講義ノート：総合講座（第十三回）

細矢祐誉

テーマ：可算無限、辞書式順序

・動機

効用最大化問題を再掲しよう。

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x) \\ \text{subject to.} \quad & x \ge 0, \\ & p \cdot x \le m. \end{aligned} \tag{1}$$

この問題の前提として、効用関数 $u(x)$ は人々の消費計画 x に対する望ましさを数値化する関数である、という話だった。しかし、人々の好みは多様にあるはずで、それらがこのような数値で測れるかどうかは、簡単にはわからない。もし連続な効用関数で評価できるような好みが「とてもおかしなものしかない」ということになった場合、この問題を考える根拠は崩壊する。こうして、「どんな好みならば、$u(x)$ の大小で表せるか」という問題が生まれた。今回はこの問題を議論していく。

しかしそのためには前提があって、「可算」という名前で呼ばれる集合の抽象的な性質を理解していないとこの先に進めないのである。ここではまず、可算集合の定義から始め、そこから話を続けていくことにする。

・有限、可算無限

次のふたつの集合を考えよう。

$$A = \{1, 2, 3\},\ B = \{\text{えんぴつ}, \text{りんご}, \text{みかん}\}$$

誰でもわかるように、集合 A と B は同じ個数の要素を持つ。しかし、この「誰でもわかるように」というのがくせ者で、数学では一見して誰でもわかるようでも、厳密に定義してみると変なことが起こる例がたくさんある。したがって数学者は「同じ個数」という概念を厳密に定めるために、次の概念を用いた。いま、$f : X \to Y$ という関数が**単射** (injective) もしくは**一対一** (one to one) であるとは、$x \ne y$ ならば $f(x) \ne f(y)$ が必ず成り立つことである。たとえば $f(x) = x^3$ は一対一であるが、$g(x) = x^2$ はそうではない。$g(-2) = g(2) = 4$ だからである。次に、$f : X \to Y$ が**全射** (surjective) であるとは、

どんな $y \in Y$ についても $f(x) = y$ となる x が存在することを言う。これも、$f(x) = x^3$ は全射だが、$g(x) = x^2$ はそうではない。$g(x) = -1$ となる x は存在しないからである。

全射かつ一対一である関数を**全単射** (bijective) であると言う。集合 A と B は、全単射 $f : A \to B$ が存在するとき、同じ**濃度** (cardinality) であると言う。A と B が同じ濃度で、B と C が同じ濃度ならば、A と C も同じ濃度であることに注意する。実際、$f : A \to B$ と $g : B \to C$ が全単射ならば、$h(a) = g(f(a))$ として定義した $h : A \to C$ は明らかに全単射である。また、$f : A \to B$ が全単射であるとき、$b \in B$ に対して $f(a) = b$ となるただひとつの a を $f^{-1}(b)$ と書くことにすれば、$f^{-1} : B \to A$ も全単射である。よって、A と B が同じ濃度であれば、B と A も同じ濃度である。これらのことは当たり前であるが、一応注意しておく。

特に、ある自然数 n に対して $\{1, 2, ..., n\}$ という集合と同じ濃度を持つ集合は、**有限** (finite) であると言う。たとえば、上の B は、$f : A \to B$ を

$$f(1) = \text{えんぴつ},\ f(2) = \text{みかん},\ f(3) = \text{りんご},$$

とすればこの f は全単射なので、A と同じ濃度を持ち、よって有限集合である。実のところ、有限集合にとっては同じ濃度を持つという関係は、同じ個数であるという関係と同値である。

一方、自然数をすべて集めてできた集合 $\mathbb{N}$ は、明らかに有限ではない。この集合と同じ濃度を持つ集合は**可算無限** (countably infinite) であると言う。有限か可算無限である集合は**可算** (countable) 集合と呼び、そうでない集合は**非可算** (uncountable) 集合と呼ぶ。上で注意したことから、A が可算で B が A と同じ濃度を持つならば B も可算である。

整数 $\mathbb{Z}$ については、

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = -1,\ f(3) = 2,\ f(4) = -2, ...$$

と定義すればこの $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ が全単射となるので、可算無限集合である。このように、自然数より明らかに大きい集合も、可算無限であることがあり得ることに注意しなければならない。

有理数 $\mathbb{Q}$ も可算無限であるが、証明はもう少し難しい。まず、以下の結果を示さなければならない。

定理１：$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は可算集合の族であるとき、$\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ も可算集合である。

証明：証明は以下のステップで行われる。第一に、自然数の任意の部分集合は可算であることを示す。$A \subset \mathbb{N}$ としよう。もし A が有限集合であれば可算なので、A は有限集合

ではないとする。このとき、まず $f(0)$ は A の最小の数とし、以下 $f(0),...,f(n)$ まで定まったとき、$f(n+1)$ は $f(0),...,f(n)$ より大きな A の数の中で最小のものとする。このとき、まず f は明らかに $\mathbb{N}$ から A への単射である。一方、$m \in A$ であれば、m は A の中で最大でも m 番目に小さい数であるから、m 以下の数 n に対して $f(n) = m$ でなければならない。よって f は全射でもある。故に A は $\mathbb{N}$ との間に全単射を持つため、可算無限である。以上で最初のステップの証明が完成した。

