講義ノート：総合講座（第十一回）

細矢祐誉

テーマ：さまざまな関数の連続性と微分可能性

・対数微分の公式と割り算の微分の公式

前回、対数関数 $\log x$ の定義を行った。この関数を微分した公式

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

は非常に有益で、これと合成微分の公式を組み合わせることで簡単に次の定理を得ることができる。

定理１：U は実数の開集合で、関数 $f : U \to \mathbb{R}$ は正値、つまり $f(x) > 0$ が常に成り立つとする。ここで、$g(y) = \log f(y)$ と定義する。すると、f が点 x で微分可能であることと g が点 x で微分可能であることは同値であり、さらに公式

$$f'(x) = f(x)g'(x)$$

が成り立つ。

この最後の公式を**対数微分の公式**と言い、通常次のように略記される。

$$f'(x) = f(x)(\log f(x))'.$$

これを用いることで、たくさんの関数の微分を計算できる。

証明：対数関数はすべての点で微分可能なので、f が点 x で微分可能ならば、合成微分の公式から g も点 x で微分可能である。逆に g が点 x で微分可能ならば、

$$f(y) = \exp(g(y))$$

であるから、やはり合成微分の公式から f は点 x で微分可能である。よって最初の主張は正しい。そこで $g(y)$ を点 x で微分すると、合成微分の公式から

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

となるから、ここから対数微分の公式を得る。 ■

・べき乗関数

さて、前回まで議論したことを思い返そう。まず我々は関数 $f(x)$ が多項式である場合には、それは何度でも微分可能であり、したがって連続であることを示した。次に指数関数 $f(x)=a^x$ と対数関数 $f(x)=\log_a x$ についても、我々はその連続性と微分可能性を示した。ここではそれ以外の関数を扱いたいが、最も代表的な関数は次の**べき乗関数**

$$f(x)=x^a$$

である。

まず、この関数を扱う際には、常にその**定義域**が問題になる。a が自然数であるときは簡単で、この定義域は $\mathbb{R}$ である。しかし一方で、a がたとえば $\sqrt{2}$ のような無理数であった場合には、議論は簡単にはいかない。なぜなら、我々は x^a を、関数 $\exp(z)$ を用いて

$$x^a=\exp(a\log x)$$

と**定義**したからである。これが定義できるためには x は対数関数 $\log x$ の定義域に入っていなければならないが、前回講義ノートを見ればわかるように、$\log x$ が定義できるのは $x>0$ の場合のみである。よってこの場合は普通、$x>0$ でないと x^a が定義できないということになる。

しかし、たとえば $a=-1$ であるときにはどうだろうか？　前回証明したように、指数関数の加法定理から

$$1=x^0=x^1x^{-1}$$

なので、

$$x^{-1}=\frac{1}{x}$$

である。左辺は $x>0$ でないと定義できないという話であったが、右辺は $x\neq 0$ でさえあれば定義できる。つまり、a が整数であるときは、x^a の定義域はもっと広く取れるように見えるのである。

そこで、指数関数とはまた異なる形で、べき乗関数を定義し直してみよう。この場合、定義のための参考になるのは、前回命題３で証明した次の公式

$$a^{x+y}=a^xa^y,\ a^{xy}=(a^x)^y$$

である。そこでべき乗関数についても、

$$x^{a+b}=x^ax^b,\ x^{ab}=(x^a)^b \tag{1}$$

が成り立つように、ギリギリ限界まで定義域を拡張して考えるようにしよう。この際に、どこまで拡張しても大丈夫かを考えてみることにする。

まず、a が 0 でない自然数 n である場合には、通常通りに x^n は x を n 回かけたものである。たとえば上の a とか b に $a=3, b=2$ を代入してみれば、

$$x^5 = x^3x^2,\ x^6 = (x^3)^2$$

などという形で、(1) 式が成り立つことは明らかだろう。

次に、a が 0 である場合を考える。このとき、(1) 式が成り立つためには、

$$x = x^{1+0} = x^1x^0 = x \times x^0$$

が成り立たなければならない。よって x^0 は、x とかけ算しても値が変わらない数なので、

$$x^0 = 1$$

でなければならない[*1]。

次に、n を 0 でない自然数としよう。(1) 式が成り立つためには

$$1 = x^0 = x^{n-n} = x^nx^{-n}$$

でなければならない。よって、

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

でなければならない。この帰結として、x^{-n} の定義域は $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ であることがわかる。特に、

