a)=a^xa^y$$

となって、示せる。

次に、$x\in\mathbb{R}$ で、$y=\frac{m}{n}$ とし、ただし n は 0 でない自然数、m は整数とする。このとき (6) 式から

$$a^{xy}=a^{(x/n)m}=\exp((x/n)m\log a)=(\exp((x/n)\log a))^m=(a^{x/n})^m$$

がわかる。一方、(7) 式から $(a^{x/n})^n=a^x$ であることがわかるが、一方で (4) から

$$((a^x)^{1/n})^n=(\exp((1/n)\log a^x))^n=\exp(\log a^x)=a^x$$

となるため、

$$a^{x/n}=(a^x)^{1/n}$$

である。したあって (7) から

$$a^{xy}=((a^x)^{1/n})^m=(a^x)^y$$

となって、後者の式が y が有理数であるときには成り立つことがわかった。

一般の場合。$x \in \mathbb{R}$ かつ $y \in \mathbb{R}$ とする。第二回講義ノートの定理 6 から、任意の n に対して、$|y - y_n| < \frac{1}{n}$ となる有理数 y_n が存在する。数列 (y_n) は y に収束するが、一方で $a^y = \exp(y \log a)$ は y について連続である。そこで、有理数についての結果から、

$$a^{xy} = \lim_{n\to\infty} a^{xy_n} = \lim_{n\to\infty} (a^x)^{y_n} = (a^x)^y$$

となる。これで (8) 式が完全に証明された。 ■

定義から、a^x は何度でも微分可能であり、合成微分の公式から

$$(a^x)' = a^x \log a$$

という公式を得ることができる。$a > 1$ のときには $\log a > 0$ であるため、$(a^x)' > 0$ であり、よって関数 a^x は増加関数である。さらに、

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty, \ \lim_{n\to\infty} a^{-n} = 0$$

である。したがって中間値の定理から、$x > 0$ に対して方程式

$$a^y = x$$

にはただひとつの解が存在するが、その解 y を

$$\log_a x$$

と書く。一方、$0 < a < 1$ のときには $\log a < 0$ なので $(a^x)' < 0$ であり、よって関数 a^x は減少関数である。さらに

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0, \ \lim_{n\to\infty} a^{-n} = +\infty$$

であるため、中間値の定理から、$x > 0$ に対して方程式

$$a^y = x$$

にはただひとつの解が存在する。これも同様に

$$\log_a x$$

と書く。こうして、**対数関数** $\log_a x$ の定義が完成した。a はこの対数関数の**底**と呼ばれる。定義から明らかに、

$$\log_e x = \log x$$

である。

底に $a=1$ を選んではいけないことに注意。この場合、$a^y=x$ という方程式は $x=1$ のときにしか解を持たないので、この話は意味がなくなる。

対数関数にもよく使う性質があるので、次に命題としてまとめておこう。

命題４：次の公式が成り立つ。

$$\log_a 1=0,\ \log_a a=1,\ \log_a xy=\log_a x+\log_a y,\ \log_a x^y=y\log_a x. \tag{9}$$

証明：最初の二つの式は $a^0=1,\ a^1=a$ から明らかである。三番目の式は、(8) から

$$a^{\log_a x+\log_a y}=a^{\log_a x}a^{\log_a y}=xy=a^{\log_a xy}$$

となるため、成り立つ。四番目の式も (8) から

$$a^{y\log_a x}=(a^{\log_a x})^y=x^y=a^{\log_a x^y}$$

となるため、成り立つ。以上で証明が完成した。 ■

なお、逆関数定理を使えば $\log_a x$ の微分も簡単に計算できて、

$$(\log_a x)'=\frac{1}{a^{\log_a x}\log a}=\frac{1}{x\log a}$$

であることがわかる。

ここまで、$\exp(z)$ の加法定理から得られる結果を並べてきた。$\exp(z)$ の定義域は複素数であるが、実数に制限してもこれだけたくさんの性質がわかる。複素数 z に対しても $\exp(z)$ の代わりに e^z と書くことがあるが、その場合 $z=x+yi$ であれば、$|e^z|=e^x$ であり、特に $|e^{iy}|=1$ が常に成り立つことが知られている。しかしそれを証明するためにはもう少し準備がいるので次回以降に回すことにする。

・先週の課題の解説

実は、不連続な関数も含めて、

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx<+\infty$$

という条件を満たす任意の関数は、とある三角多項式

$$\sum_{n=-N}^{N}(a_n\sin(nx)+b_n\cos(nx))$$

の L^2 極限となっていることが知られている（フーリエ解析の基本定理)。三角多項式は常に連続なので、もし $f(x)$ が三角多項式の一様収束極限になっていれば連続になるが、実際には不連続な関数についても上の結果が成り立つため、L^2 収束しているから一様収束している、とは言えないことがこの例からわかる。

一方、一様収束から L^2 収束が言えることは、積分論で有名なルベーグの優収束定理から証明できる。したがって一様収束の方が L^2 収束より強いことがわかる。実は、L^p 収束は確率収束とかなり強い関係を持っているのだが、ここで述べようとすると測度論の知識がたくさん必要になるため、詳細は省略する。

・今週の課題

今週は対数関数 $\log x$ について考える。すでに上で証明されているように

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

である。次回証明するが

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

である。そこで $a = 1$ の近くで、$\log x$ のテイラー級数展開を考えることができる。問題はその級数の収束半径である。$\log x$ を $a = 1$ のまわりで整級数で表示したとき、その収束半径はいくつになるだろうか？