第二に、可算集合 A と、$f : A \to B$ が存在して、f が全射であるとすれば、B も可算であることを示す。A が有限であるときには B も明らかに有限だから、A が可算無限であるときだけを考える。定義から、全単射 $g : \mathbb{N} \to A$ が存在する。$h(n) = f(g(n))$ とし、$b \in B$ に対して、$h(n) = b$ となる n の最小数を $m(b)$ とする。このとき、$m(b)$ は単射であり、その像

$$m(B) = \{n \in \mathbb{N} | \exists b \in B \text{ s.t. } m(b) = n\}$$

は自然数の部分集合なので、第一ステップから可算である。そして m は B から $m(B)$ への全単射なので、B は $m(B)$ と同じ濃度を持ち、よって、可算である。以上で第二ステップの証明が完成した。

第三に、$\mathbb{N}^2 = \{(n,m) | n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$ が可算であることを示す。これは単純に、

$$f(m,n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$

とすれば、これが $\mathbb{N}^2$ から $\mathbb{N}$ への全単射を与えている。

第四に、A が有限であれば $\mathbb{N}$ から A への全射な関数が存在することを示す。実際、A が有限であれば、ある n に対して $\{1,...,n\}$ から A への全単射 f が存在する。そこで $g(m)$ を、$1 \le m \le n$ ならば $g(m) = f(m)$ とし、$m > n$ ならば $g(m) = f(n)$ とすれば、この g は $\mathbb{N}$ から A への全射である。

最後に、(A_n) が可算集合の族であるとする。このとき、各 A_n に対しては $\mathbb{N}$ から A_n への全射な関数 f_n が存在する。そこで、

$$f(m,n) = f_n(m)$$

と定義すると、これは $\mathbb{N}^2$ から $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ への全射な関数である。第三ステップから、$\mathbb{N}^2$ は可算であり、よって第二ステップから、$\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ も可算である。以上で証明が完成した。
■

ここで、$n \ge 1$ に対して

$$A_n = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in \mathbb{Z} \right\}$$

と定義する。$\mathbb{Z}$ は可算なので、A_n も可算である。そして、

$$\mathbb{Q} = \cup_n A_n$$

なので、定理１から有理数も可算である。以上で、有理数が可算であることの証明も完成した。

同じ理屈で、すべての座標が有理数であるベクトル $a = (a_1, ..., a_n)$（これを**有理点**と言う）も、可算集合であることが示せる。が、これは学生諸君への演習としよう。

・カントールの対角線論法

というわけで、有理数までのすべての集合は可算であることがわかった。では、可算でない集合はあるのだろうか？　これは、カントールが１９世紀の末に発見した。彼は巧妙な方法によって、閉区間 $[0,1]$ が可算ではないことを示したのである。彼の証明は対角線論法と呼ばれ、非常に多くの応用を持つ。

対角線論法を今回適用するためには、まず十進小数展開の理論についてきちんと整理しなければならない。そこで、以下では $x \in [0,1]$ に対して、この実数の十進小数展開について簡単に話をしよう。まず、$0 \le x \le 1$ である。$x = 0$ であれば $x = 0.000000...$ だから、これについては省略し、$0 < x \le 1$ の時だけを考える。このとき、0 から 9 までのどれかの数 a_1 に対して、

$$\frac{a_1}{10} < x \le \frac{a_1 + 1}{10}$$

となる。$b_1 = \frac{a_1}{10}$ とする。次に、$x_1 = x - b_1$ とする。このとき、$0 < x_1 \le \frac{1}{10}$ である。よって、0 から 9 までのどれかの数 a_2 に対して、

$$\frac{a_2}{100} < x_1 \le \frac{a_2 + 1}{100}$$

である。$b_2 = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}$ とし、$x_2 = x - b_2$ とする。以下、この手続きを続けて $a_{n-1}, b_{n-1}, x_{n-1}$ まで定まったとすると、$0 < x_{n-1} \le \frac{1}{10^{n-1}}$ であるから、0 から 9 までのどれかの数 a_n に対して

$$\frac{a_n}{10^n} < x_{n-1} \le \frac{a_n + 1}{10^n} \tag{2}$$

となる。$b_n = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{10^i}$ とし、$x_n = x - b_n$ とする。このようにして帰納的に、数列 $(a_n), (b_n), (x_n)$ が定義される。$0 \le x - b_n < \frac{1}{10^n}$ なので、(b_n) は x に収束する。このとき、

