講義ノート：総合講座（第十二回）

細矢祐誉

テーマ：多価関数、ベルジュの最大値定理、凸解析

・多価関数

いままでは、主に集合 A から B への関数 $f: A \to B$ について話をしてきた。もし A や B が距離空間ならば、f の連続性が定義できる。しかし、ここから先の話は、それでは済まされないような難しい話がたくさん出てくるので、考え方を拡張しなければならない。ここで出てくるのは多価関数というものである。f が、A のものを放り込むと B の部分集合が返ってくる関数であるとき、このような f を A から B への**多価関数** (multi-valued function) と呼んで、これを $f: A \twoheadrightarrow B$ の記号で表す。

いま、普通の関数 $f: A \to B$ を考え、$g: x \mapsto \{f(x)\}$ を考えよう。つまり、g は、$x \in A$ に対して $\{f(x)\}$ という一点集合を返すような多価関数である。この関数は「厳密には」f と異なるのだが、あまり区別する理由がないので、同一視される。

多価関数の定義から、$f(x)$ が空集合という可能性はあり得る。どんな $x \in A$ を取ってきても $f(x)$ が空集合にならないとき、このような f を**対応** (correspondence) と呼ぶことがある。この呼び方はフランスの数学者たちが「ブルバキ」という共同ペンネームで作った教科書で採用されたものである。ブルバキのスタイルは一時期数学界で非常に勢力が強かったが、いまではさほど人気がない。しかし、経済学では未だにこの対応という言葉が生き残っていて、頻繁に使われる。

また、上の性質「どんな $x \in A$ を取ってきても $f(x)$ が空集合にならない」を指して、**非空値** (nonempty-valued) であると言うこともある。一般に、「どんな $x \in A$ に対しても $f(x)$ が○○である」という性質を指して、「f は○○値である」と言う。たとえば、どんな $x \in A$ に対しても $f(x)$ がコンパクトであるような f は**コンパクト値** (compact-valued) と呼ばれる。

・優半連続、劣半連続

さて、以降 X, Y は距離空間であるとしよう。$f: X \to Y$ が連続であるというのは、Y の任意の開集合 U に対して、その逆像 $f^{-1}(U)$ が開集合になることと同値であった。多価関数 $f: X \twoheadrightarrow Y$ の連続性も同様に定義したいのだが、しかしここで問題があって、多

価関数には逆像 $f^{-1}(U)$ を定義するやり方が二種類あるのである。具体的には、

$$f^{-s}(U) = \{x \in X | f(x) \subset U\} \tag{1}$$
$$f^{-w}(U) = \{x \in X | f(x) \cap U \neq \emptyset\} \tag{2}$$

という、ふたつの逆像の定義がある。(1) 式で定義される $f^{-s}(U)$ を f による U の**強逆像** (strong inverse image) と、(2) 式で定義される $f^{-w}(U)$ を f による U の**弱逆像** (weak inverse image) と言う。

多価関数 $f : X \twoheadrightarrow Y$ について、任意の Y の開集合 U に対して $f^{-s}(U)$ が開集合であるとき、f は**優半連続** (upper hemi-continuous) であると言う。また、任意の Y の開集合 U に対して $f^{-w}(U)$ が開集合であるとき、f は**劣半連続** (lower hemi-continuous) であると言う。f が優半連続かつ劣半連続であるとき、これは単に**連続** (continuous) であると言う。