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

であることに注意しよう。

今度は、$a > 0$ であり、かつ a は自然数ではないとする。このとき、$x > 0$ であれば、

$$x^a = \exp(a \log x)$$

として定義できる。一方、前回の命題 4 から

$$\log e^y = y \log e = y$$

[*1] この論理は、実は $x = 0$ であるときには少し微妙になる。なぜなら、0 はなにをかけ算しても 0 だからである。しかしここでは細かいことは考えず、$x \in \mathbb{R}$ であれば $x^0 = 1$ である、として定義することにする。

となるため、

$$\lim_{x\to 0}\log x = \lim_{y\to -\infty}\log e^y = \lim_{y\to -\infty} y = -\infty$$

であることがわかる。したがって、

$$\lim_{x\to 0} x^a = \lim_{x\to 0}\exp(a\log x) = 0$$

となる。そこで、$0^a = 0$ と定義することで、我々は x^a の定義域を連続的に拡張できて、$\mathbb{R}_+$ であると結論づけることができる[*2]。

最後に、$a < 0$ であり、かつ a が整数でないときには、$x > 0$ であれば

$$x^a = \exp(a\log x)$$

と定義することができる。しかし、この関数は $x = 0$ のところに拡張することはできない。なぜなら、

$$\lim_{x\to 0} x^a = +\infty$$

になるからである。よってこの場合には x^a の定義域は $\mathbb{R}_{++}$ であるとせざるを得ない。

以上をまとめると、次のようになる。

- a が自然数ならば、x^a の定義域は $\mathbb{R}$ である。
- a が負の整数ならば、x^a の定義域は $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ である。
- a が正の数で、しかも自然数でないならば、x^a の定義域は $\mathbb{R}_+$ である。
- a が負の数で、しかも整数でないならば、x^a の定義域は $\mathbb{R}_{++}$ である。

この場合、(1) 式はいかなる場合にも保証されることがわかる。

次の定理は基本的であるが、その証明は案外入り組んでいる。

定理２：$f(x) = x^a$ は、a が自然数ではない正の数で、かつ $x = 0$ であった時を除いて必ず微分可能で、$f'(x) = ax^{a-1}$ が成り立つ。

証明：場合分けによる。a が自然数であるときは、すでに第七回の命題２で証明した。次に、$a = -n$ となる正の自然数 n が存在する場合には、第七回講義ノートの命題１の 4) から

$$(x^{-n})' = \frac{(1)'x^n - 1(x^n)'}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1}$$

[*2] この $\mathbb{R}_+$ は $\{x\in\mathbb{R}|x\geq 0\}$ であり、次に出てくる $\mathbb{R}_{++}$ は $\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$ である。これらは一応、第四回の講義ノートにも定義が書いてあるが、念のために再述しておいた。

となって結論を得る。

今度は a が整数ではなく、$x > 0$ の場合を考える。この場合、$f(x) = x^a$ とすれば、前回の命題 4 から $\log f(x) = a \log x$ である。よって対数微分の公式から

$$f'(x) = f(x)(\log f(x))' = x^a \times \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

を得る。以上で証明が完成した。 ■

なお、すでによく知られた関数である $f(x) = \sqrt{x}$ は、正式には

$$\sqrt{x} = x^{1/2}$$

の公式から定義される。この関数の微分は定理 2 により計算できて、

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

となる。この形の公式を見たことがある学生もいるであろう。

・三角関数

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の三角関数は、次のように定義する。

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \tag{2}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} z^{2n}. \tag{3}$$

前回証明した定理 2 から、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^n$$

の収束半径は $+\infty$ になる。$\sin z = f(z^2)z$ なので、前回の命題 2 の 2) からやはりこの整級数の収束半径は $+\infty$ である。同様に、

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} z^n$$

の収束半径も $+\infty$ であり、$\cos z = g(z^2)$ だから、この整級数の収束半径も $+\infty$ である。

前回の定理 3 から、$\sin z$ と $\cos z$ は複素微分可能で、

$$(\sin z)' = \cos z, \ (\cos z)' = -\sin z$$

である。こうして三角関数の微分の公式が得られた。また定義からただちに、

$$\sin 0 = 0,\ \cos 0 = 1,\ \sin(-z) = -\sin z,\ \cos(-z) = \cos z$$

がわかる。

さて、定義から

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n$$

である。一方で命題 2 の 1) から、

$$\cos z + i \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n$$

が示せる。よって、**オイラーの公式**

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{4}$$

が得られた。よって

$$e^{-iz} = \cos(-z) + i \sin(-z) = \cos z - i \sin z$$

であるため、公式

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{5}$$

を得る。ここからただちに、

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1 \tag{6}$$

という公式を得ることができる。特に、$x \in \mathbb{R}$ であるときには、整級数の係数がすべて実数であることから $\sin x, \cos x$ は実数である。よって $(\cos x)^2 \leq 1$ かつ $(\sin x)^2 \leq 1$ であり、$\sin x, \cos x \in [-1, 1]$ がわかる。(4) 式から、