$$0.a_1a_2a_3a_4...$$

という表示の仕方を、x の**十進小数展開**と呼ぶ。

実は、(2) を以下のように変更することで、もうひとつの十進小数展開が得られる。

$$\frac{a_n}{10^n} \leq x_{n-1} < \frac{a_n + 1}{10^n}. \tag{3}$$

たとえば、$x = \frac{1}{2}$ だとすると、(2) を使った十進小数展開では

$$0.4999999...$$

となる。しかし、(3) を使った十進小数展開だと、

$$0.5000000...$$

となる。つまり、十進小数展開には二通り存在する可能性がある。しかしこの講義では議論を簡単にするために、(2) の方を常に使っていくことにしよう。

さて、これを使って次の定理を示そう。

定理２：閉区間 $[0,1]$ は可算ではない。

証明：有限集合でないことは明らかなので、可算無限集合ではないことを示せばよい。よって、背理法の仮定として、$[0,1]$ は可算無限集合であると仮定する。すると、$\mathbb{N}$ から $[0,1]$ への全単射 $f(n)$ が存在する。$n \geq 1$ に対して、$x_n = f(n-1)$ の十進小数展開を

$$x_n = 0.a_1^n a_2^n a_3^n a_4^n ...$$

とする。そして、b_n を次のように定義する。

$$b_n = \begin{cases} 1 & a_n^n \text{ が偶数}, \\ 2 & a_n^n \text{ が奇数}. \end{cases}$$

そして、$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}$ と定義する。この級数は 0.3 を上界として持つ正項級数なので収束する。そして、任意の n に対して、

$$|x - x_n| \geq \frac{1}{10^{n+1}} > 0$$

なので、x はどの x_n とも異なることになる。したがって、どの自然数 n に対しても $x \neq f(n)$ であるが、これは f が全射であるという仮定に矛盾する。以上で証明が完成した。 ■

・弱順序と表現関数

経済学を始めとした社会科学で人々の好みを表現する最も標準的なモデルは、**弱順序**と呼ばれるものを使って議論することである。いま、集合 X が与えられているとする。$X^2=\{(x,y)|x\in X,y\in X\}$ の部分集合 R のことを、X 上の**二項関係** (binary relation) と言う。これだけだとわかりにくいので、例として以前に挙げた

$$X=\{\text{ えんぴつ, りんご, みかん }\}$$

を見よう。このとき、X^2 は

$$\begin{aligned}&(\text{えんぴつ, えんぴつ}),\ (\text{えんぴつ, りんご}),\ (\text{えんぴつ, みかん}),\\&(\text{りんご, えんぴつ}),\ (\text{りんご, りんご}),\ (\text{りんご, みかん}),\\&(\text{みかん, えんぴつ}),\ (\text{みかん, りんご}),\ (\text{みかん, みかん})\end{aligned}$$

という、9 個の要素からなる集合である。ここでこの集合 X の要素を「果物であるか、ないか」で分類し、「同じ分類である二組」だけを抜き出すと、以下の 5 点からなる集合になる。

$$\begin{aligned}&(\text{えんぴつ, えんぴつ}),\\&(\text{りんご, りんご}),\ (\text{りんご, みかん}),\\&(\text{みかん, りんご}),\ (\text{みかん, みかん})\end{aligned}$$

この 5 点を持つ集合 $R\subset X^2$ を、「同じ分類である」という「関係」と同一視しよう、というのが、この二項関係という概念が背後に持つ思想である。

順序もまた、二項関係の一種である。たとえば実数の順序は、$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2|a-b\geq 0\}$ という集合と同一視すれば、$\mathbb{R}$ 上の二項関係と見なせる。しかし上で挙げた例のような集合は明らかに順序ではない。以下、順序と呼ぶために必要なふたつの性質を挙げる。

まず、X 上の二項関係 R が**完備性** (completeness) を満たすとは、どんな $x,y\in X$ に対しても、$(x,y)\in R$ と $(y,x)\in R$ のどちらかが必ず成り立つということを意味する。我々は順序に完備性が成り立つことを要求するが、これはどんな x,y についても、「どちらが上か」を判定できるものでないと、順序とは呼べないと考えるからである。ただし、「同じ順位」という可能性もあることに注意する。

次に、X 上の二項関係 R が**推移性** (transitivity) を満たすとは、どんな $x,y,z\in X$ に対しても、$(x,y)\in R$ かつ $(y,z)\in R$ であれば、$(x,z)\in R$ である、ということを意味する。順序に推移性が成り立つことを要求するということは、つまり x が y 以上の順位で y が z 以上の順位ならば、x は z 以上の順位であることを要求しているということである。

このふたつの性質が成り立つような二項関係 R を、**弱順序** (weak order) と呼ぶ。弱順序は通常、R ではなく、$\succsim$ という特殊な記号で表現するのが普通である。また、$(x,y)\in\succsim$ と書くとわかりにくいので、通常はこの代わりに、$x\succsim y$ と書く。もちろん、$(x,y)\notin\succsim$ のことは、$x\not\succsim y$ と書く。$x\succsim y$ かつ $y\succsim x$ であるときには、$x\sim y$ と書く。また $x\succsim y$ かつ $y\not\succsim x$ であるときには、$x\succ y$ と書く。

実数の順序は弱順序である。実際、第二回講義ノートで述べた順序体の公理 12) と 13) は、それぞれ完備性と推移性である。11) は仮定していないが、実は 11) は 12) を仮定すると証明できる。一方で 14) は仮定されない。14) は「どんな x に対しても、これと同じ順位のものはない」ことを要求している。実数の順序としてはこの性質は必要だが、弱順序はここまでの性質は要求されない。「同じくらいよいもの」は、あっても問題ないのである。