図１と図２は、優半連続と劣半連続の違いについて記述したものである。図１の青い領域で書かれたグラフを持つ関数は優半連続だが劣半連続ではない。

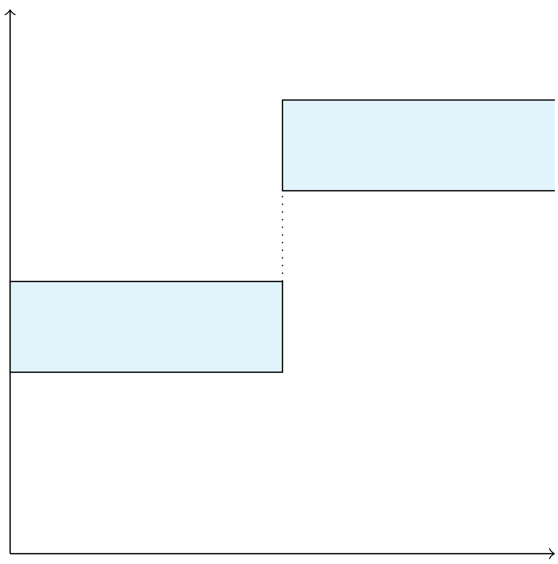

図１　優半連続だが劣半連続ではない例

また図２の赤い領域と線で書かれたグラフを持つ関数は劣半連続だが優半連続ではない。

したがって優半連続と劣半連続は、どちらが強いとか弱いといった関係にある条件ではなく、互いに独立な概念である。

ただし、f が一価な関数であったときは話が別である。一価関数 $f : X \to Y$ は、前の

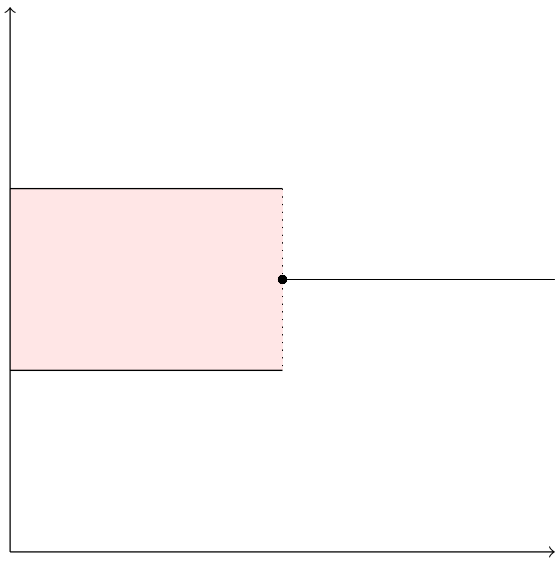

図 2　劣半連続だが優半連続ではない例

節で書いたように自然な形で多価関数と見なすことができる。つまり、$g(x) = \{f(x)\}$ として定義した関数 $g : X \twoheadrightarrow Y$ と、同一視できる。このとき、任意の $U \subset Y$ に対して、

$$f^{-1}(U) = g^{-s}(U) = g^{-w}(U)$$

が成り立つ。したがって以下の定理がただちに導かれる。

定理 1：関数 $f : X \to Y$ について、以下の 3 つは同値である。

i) f は連続である。
ii) f は多価関数として優半連続である。
iii) f は多価関数として劣半連続である。

　また、普通の関数の連続性と同様、「点 x での優半連続性」「点 x での劣半連続性」というのも定義できる。たとえば、$f : X \twoheadrightarrow Y$ に対して、$f(x)$ を含む任意の Y の開集合 U に対して、ある $r > 0$ が存在して、$\rho(x', x) < r$ であれば $f(x')$ も U に含まれるとき、f は x で優半連続であると言う。同様に、$f(x)$ と共通部分を持つ任意の Y の開集合 U に対して、ある $r > 0$ が存在して、$\rho(x', x) < r$ であれば $f(x')$ と U の共通部分も非空であるとき、f は x で劣半連続であると言う。上で定義した「優半連続」が「すべての点で優半連続」であることと同値であること、および「劣半連続」が「すべての点で劣半連続」であることと同値であることは簡単に示せるため、ここでは省略する。興味のある学生諸君は証明にチャレンジしてみるとよい。

・ベルジュの最大値定理

以下の定理が、経済学への応用上極めて重要である。まず、ひとつ用語を追加しよう。X の要素と Y の要素のペア (x,y) をすべて集めてできた集合 $\{(x,y)|x \in X, y \in Y\}$ のことを、$X \times Y$ と書く。

定理２（ベルジュの最大値定理）：変数 y を固定した問題

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x,y) \\ \text{subject to.} \quad & x \in \Delta(y) \end{aligned} \tag{3}$$

を考え、ただし X と Y は距離空間、$f : X \times Y \to \mathbb{R}$ は連続関数で、$\Delta : Y \twoheadrightarrow X$ はコンパクト値で連続な対応とする。固定された $y \in Y$ に対してこの問題の解の集合を $S(y)$ と書き、また $x \in S(y)$ に対して $f(x,y)$ の値のことを $V(y)$ と書くことにする。このとき、多価関数 $S : Y \twoheadrightarrow X$ は非空コンパクト値かつ優半連続であり、また $V : Y \to \mathbb{R}$ は連続である[*1]。