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

なので、両辺の絶対値を取ると、

$$|e^{ix}| = \sqrt{(\cos x)^2 + (\sin x)^2} = 1$$

を得ることができる。したがって一般の複素数 $z = x + iy$ に対して、

$$|e^z| = |e^x e^{iy}| = |e^x||e^{iy}| = |e^x|$$

となる。これが前回述べた指数関数の絶対値評価公式である。

公式 (5) と指数関数の加法定理を用いることで、我々は三角関数の加法定理

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w,\ \cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w \tag{7}$$

を簡単な計算で得ることができる。これは学生諸君への課題としよう。

また、上で述べたように $x \in \mathbb{R}$ なら $\sin x \in \mathbb{R}$ だが、特に $0 \le x \le 2$ だとすると、$\sin x$ の定義式の足し算をふたつずつまとめ直すことで

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \left[1 - \frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)}\right] > 0$$

がわかる。よってこのような x については $(\cos x)' = -\sin x < 0$ であり、したがって $\cos x$ は区間 $[0,2]$ 内で単調減少である。一方で、同様のまとめ直しから

$$\cos x = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \left[1 - \frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)}\right]$$

である。$0 < x < 3$ だと

$$\frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)} < 1$$

であるから、上の $\cos x$ の式の右辺第二項の足し算の各項は正であり、よって

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12}\right)$$

という評価式を得る。$x = 2$ を代入すると

$$\cos 2 < 1 - \frac{4}{3} < 0$$

がわかる。$\cos 0 = 1$ なので、中間値の定理から、$0 < x^* < 2$ となる x^* で $\cos x^* = 0$ となるものがただひとつ存在する。そこで、

$$\pi = 2x^*$$

と**定義する**。こうして我々は**円周率**の定義を得た。公式 (6) から

$$\sin(\pi/2) = 1,\ \cos(\pi/2) = 0$$

である。加法定理 (7) から

$$\sin(x + \pi/2) = \cos x,\ \cos(x + \pi/2) = -\sin x$$

を得るので、この $x=\pi/2$ とすることで

$$\sin\pi=0,\ \cos\pi=-1$$

を得る。後は繰り返しで、

$$\sin(3\pi/2)=-1,\ \cos(3\pi/2)=0,$$

$$\sin 2\pi=0,\ \cos 2\pi=1$$

を得る。ふたたび加法定理 (7) から

$$\sin(x+2\pi)=\sin x,\ \cos(x+2\pi)=\cos x$$

を得るので、三角関数 $\sin x,\cos x$ は周期 2π の**周期関数**であることがわかる。

ここで、閉区間 $[a,b]$ から平面 $\mathbb{R}^2$ への連続関数 $f(x)$ を**曲線**と呼ぶ。曲線の長さというものには様々な定義があるが、f が連続微分可能な場合には、積分

$$\int_a^b \|f'(x)\|dx$$

で定義するのが普通である。ところが、曲線 $f(x)=(\cos x,\sin x)$ を考えると、まず (6) 式から、これは $f(0)=(1,0)$ から出発して、原点を中心とした半径 1 の円を反時計回りに動く曲線になる。そして $f'(x)=(-\sin x,\cos x)$ なので、$\|f'(x)\|=1$ であり、故に

$$\int_0^x \|f'(y)\|dy=\int_0^x 1dy=x$$

である。よって、$f(x)$ は原点を中心とした半径 1 の円を $(1,0)$ から出発して反時計回りに x の距離だけ動いたときの座標と一致する。特に、2π は半径 1 の円の円周の長さと一致することがわかる。こうして、高校数学で習った $\sin x,\cos x$ と、我々が定義した $\sin x,\cos x$ が一致していることが確かめられたのである。

最後に、

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

と定義する。この関数は $\cos x=0$ となる点、つまり $x=\frac{n}{2}\pi$ となる奇数 n が存在する点以外では常に定義されている。微分を計算すると第七回講義ノートの命題 1 の 4) から

$$(\tan x)'=\frac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2}=1+(\tan x)^2$$

が得られる。特に、$(\tan x)'>0$ が常に成り立つので、$\tan x$ は増加関数である。

・逆三角関数

まず、sin や cos は周期関数であるから、厳密な意味で全体で定義された逆関数は持たない。ただし、部分的な逆関数であれば持つことが知られている。代表例として、たとえば $\sin x$ の定義域を $U = [-\pi/2, \pi/2]$ に制限すると、この集合 U 内で $(\sin x)' = \cos x > 0$ なので $\sin x$ は増加関数であり、よって逆関数 $\arcsin x$ が定義できる。$\arcsin x$ の定義域は $[-1, 1]$ であり、値は U に属する。逆関数定理から