さて、弱順序の「表現」についての定義を述べておこう。X は集合とし、$\succsim$ はその上の弱順序であるとする。ある関数 $u:X\to\mathbb{R}$ に対して、

$$x\succsim y\Leftrightarrow u(x)\ge u(y) \tag{4}$$

という関係が成り立っているとき、関数 u は弱順序 $\succsim$ を「表現する」と言う。

冒頭の問題 (1) に戻ろう。この問題で、効用関数 $u(x)$ は、消費ベクトル x に対してその望ましさを測る関数だと述べた。別の言い方をすると、効用関数はこの消費者の好みを表す弱順序 $\succsim$ に対して、関係 (4) を満たす関数である。だが、そんなものは一般に存在するのだろうか？　これが、今回の問いであった。

・辞書式順序

前回定義した $\mathbb{R}^n_+$ を思いだそう。これは、すべての座標が 0 以上であるベクトルの集合である。今回は $X=\mathbb{R}^n_+$ として、この上の弱順序 $\succsim$ に対して、それを表現する関数 u が存在するかという問題を扱う。

簡単化のために $n=2$ の場合を扱おう。ここで $\mathbb{R}^2_+$ 上の弱順序 $\succsim_l$ を以下のように定める。

$$x\succsim_l y\Leftrightarrow x_1>y_1 \text{ or } x_1=y_1,\ x_2\ge y_2.$$

これが弱順序であることを示すのは非常に簡単であるため、証明は省略する。この順序を $\mathbb{R}^2_+$ 上の**辞書式順序** (lexicographic order) と言う。

辞書式順序は、辞書で使われる並べ方である。実際、辞書では「一文字目」が早いほうが先に書かれ、一文字目が同じ時に限って、二文字目を比較する。azurite と bay を比較

すると、二文字目は z と a であるが、英和辞典で先に書かれるのは一文字目が早い azurite の方である。このように、この順序は辞書の並びなどで頻繁に使われる。

次の定理は、ジェラール・ドブリューが 1954 年に発見した衝撃的な結果である。

定理３：辞書式順序に対して、(4) を満たす関数 u は存在しない。

証明：背理法による。$u:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}$ が $\succsim_l$ を表現しているとしよう。このとき、

$$g(a)=u(a,1)-u(a,0)$$

と定義する。任意の $a\ge 0$ に対して、$(a,1)\succ_l(a,0)$ なので、$g(a)>0$ である。次に、

$$C=u(1,1)-u(0,0)$$

としよう。$(1,1)\succ_l(0,0)$ なので、$C>0$ である。今度は、$n\ge 1$ に対して

$$A_n=\left\{a\in[0,1]\middle|g(a)\ge\frac{C}{n}\right\}$$

とする。いま $0\le a\le 1$ とすれば、アルキメデスの原理から、$n\ge\frac{C}{g(a)}$ となる自然数 n が存在し、そのとき $a\in A_n$ なので、

$$[0,1]=\cup_n A_n \tag{5}$$

が成り立つ。次に、A_n には最大でも $n-1$ 個の数しか入れないことを示そう。仮にそうでないとし、$a_1,...,a_n\in A_n$ で、$a_1<a_2<...<a_n$ であるとする。このとき、辞書式順序の性質から

$$u(1,1)\ge u(a_n,1),\ u(a_1,0)\ge u(0,0),$$
$$u(a_{i+1},0)>u(a_i,1)$$

が言えるので、これを用いると、

$$\begin{aligned}C=u(1,1)-u(0,0)&\ge u(a_n,1)-u(a_1,0)\\&=\sum_{i=1}^{n}[u(a_i,1)-u(a_i,0)]+\sum_{i=1}^{n-1}[u(a_{i+1},0)-u(a_i,1)]\\&>\sum_{i=1}^{n}g(a_i)\ge\sum_{i=1}^{n}\frac{C}{n}=C\end{aligned}$$

となるが、これは矛盾である。よって、このような $a_1,...,a_n$ は存在できず、A_n は $n-1$ 個以下の要素しか含まない集合である。

したがって A_n は有限集合であり、定理１によって (5) の右辺にある $\cup_n A_n$ は可算集合である。ところが定理２によって (5) の左辺にある $[0,1]$ は可算ではないので、これは矛盾である。以上で証明が完成した。 ■

・ドブリューの表現定理

以上によって、どうやら人々の好みに対しては、弱順序であることに加えてなにか追加条件を課さないと、(4) 式を満たす表現関数が存在するかどうかがわからないことが判明した。では、どのような条件があれば、u の存在が言えるだろうか。この答えは Debreu (1954) が出した。以下、彼の結果を見ていこう。

まず、用語をひとつ、追加で定義しなければならない。以下、X は $\mathbb{R}^n$ の部分集合だということにしよう。$x \in X$ をひとつ取り、集合 $U(x)$ と $L(x)$ を次のように定義しよう。

$$U(x) = \{y \in X | y \succsim x\},$$
$$L(x) = \{y \in X | x \succsim y\}.$$

集合 $U(x)$ は x の**上部等高線集合** (upper contour set)、集合 $L(x)$ は x の**下部等高線集合** (lower contour set) と呼ばれる。