証明：まず、$\Delta(y)$ はコンパクトであるから、第五回講義ノートの定理７から、$S(y)$ は非空値である。また $S(y) \subset \Delta(y)$ であるから、もし (x_n) が $S(y)$ 上の点列であれば、それは $\Delta(y)$ 上の点列でもある。したがって、(x_n) は $\Delta(y)$ の要素 x^* への収束部分列 $(x_{k(n)})$ を持つが、f は連続なので

$$\lim_{n \to \infty} f(x_{k(n)}, y) = f(x^*, y)$$

である。左辺は問題 (3) の最大値だったので、右辺も最大値であり、よって $x^* \in S(y)$ でなければならない。これで $S(y)$ がコンパクト値であることがわかった。

以降の証明のために、ひとつ補題を用意しよう。

補題１：(y_n) は y^* に収束する点列であり、(x_n) は $x_n \in S(y_n)$ を常に満たす点列であるとする。このとき、$S(y^*)$ の要素 z^* と、そこに収束する (x_n) の部分列が存在する。

補題１の証明：まず、距離空間 X における距離を ρ としたとき、固定した $x \in X$ に対して $f(x') = \rho(x,x')$ と定義すると、与えられた $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon$ とすると、$\rho(x',y') < \delta$ であれば、

$$f(x') = \rho(x,x') \le \rho(x,y') + \rho(y',x') < f(y') + \varepsilon,$$

[*1] この定理は条件が極めてギリギリなことで知られており、たとえば $\Delta(y)$ が優半連続ではあるが劣半連続ではない場合には $S(y)$ の優半連続性がすぐに言えなくなることが知られている。ケネス・アローはこれを利用して、需要と供給が一致する「均衡価格」がひとつも存在しない経済の例を構成した。

$$f(y') = \rho(x, y') \le \rho(x, x') + \rho(x', y') < f(x') + \varepsilon,$$

となるので、

$$|f(x') - f(y')| < \varepsilon$$

がわかる。よってこの関数 f は連続である。$\Delta(y^*)$ はコンパクトであるため、いま述べた事実から、次の問題

$$\begin{array}{ll} \min & \rho(x_n, x) \\ \text{subject to.} & x \in \Delta(y^*) \end{array}$$

は解 z_n を持つ。(z_n) はコンパクト集合 $\Delta(y^*)$ 上の点列であるため、$z^* \in \Delta(y^*)$ への収束部分列 $(z_{k(n)})$ を持つ。一方、$U_m = \cup_{x \in \Delta(y^*)} B_{\frac{1}{m}}(x)$ と定義すると、これは開集合の族の合併であるため、$\Delta(y^*)$ を含む開集合である。したがって Δ の優半連続性から、$\Delta^{-s}(U_m)$ は開集合であり、よってある $r_m > 0$ に対して $B_{r_m}(y^*) \subset \Delta^{-s}(U_m)$ である。故に、十分大きな N を取れば、$n \ge N$ のときには $y_n \in B_{r_m}(y^*)$ であり、よって $x_n \in U_m$ である。この場合、$\rho(x_n, z_n) < \frac{1}{m}$ であることに注意する。そこで、$\ell(1)$ を $x_{k(n)} \in U_1$ となる最小の n とし、さらに $\ell(2)$ を $x_{k(n)} \in U_2$ となる n の中で、$\ell(1)$ を超える最小のものとする。これを繰り返して $\ell(n)$ を作れば、これは増加関数であり、$\rho(x_{k(\ell(n))}, z_{k(\ell(n))}) < \frac{1}{n}$ が常に満たされることになる。したがって $(x_{k(n)})$ の部分列 $(x_{k(\ell(n))})$ を取れば、

$$\rho(x_{k(\ell(n))}, z^*) \le \rho(x_{k(\ell(n))}, z_{k(\ell(n))}) + \rho(z_{k(\ell(n))}, z^*) < \frac{1}{n} + \rho(z_{k(\ell(n))}, z^*)$$

となるが、左辺は非負で、右辺は $n \to \infty$ のとき 0 に収束するため、はさみうちの原理から、左辺も 0 に収束する。よって点列 (x_n) は $z^* \in \Delta(y^*)$ への収束部分列 $(x_{k(\ell(n))})$ を持つことがわかった。このとき、$(y_{k(\ell(n))})$ は y^* に収束する。記号の節約のために $x'_n = x_{k(\ell(n))}$ とし、$y'_n = y_{k(\ell(n))}$ としよう。