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

となる。ところで、$y \in U$ ならば $\cos y \geq 0$ であり、よって公式 (6) から

$$\cos y = \sqrt{1 - (\sin y)^2}$$

である。この y に $\arcsin x$ を代入することで、公式

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

を得る。

同様に、$\tan x$ も U の内部 $V = (-\pi/2, \pi/2)$ 上で定義されており、増加関数であるから、逆関数 $\arctan x$ が定義できる。$\arctan x$ の定義域は $\mathbb{R}$ であり、逆関数定理から

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

という計算結果が得られる。

関数 arcsin や arctan はかなり人工的に見える関数であるから、微分の値が思ったより素直で驚く学生もいるだろう。特に arctan は案外使いやすく、様々な応用を持つ。

・最後に

ここで書かれた関数たちはどれも性質がいい関数であるが、実際には多くの場合、もっと難しい関数に出会う。たとえば、

$$x^2 e^{\sin x + \log(x+1)^2}$$

などという関数である。一見してこの関数はぐちゃぐちゃでわかりにくいように見えるかもしれない。しかし、少し冷静になって考えてみよう。まず、$\sin x$ は微分可能関数である。$\log(x+1)^2$ も、微分可能な関数の合成なので、合成微分の公式から微分可能である。

よって $\sin x+\log(x+1)^2$ も微分可能である。そして、$e^{\sin x+\log(x+1)^2}$ は、合成微分の公式から微分可能である。x^2 も微分可能であり、微分可能な関数のかけ算は微分可能なので、まとめると、上の関数は微分可能である。

微分可能な関数は連続だから、上の関数は連続であることになる。つまり、このようなぐちゃぐちゃに見える関数でも、我々がいままで蓄えてきた知識を使えば、連続であることや微分可能であることが、簡単に証明できるのである。我々がいままで示してきたことは、想像以上に多くの場合に適用できる。それを確認して、次のステップに進もう。

・先週の課題の解説

まず、$f(x)=\log x$ とすると、$f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$ である。これを念頭に置いて数学的帰納法を用いると、

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

という評価式が得られる。特に、

$$\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

である。よってこれをテイラー級数の公式に $a=1$ として代入すると、$\log 1=0$ であることから

$$\log x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

が得られる。この右辺を整級数

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-1)^n$$

として見ると、$|a_n|=\frac{1}{n}$ なので、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

なので、この整級数の収束半径は前回の定理 2 から 1 であることがわかる。

したがってテイラー級数は $0<x<2$ のとき絶対収束する。しかし、$x>2$ だと発散する。問題は $x=2$ のときで、これはかなり評価が難しい。この問題は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

が収束するかどうかという問題である。この問題は第四回講義ノートにおける「先週の課題の解説」で説明したように収束し、実はその収束先は $\log 2$ であるのだが、その証明はとても難しい。

このように、$\log x$ のテイラー級数への展開は局所的にしか行えない。しかしそれでも、少なくとも局所的には整級数展開できるという点で、$\log x$ は非常に扱いやすい関数である。このような関数は**解析関数** (analytic function) と呼ばれる。解析関数は非常に良い性質をいくつも持つのだが、さしあたり経済学にはあまり多くの応用を持たないため、ここではこれ以上踏み込むのは避けたい。興味がある学生は、杉浦光男『解析入門 II』の第九章を読むとよい。

・今週の課題

我々は普通の教科書では絶対に行わない、非常に回りくどいやり方で $\sin x$ と $\cos x$ の定義を行い、それが通常の定義と一致することを「証明」する方法を取った。しかし、多くの教科書で議論されているように、もっと簡単な方法がある。つまり、原点を中心として半径が 1 の円周上を、$(1, 0)$ から始めて時計回りに距離 x だけ動いたときの点を $(\cos x, \sin x)$ と「定義」するのである。このやり方で三角関数を定義すると、$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ は当然成り立つ。一方、図に書いてみれば明白なように、$0 < x < \pi/2$ のとき

$$\sin x < x < \tan x$$

であるから、$\sin x$ をこれらで割り算すれば

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

を得る。したがってはさみうちの原理から

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

を得る。これを使うと、

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\cos x)^2 - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{\cos x + 1} = 0$$

を得る。そして加法定理は別の方法で証明できるので、これを適用することによって

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} = \cos x\end{aligned}$$

となって $(\sin x)' = \cos x$ の証明が終わる。

一見してよさそうで、簡単に見えるこの証明法には、実は大きな問題が潜んでいる。今回はそれを考えてみてもらいたい。