実は、もし (4) を満たす連続関数 $u : X \to \mathbb{R}$ が存在したとすれば、$U(x)$ と $L(x)$ は両方とも閉集合なのである。実際、(y_k) が $U(x)$ 上の点列だとし、$y \in X$ に収束していたとすれば、u の連造成から数列 $(u(y_k))$ は $u(y)$ に収束する。$u(y_k) \geq u(x)$ が常に言えているから、$u(y) \geq u(x)$ であり、よって $y \in U(x)$ である。故に第五回講義ノートの定理４から、$U(x)$ は閉集合である。ほとんど同じ理由で、$L(x)$ も閉集合であることが示せる。

以上は連続な表現関数 u の存在を仮定しての議論だった。そこで、そのような関数が存在するかどうかがわからないときにもこの性質に名前をつけてしまおう。$\mathbb{R}^n_+$ 上の弱順序 $\succsim$ が**連続性** (continuity) を満たすとは、どんな $x \in \mathbb{R}^n_+$ に対しても、$U(x)$ と $L(x)$ が共に閉集合であることを言う。

以下の定理が今回の主要命題である。

定理４ (Debreu, 1954)：X は $\mathbb{R}^n$ の連結な部分集合とし、$\succsim$ は X 上の弱順序であるとする。このとき、$\succsim$ を表現する連続な関数 $u : X \to \mathbb{R}$ が存在するための必要十分条件は、$\succsim$ が連続であることである。

この証明は難しいので、今回の講義ノートの末尾に付録として掲載しておく。問題は、我々がよく使う X が連結であるかどうかである。たとえば経済学で典型的に使われる X

は $\mathbb{R}^n_+$ であるが、これは連結だろうか？　これに答えるのが次の定理である。

定理５：X が $\mathbb{R}^n$ の凸集合であれば、X は連結である。

証明：背理法による。X が連結でないとすれば、X のふたつの非空な相対開集合 U, V で、$U \cap V = \emptyset$ かつ $U \cup V = X$ となるようなものが存在する。U と V は両方とも非空なので、$x \in U$ と $y \in V$ を取り、$t \in [0,1]$ に対して $f(t) = (1-t)x + ty$ と定義する。$f(t)$ の連続性は簡単に証明できる[*1]。よって $U' = f^{-1}(U)$ と $V' = f^{-1}(V)$ は共に $[0,1]$ の開集合であり、$U' \cap V' = \emptyset$ かつ $U' \cup V' = [0,1]$ になる。故に $[0,1]$ は連結ではないことになるが、これは第五回講義ノートの定理８と矛盾する。以上で証明が完成した。 ■

よって、$X = \mathbb{R}^n_+$ のときには、$\succsim$ が連続性を満たせば問題は起こらないことがわかった。辞書式順序の場合、$x = (1,0)$ とし、$y = (1,1)$ として、$x_n = (1+1/n, 0)$ とすると、$x_n \in U(y)$ なのに $x \notin U(y)$ であり、よって $U(y)$ は閉集合ではない。これが問題を起こしていたのである。

・先週の課題の解説

まず、$u(x) = x_1^2 + x_2^2$ とし、$p_1 = p_2 = 1, m = 10$ とすると、

$$L(x,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(10 - x_1 - x_2)$$

なので、

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

が解くべき方程式である。一番目と二番目の式から $x_1 = x_2$ を得るので、三番目の式に代入すれば解として $x_1 = x_2 = 5$ を得る。しかし $u(5,5) = 50$ に対して $u(10,0) = 100$ なので、この点は効用最大化問題の解ではない。

次に、$u(x) = x_1 + x_2$ で、$p_1 = 1, p_2 = 2, m = 10$ としよう。すると、

$$L(x,\lambda) = x_1 + x_2 + \lambda(10 - x_1 - 2x_2)$$

[*1] $\varepsilon > 0$ に対して、$\delta = \frac{\varepsilon}{\|y-x\|}$ と定義すればよい。詳細な確認は学生諸君に任せる。

だから、

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

が解くべき方程式となる。しかし、上の 2 つの式を同時に満たす λ は存在しないので、この方程式には解がない。というわけでこの問題はラグランジュの未定乗数法では解けない。

今度は $u(x) = \sqrt{x_1} + x_2$ とし、$p_1 = p_2 = 1, m = 0.1$ とする。すると、

$$L(x, \lambda) = \sqrt{x_1} + x_2 + \lambda(0.1 - x_1 - x_2)$$

なので、

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.1 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

が解くべき方程式になる。二番目の式から $\lambda = 1$ なので、一番目の式から $x_1 = 0.25$ を得る。したがって三番目の式に代入すると $x_2 = -0.15$ である。よって $x^* = (0.25, -0.15)$ になるが、x_2^* がマイナスなので、この点 x^* は効用最大化問題の前提条件 $x \geq 0$ を満たさず、よって当然ながら解でもない。