次に、$x \in \Delta(y^*)$ を任意に取る。Δ は劣半連続であるから、$V_n = \Delta^{-w}(B_{\frac{1}{n}}(x))$ は開集合であり、よって上の $\ell(n)$ の作り方と同様にして、$\mu(n)$ という増加関数を、$y'_{\mu(n)} \in V_n$ が常に成り立つように作ることができる。よって $w_n \in \Delta(y_{\mu(n)}) \cap B_{\frac{1}{n}}(x)$ を取ることができる。点列 (w_n) は $\rho(w_n, x) < \frac{1}{n}$ を満たすので、x に収束する。一方、$x'_{\mu(n)} \in S(y'_{\mu(n)})$ なので、

$$f(x'_{\mu(n)}, y'_{\mu(n)}) \ge f(w_n, y'_{\mu(n)})$$

が常に成り立っていて、よって極限を取ることで、

$$f(z^*, y^*) \ge f(x, y^*)$$

がわかる。$x \in \Delta(y^*)$ は任意だったのだから、これは z^* が問題 (3) の解であることを意味する。よって $z^* \in S(y^*)$ である。以上で補題の証明が完成した。 ■

さて、背理法の仮定として、V が連続でなかったとする。するとある $y^* \in Y$ と $\varepsilon > 0$ に対して、y^* に収束しつつ常に $|V(y_n) - V(y^*)| \geq \varepsilon$ となる点列 (y_n) が存在する。このとき、$x_n \in S(y_n)$ を任意に取って、補題 1 を適用して $z^* \in S(y^*)$ への収束部分列 $(x_{k(n)})$ を作れば、$(y_{k(n)})$ は y^* に収束する。f の連続性から、十分大きな n については

$$|f(x'_{\mu(n)}, y'_{\mu(n)}) - f(z^*, y^*)| < \varepsilon$$

となる。これは

$$|V(y_{\mu(n)}) - V(y^*)| < \varepsilon$$

を意味するが仮定に矛盾する。よって V は連続である。

同様に、もし S が優半連続でなかったとすると、ある開集合 U と $y^* \in S^{-s}(U)$ が存在して、どんな n に対しても $\rho(y_n, y^*) < \frac{1}{n}$ を満たす $y_n \notin S^{-s}(U)$ が存在する。対応して $x_n \in S(y_n) \setminus U$ を取れば、補題 1 から、ある $z^* \in S(y^*)$ と、そこに収束する部分列 $(x_{k(n)})$ を作れる。このとき、$z^* \in S(y^*) \subset U$ であり、U は開集合なので、十分大きな n に対しては $x_{k(n)} \in U$ となっていなければならない。しかしこれは x_n の取り方と矛盾する。よって S も優半連続である。以上で証明が完成した。 ■

・需要対応の優半連続性

さて、第六回の講義ノートで考えた効用最大化問題に移ろう。次の問題がそれであった。

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x) \\ \text{subject to.} \quad & x \geq 0, \\ & p \cdot x \leq m. \end{aligned} \tag{4}$$

ただし、$p = (p_1, ..., p_n)$ であり、$p_i > 0$ と $m > 0$ は常に仮定されている。p の動く空間はすべての座標が正の n 次元ベクトルの空間であり、これは $\mathbb{R}^n_{++}$ と書かれる。一方、x の動く空間はすべての座標が非負の n 次元ベクトルの空間であり、これは $\mathbb{R}^n_+$ と書かれる。ここで

$$\Delta(p, m) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ | p \cdot x \leq m\}$$

と定義すれば、問題 (4) は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x) \\ \text{subject to.} \quad & x \in \Delta(p, m). \end{aligned}$$

この問題の解の集合を $f(p,m)$ と呼ぼう。u が連続であるとき、Δ は $\mathbb{R}^n_{++}\times\mathbb{R}_{++}$ から $\mathbb{R}^n_+$ への対応と見なすことができる。このとき、定理 2 の $S(y)$ に対応するものが f である。この対応は**需要対応** (demand correspondence) と呼ばれる。

次の定理が我々が求めていた最初の結果である。

定理３：u が連続であるとき、問題 (4) に対応する需要対応は非空コンパクト値で優半連続である。

証明：定理 2 を適用できればよいので、証明すべきは $\Delta:\mathbb{R}^n_{++}\times\mathbb{R}_{++}\twoheadrightarrow\mathbb{R}^n_+$ がコンパクト値かつ連続であることである。コンパクト値であることは第六回講義ノートの定理 4 の証明ですでに示してあるので、必要なのは連続性の証明だけである。まず劣半連続性から示そう。$x\in\Delta(p,m)$ とし、U は x を含む開集合とする。$x=0$ であれば任意の (q,w) に対して $x\in\Delta(q,w)$ で、よって $\Delta(q,w)\cap U\neq\emptyset$ である。よって、以後では $x\neq 0$ を仮定する。U は開集合だから、ある $r>0$ に対して $B_{2r}(x)\subset U$ となる。r はできるだけ小さく、$r<\|x\|$ となるように取ろう。次に、$0<a<1$ となる a を適切に選んで $(1-a)\|x\|=r$ となるようにして、$x'=ax$ とすれば、$x'\in\Delta(p,m)\cap U$ である。また、

$$p\cdot x'=ap\cdot x<p\cdot x\le m$$

であるから、$\delta>0$ を十分小さく取れば、

$$\sum_{i=1}^n(p_i+\delta)x'_i<m-\delta$$

が成り立つようにできる。そこで、$\|(q,w)-(p,m)\|<\delta$ であれば、$q_i<p_i+\delta$ かつ $w>m-\delta$ なので、

$$q\cdot x'<\sum_{i=1}^n(p_i+\delta)x'_i<m-\delta<w$$

となって、$x'\in\Delta(q,w)$ が言える。以上から、$(q,w)\in B_\delta(p,m)$ であれば $\Delta(q,w)\cap U\neq\emptyset$ であることがわかったので、Δ は (p,m) で劣半連続である。(p,m) は任意の点だったから、Δ は劣半連続であることがわかった。

次に優半連続について。仮に Δ が優半連続でなかったとすると、ある (p,m) に対して、$\Delta(p,m)\subset U$ となる開集合 U と、(p,m) に収束する点列 (q^k,w^k) と、$x^k\in\Delta(q^k,w^k)\setminus U$ を常に満たす点列 (x^k) が存在する。(q^k,w^k) は (p,m) に収束しているので、ある N が存在して、$k\ge N$ ならば $q^k_i\ge p_i/2$ と $w^k\le 3m/2$ を満たす。したがって、

$$0\le p_ix^k_i/2\le q^k_ix^k_i\le q^k\cdot x^k\le w^k\le 3m/2$$

という不等式から、$k \geq N$ ならば

$$0 \leq x_i^k \leq \frac{3m}{p_i}$$

がわかる。そこで $x_i^1, x_i^2, ..., x_i^{N-1}, \frac{3m}{p_i}$ の最大値を M_i とし、それの i についての最大値を M とすれば、$x_i^k \in [0, M]$ がわかる。よって x^k はコンパクト集合である

$$\{x \in \mathbb{R}^n | \forall i,\ x_i \in [0, M]\}$$

上の点列なので、収束部分列を持つ。記述を省略するために、最初からこの部分列を扱っていたことにして、(x^k) は x^* に収束することにしよう。このとき、

$$q^k \cdot x^k \leq w^k$$

なので、k について極限を取れば、

$$p \cdot x^* \leq m$$

となり、よって $x^* \in \Delta(p, m) \subset U$ である。これは、十分大きな k に対して $x^k \in U$ であることを意味するが、$x^k \notin U$ であるように (x^k) を作ったのであるから、矛盾である。以上で証明が完成した。 ■

・凸集合と狭義準凹関数

定理３によって、需要対応の優半連続性は証明できた。しかし、我々が通常扱いたいのは、需要対応ではなく、需要関数、つまり普通の関数としての需要の値である。よって、$f(p, m)$ が一点集合になるための u の条件が追加で欲しい。それはどのようなものであるだろうか？

まず、用語をたくさん追加しなければならない。線形空間 X の部分集合 C は、$x, y \in C$ かつ $0 \leq t \leq 1$ であるならば必ず $(1-t)x + ty \in C$ であるとき、**凸集合** (convex set) であると言われる。上で議論した $\mathbb{R}^n_+$ や $\mathbb{R}^n_{++}$ は典型的な凸集合である。一方、凸でない集合としては、たとえば $\{x \in \mathbb{R}^2 | \|x\| = 1\}$ などが挙げられる。実際、$(1, 0)$ や $(0, 1)$ はこの集合に入っているが、$t = \frac{1}{2}$ として計算した中点 $(1/2, 1/2)$ はこの集合に入っていない。