１番目の例は u が準凹ではない例になっているが、２番目の例では u は準凹であり、３番目の例では u は狭義準凹である。にもかかわらず、ラグランジュ未定乗数法では解けないのである。このことは案外軽視されているが、ラグランジュ未定乗数法で解けない問題は比較的簡単に作れるということに留意しておきたい。

・今週の課題

今回は定理 5 を少し変えた次の問題を考えてみよう。X は距離空間とする。この X が**弧状連結** (path-connected) であるとは、任意の二点 $x, y \in X$ に対して連続関数 $f : [0, 1] \to X$ で $f(0) = x,\ f(1) = y$ を満たすものが存在することを言う。弧状連結は、我々が考える「つながっている」という感覚と比較的近いように見えるが、これは連結とどのくらい違うのだろうか。弧状連結な空間は連結なのだろうか。あるいは逆は？

・定理４の証明

定理４の証明は、$X=\mathbb{R}^n_+$ や $X=\mathbb{R}^n_{++}$ の場合は若干簡単にできる。しかし、ここでは妥協せず、本来の証明をきちんと書くことにした。本質的には、位相空間の**第二可算公理**と言われる性質とかなり関係した証明なのだが、詳しくはここには書かない。

まず、弱順序の性質をいくつか考えなければならない。以下、X は抽象的な集合で、$\succsim$ はその上の弱順序であるとする。

命題１：$x\succsim y$ かつ $y\succ z$ であるか、あるいは $x\succ y$ かつ $y\succsim z$ であれば、$x\succ z$ である[*2]。

証明：どちらでも同じような証明なので、前者のみを示そう。まず、仮に $x\not\succ z$ だったとする。このとき、$x\not\succsim z$ か $z\succsim x$ のどちらかである。しかし $x\succsim y$ であり、一方で $y\succ z$ であるから、$y\succsim z$ でもあり、よって $\succsim$ の推移性から、$x\succsim z$ でなければならない。これは $z\succsim x$ を意味する。するとふたたび $\succsim$ の推移性から $z\succsim y$ を得るが、$y\succ z$ だったのだから $z\not\succsim y$ であり、これらは矛盾する。よってこのようなことはあり得ない。以上で証明が完成した。 ■

命題２：$x\not\succsim y$ と $y\succ x$ は同値である[*3]。

証明：実際、$y\succ x$ であれば、定義から $x\not\succsim y$ である。逆に、$x\not\succsim y$ であれば、完備性から $y\succsim x$ であり、よって $y\succ x$ である。 ■

まだ準備がいる。上の命題は抽象的な空間上の任意の弱順序が満たす性質だったが、ここで必要になるのは、ユークリッド空間の空間としての性質である。これは補題という形で示しておく。

補題１：任意の $x\in\mathbb{R}^n$ と $r>0$ に対して、$\|z-x\|<r$ となるような有理点 $z\in\mathbb{R}^n$ が存在する。

補題１の証明：まず $i\in\{1,...,n\}$ に対して、第二回講義ノートの定理６から、$|z_i-x_i|<\frac{r}{\sqrt{n}}$ となる有理数 z_i が存在することに注意する。そこで、$z=(z_1,...,z_n)$ とすればこれは有

[*2] 実はこの証明では $\succsim$ の完備性を使っていない。よってこれは、任意の推移的な二項関係について成り立つ性質である。

[*3] こちらも、$\succsim$ の推移性は使っていない。よってこれは任意の完備な二項関係について成り立つ性質である。

理点であり、また

$$\begin{aligned}\|x-z\| &= \sqrt{(x_1-z_1)^2+...+(x_n-z_n)^2}\\ &< \sqrt{n\times\frac{r^2}{n}} = r\end{aligned}$$

となるため、要件を満たす。以上で証明が完成した。 ■

次に、X に対して、開球 $B_r(a)$ が X と共通部分を持つような有理点 a と有理数 r のペア (a,r) をすべて集めてできた集合を I とし、開集合族 $(B_r(a))_{(a,r)\in I}$ を考える。I に所属している (a,r) はそれ自体が $\mathbb{R}^{n+1}$ の有理点であるから、I は可算無限集合であることに注意する。したがって自然数 $\mathbb{N}$ から I への全単射 $h:\mathbb{N}\to I$ が存在する。ここで、各 $k\in\mathbb{N}$ に対して、$h(k)=(a,r)$ として、$w_k\in B_r(a)\cap X$ を一つ取る。すると (w_k) は X 上の点列になる。ここで次の補題を示す。