上で議論した $\Delta(p, m)$ は凸集合である。実際、$x, y \in \Delta(p, m)$ かつ $0 \leq t \leq 1$ とすれば、まず

$$(1-t)x + ty \geq 0$$

であることは明らかである。次に、$p \cdot x \leq m$ かつ $p \cdot y \leq m$ だから、

$$p \cdot [(1-t)x + ty] = (1-t)p \cdot x + tp \cdot y \leq (1-t)m + tm = m$$

となる。よってたしかに $(1-t)x+ty\in\Delta(p,m)$ であることがわかった。

凸集合 C の上で定義された関数 $u:C\to\mathbb{R}$ は、任意の x に対して集合

$$\{y\in C|u(y)\geq u(x)\}$$

が凸集合であるとき、**準凹** (quasi-concave) であると呼ばれる。この定義は、実は次の定義と同値であることがわかっている。u が準凹であるとは、$x,y\in C$ かつ $0\leq t\leq 1$ のときには必ず

$$u((1-t)x+ty)\geq\min\{u(x),u(y)\}\tag{5}$$

が成り立つことを言う。

この不等式 (5) を少し強めてみよう。$x\neq y$ かつ $0<t<1$ のとき、

$$u((1-t)x+ty)>\min\{u(x),u(y)\}\tag{6}$$

が成り立っているような関数は、**狭義準凹** (strictly quasi-concave) と呼ばれる。次の定理は証明はさほど難しくないが、非常に重要である。

定理４：問題

$$\begin{array}{ll}\max & u(x)\\ \text{subject to.} & x\in A\end{array}$$

を考え、ただし A は凸集合で u は狭義準凹であるとする。もし x^* がこの問題の解であるならば、この問題には他の解は存在しない。

証明：$x\in A$ かつ $x^*\neq x$ とする。$t=\frac{1}{2}$ に対して、$y=(1-t)x+tx^*$ と定義する。A は凸集合なので $y\in A$ である。そして、u は狭義準凹だから

$$u(y)>\min\{u(x),u(x^*)\}$$

である。しかし一方で、x^* は問題の解だから $u(x^*)\geq u(y)$ であり、よって $u(x^*)>\min\{u(x),u(x^*)\}$ でなければならない。これは $u(x)<u(x^*)$ を意味する。x は x^* ではない A の任意の要素だったのだから、上の問題の解は x^* ただひとつしかあり得ない。以上で証明が完成した。■

効用最大化問題 (4) に戻ろう。定理３と定理４、そして定理１を適用することで、我々は次の結果を得る。

定理５：効用関数 u が連続かつ狭義準凹であれば、需要関数 f は普通の連続関数になる。

証明：まず u が連続であれば f は定理３から優半連続な対応になる。しかし一方で定理４から、$f(p,m)$ は一点集合でなければならない。よって f は普通の関数である。定理１から、普通の関数については優半連続性と連続性が同値なので、f は連続関数である。以上で証明が完成した。

・ラグランジュ未定乗数法の原理

　今回の最後に、具体的に $f(p,m)$ を求める方法について少し記述しておこう。まず、問題 (4) を再掲する。

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x) \\ \text{subject to.} \quad & x \geq 0, \\ & p \cdot x \leq m. \end{aligned}$$

この問題に対して、以下のような新しい $n+1$ 変数の関数 L を機械的に作る。

$$L(x,\lambda) = u(x) + \lambda(m - p \cdot x). \tag{7}$$

次にこれの偏微分を計算して、すべて 0 になる点を見つける。つまり、

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x,\lambda) = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n}(x,\lambda) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,\lambda) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

という連立方程式を考えるのである。この解が (x^*, λ^*) という形で求まったとしよう。すると、x^* が問題 (4) の解となる。この計算方法を**ラグランジュの未定乗数法** (Lagrange's multiplier rule) と言う。

　実際には、「無条件に」このやり方がうまく行くとは限らず、いろいろな追加条件があって初めて正当化できるのだが、経済学の中で出てくる問題はかなりの場合、これでうまく行く。実際、次の定理が成り立つ。

定理６：u は連続、準凹であるとし、$x^* \geq 0$ かつ $p \cdot x^* \leq m$ で、さらに u は x^* で全微分可能で、$Du(x^*) \neq 0$ であるとする。このとき、もしある正の数 $\lambda^* > 0$ が存在して、(x^*, λ^*) が方程式 (8) の解となるならば、x^* は問題 (4) の解である。