補題２：$x\succ y$ であるときには必ず、$x\succ w_k\succ y$ となる k が存在する。

証明：まず、仮定から X は連結であり、$\succsim$ は連続性を満たす。よって、$U(x)$ と $L(y)$ は X の相対閉集合であり、故に $X\setminus U(x)$ と $X\setminus L(y)$ は X の相対開集合である。もしある $z\in X$ に対して $z\in U(x)$ かつ $z\in L(y)$ であれば、$y\succsim z$ かつ $z\succsim x$ であることになるが、$\succsim$ の推移性からこれは $y\succsim x$ を意味し、当初の仮定 $x\succ y$ に矛盾する。よって $z\in X$ ならば $X\setminus U(x)$ と $X\setminus L(y)$ のどちらかに所属するため、関係

$$(X\setminus U(x))\cup(X\setminus L(y))=X$$

を得る。また、命題２から $x\in X\setminus L(y)$ かつ $y\in X\setminus U(x)$ なので、これらは両方とも非空である。よって X の連結性から、

$$V=(X\setminus U(x))\cap(X\setminus V(y))$$

は非空でなければならない。そこで $z\in V$ を取る。いま、V はふたつの X の相対開集合の共通部分であるからそれ自身が X の相対開集合であり、よってある $r>0$ が存在して、$B_{2r}(z)\cap X\subset V$ となる。必要ならば r をより小さな有理数と取り替えることで、我々は r を有理数だと仮定してよい。補題１から、$B_r(z)$ には有理点 $a\in\mathbb{R}^n$ が含まれる。$\|z-a\|<r$ だから $z\in B_r(a)\cap X$ であり、よって $(a,r)\in I$ なので、$h(k)=(a,r)$ となる自然数 k が存在する。このとき

$$\|w_k-z\|\le\|w_k-a\|+\|a-z\|<r+r=2r$$

であり、よって $w_k \in B_{2r}(z) \cap X$ であるから、$w_k \in V$ である。V の定義から、このとき $x \succ w_k \succ y$ となる。以上で証明が完成した。 ■

さて、いよいよ定理4の証明に入る。X は連結で、$\succsim$ は連続性を満たす X 上の弱順序とする。まずはすべての $x, y \in X$ に対して $x \sim y$ であるときを考えよう。この場合、$u(x) \equiv 0$ という定数関数は明らかに連続で、(4) を満たす。よって、この場合は考えないことにし、少なくともひとつは $x \succ y$ となる x, y が存在することを仮定する。次に、

$$A = \{z \in X | \forall x \in \mathbb{R}^n_+,\ x \succsim z\},$$

$$B = \{z \in X | \forall x \in \mathbb{R}^n_+,\ z \succsim x\},$$

と定義する。A は「一番悪い点」の集合で、B は「一番よい点」の集合である。$x \succ y$ となる可能性がある以上、A と B は互いに共通部分を持たない集合である（どちらか、あるいはどちらも空集合の可能性はある）。D を、X に含まれる w_k の中で、A にも B にも含まれないものをすべて集めてできた集合とする。明らかに D は可算集合であり、よって自然数 $\mathbb{N}$ から D への全射 $f : \mathbb{N} \to D$ が存在する。ここで、

$$D' = \{f(k) \in D | \forall k' < k,\ f(k') \not\sim f(k)\}$$

と定義する。定義から、$z \in D$ ならば、$z \sim z'$ となる $z' \in D'$ が必ず存在する。仮に D' が有限集合であったとし、しかも相異なる二点 $f(k), f(k')$ を持っていたとしよう。このとき、$f(k) \not\sim f(k')$ なので、$f(k) \succ f(k')$ か $f(k') \succ f(k)$ が成り立つ。どちらでも同じなので $f(k) \succ f(k')$ と仮定しよう。このとき、補題2から $f(k) \succ z_1 \succ f(k')$ となる $z_1 \in D$ が存在する。さらに、$f(k) \succ z_2 \succ z_1$ となる $z_2 \in D$ も存在する。これを繰り返せば $\ell \neq \ell'$ である限り $z_\ell \not\sim z_{\ell'}$ を満たす D 上の点列 (z_ℓ) が作れるが、D' は $z_\ell \sim z$ となる z を少なくともひとつは必ず含むので、D' が有限集合ということに矛盾する。よってこの場合は D' は一点集合であるが、ふたたび補題2を使えば、このときすべての $x, y \in X$ に対して $x \sim y$ であることになり、矛盾。よって、D' は可算無限集合である。故に、自然数 $\mathbb{N}$ から D' への全単射 $g : \mathbb{N} \to D'$ が存在する。$g(k)$ を z_k と書くことにしよう。補題1から、$x \succ y$ であれば、$x \succ z_k \succ y$ となる k が必ず存在する。

次に開区間 $(0, 1)$ を考え、その中の $\frac{m}{2^\ell}$ という形で書ける有理数を取ってくる。最初に、$u(z_0) = \frac{1}{2}$ と定義する。次に、$z_1 \succ z_0$ であれば $u(z_1) = \frac{3}{4}$ と、そうでなければ $u(z_1) = \frac{1}{4}$ と定義する。以下、これを繰り返し、$u(z_k)$ まで定まったとき、以下のようにして $u(z_{k+1})$ を定義する：まず、$z_{k+1} \succ z_q$ が $0 \le q \le k$ となるすべての q に対して成り立つならば、$0 \le q \le k$ という条件の下で $u(z_q)$ が最大になる z_q を取ってきて、$u(z_{k+1}) = \frac{1+u(z_q)}{2}$