証明：計算してみると、

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*, \lambda^*) = m - p \cdot x^*$$

なので、(8) から $p \cdot x^* = m$ である。次に、

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, \lambda) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) - \lambda^* p_i$$

なので、(8) から $Du(x^*) = \lambda^* p$ である。

仮に、x^* が問題 (4) の解でないとしよう。するとある $x \neq x^*$ に対して、$x \geq 0, p \cdot x \leq m$ でありながら、$u(x) > u(x^*)$ となる。u は連続だから、必要あれば x を少し小さくすることで、$p \cdot x < m$ を仮定してよい。$g(t) = u((1-t)x^* + tx)$ と定義する。このとき、u は準凹なので、

$$g(t) \geq \min\{u(x^*), u(x)\} = u(x^*)$$

がわかる。したがって $t_k = \frac{1}{k}$ としたとき、

$$\frac{g(t_k) - g(0)}{t_k} \geq 0$$

が必ず成り立ち、この極限を取ることで

$$g'(0) \geq 0$$

を得る。一方で合成微分の公式から

$$\begin{aligned} g'(0) &= Du(x^*) \cdot (x - x^*) = \lambda^* p \cdot (x - x^*) = \lambda^*(p \cdot x - p \cdot x^*) \\ &= \lambda^*(p \cdot x - m) < 0 \end{aligned}$$

を得るが、これらは互いに違う向きの不等号であるため両立せず、矛盾が生ずる。よって x^* は (4) の解でなければならない。以上で証明が完成した。 ■

例：$u(x) = x_1 x_2$ に上の定理を適用してみよう。u はたしかに連続であり、また慎重に確かめると狭義準凹であることが示せる。そこで (8) が成り立つ点を計算してみよう。まず (7) に従って関数 L を作ると、

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

である。よって、

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - \lambda p_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - \lambda p_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

が (8) 式である。上のふたつの式から

$$x_2 = \lambda p_1,\ x_1 = \lambda p_2$$

が得られるので、λ について解いて整理すると

$$p_1 x_1 = p_2 x_2$$

が得られる。これを三番目の式に代入して整理すると、

$$m = 2p_1 x_1 = 2p_2 x_2$$

を得るので、

$$x_1 = \frac{m}{2p_1},\ x_2 = \frac{m}{2p_2}$$

が出てくる。これが (4) の解 $f(p, m)$ である。

・先週の課題の解説

紹介した議論は、典型的に教科書で採用されている議論であって、たとえば古い本でも、高木貞治『解析概論』はこの証明を採用している。しかし一方で、杉浦光男『解析入門 I』ではこの手法をとらず、あえて我々のように整級数展開を用いて三角関数を定義している。

この理由は、$(\cos x, \sin x)$ の定義にある。紹介した議論では、原点を中心とした半径 1 の円周を $(1, 0)$ から出発して長さ x だけ反時計回りに進んだときの座標を $(\cos x, \sin x)$ とする、というやり方で $\cos x, \sin x$ という記号を「定義」した。しかし、その定義のためには、「曲線の長さ」というのが定義できていないといけない。円周の一部を取った円弧の長さはどうやって定義するのか？　これを理解するためには、円弧を軌道として持つパラメータ表示された関数 $f(t)$ を用意して、$f(t)$ の性質を吟味しなければならない。そこで $f(t) = (\cos t, \sin t)$ を吟味して円弧の長さを計算してみよう、という話になっていくのだがここで止まってみよう。見返すと、我々は三角関数の定義のために円弧の長さの定義が必要なのに、その円弧の長さの定義のために三角関数が必要になってしまっている。これは循環論法である！

したがってこのやり方は数学的に問題がある。これを解決するやり方として今回は整級数を用いて $\sin x, \cos x$ を定義し、それが上の議論で議論していた $\cos x, \sin x$ と一致することを「証明」したのである。同様に、指数関数 a^x も整級数を用いない定義の方法があ

るのだが、こちらも循環論法までは起こらないものの、連続性を証明するのがかなり難しい。我々のやり方で議論するのが一番簡単であろうと思われる。[2]

・今週の課題

ラグランジュ未定乗数法は便利だが、必ずしも万能ではない。ラグランジュの未定乗数法がうまく機能しない例をいくつか考えてみよ。

[2] より詳しく議論を見たい場合は「斉藤毅　三角関数」で検索するとよい。