と定義する。逆に $z_p \succ z_{k+1}$ が $0 \le p \le k$ となるすべての p に対して成り立つならば、$0 \le p \le k$ という条件の下で $u(z_p)$ が最小になる z_p を取ってきて、$u(z_{k+1}) = \frac{u(z_p)}{2}$ とする。これら以外の場合には、0 から k までの p, q で $z_p \succ z_k \succ z_q$ となるもののうち、最も $u(z_p) - u(z_q)$ の値が小さくなるものを選んできて、$u(z_{k+1}) = \frac{u(z_p)+u(z_q)}{2}$ とする。

この操作によって、$\ell \ge 1$ と $1 \le m \le 2^\ell - 1$ を満たすどんな自然数 ℓ, m に対しても、$u(x) = \frac{m}{2^\ell}$ を満たす $x \in D'$ が存在することが示せる。実際、$\ell = 1, m = 1$ ならば z_0 が該当する。$\ell^* - 1$ までは存在が示せたと仮定してみよう。このとき、$m = 1$ であれば、$u(x) = \frac{1}{2^{\ell^*-1}}$ となる $x \in D'$ を取り、$x \succ z_k$ となる $z_k \in D'$ の中で最も k が小さいものを y とすれば、$u(y) = \frac{1}{2^{\ell^*}}$ である。同様にして残りの m の場合も示せるので、ここは学生諸君への演習としよう。したがって数学的帰納法の原理により、主張は正しい。

さて、$x \in X$ を取る。もし $x \succ z$ となる $z \in D'$ がひとつもないならば $u(x) = 0$ とし、そうでないときには

$$u(x) = \sup\{u(z) | z \in D', x \succ z\} \tag{6}$$

と定義する。以下、これが連続で、(4) を満たす関数であることを示そう。

まず、証明したいのは (4) であるが、これは以下のふたつに分解する。

- $x \succsim y$ ならば、$u(x) \ge u(y)$ である。
- $u(x) \ge u(y)$ ならば、$x \succsim y$ である。

後者の主張はこのままだと使いにくいので、すこし変形しよう。まず、x と y の名前を入れ替えて、「$u(y) \ge u(x)$ ならば $y \succsim x$ である」と言い換える。次に、対偶命題を取る*4。すると、「$y \not\succsim x$ ならば $u(x) > u(y)$ である」となる。さらに命題 2 から、これは「$x \succ y$ ならば $u(x) > u(y)$ である」と書き換えられる。以上の考察から、(4) 式を示すためには、以下のふたつが示せればよいことがわかった。

- $x \succsim y$ ならば、$u(x) \ge u(y)$ である。
- $x \succ y$ ならば、$u(x) > u(y)$ である。

まず前者については、(6) 式を使えばとても簡単に示せる。実際、命題 1 から、$x \succsim y$ であれば、

$$\{z \in D' | y \succ z\} \subset \{z \in D' | x \succ z\}$$

*4 命題「A ならば B」の対偶は、「B でないならば A でない」である。この二つの命題は真偽が一致することが知られている。

となることがわかる。よって、

$$\{u(z)|z \in D',\ y \succ z\} \subset \{u(z)|z \in D',\ x \succ z\}$$

であり、故に左辺の上限である $u(y)$ は、右辺の上限である $u(x)$ 以下でなければならない。

後者については、補題 2 から、$x \succ y$ ならば $x \succ z_k \succ z_{k'} \succ y$ となる k, k' が存在することを利用する。このとき、上限の定義から

$$u(x) \geq u(z_k)$$

でなければならない。一方、作り方から、$u(z_k) > u(z_{k'})$ である。そして、$z \in D'$ かつ $y \succ z$ ならば $u(z_{k'}) > u(z)$ なので、$u(z_{k'}) \geq u(y)$ である。まとめると

$$u(x) \geq u(z_k) > u(z_{k'}) \geq u(y)$$

となって、たしかに $u(x) > u(y)$ が示された。これで、u が (4) を満たすことはわかった。

最後に、与えられた $c \in]0,1[$ に対して、上で書いた $\frac{m}{2^\ell}$ という形の有理数が $]0,1[$ 内で稠密であることから、

$$\begin{aligned}
\{x \in X|u(x) < c\} &= \cup_{y \in \{z \in D'|u(z) < c\}} \{x \in X|u(x) < u(y)\} \\
&= \cup_{y \in \{z \in D'|u(z) < c\}} (X \setminus U(y)), \\
\{x \in X|u(x) > c\} &= \cup_{y \in \{z \in D'|u(z) > c\}} \{x \in X|u(x) > u(y)\} \\
&= \cup_{y \in \{z \in D'|u(z) > c\}} (X \setminus L(y)),
\end{aligned}$$

となるが、$X \setminus U(y)$ や $X \setminus L(y)$ は開集合であるから、これらは両方とも開集合であることがわかる。$c \leq 0, c \geq 1$ のときも簡単に集合 $\{y \in X|u(y) > c\}$ と $\{y \in X|u(y) < c\}$ が開集合であることは証明できるが、これも学生諸君への演習として残しておこう。u が連続であることはこの種の集合が常に開集合であることと同値であるから*5、これで u の連続性が証明できたことになる。以上で証明が完成した。 ■

*5 なぜか？　考えてみよ。