講義ノート：総合講座（第二回）

細矢祐誉

テーマ：実数の基本性質

・体

前回、実数の話をして、デデキントの切断公理について解説した。このデデキントの切断公理は実数として我々が考えるであろうものの持つ「自然な性質」であるが、それ以外にも実数が持つべき性質はある。たとえば、足し算やかけ算が定義されていたり、順序が定義されていたり、といったものである。

現在、標準的な数学の理論では、実数は次の３つの公理を満たすものとして定義される。１）加法と乗法について「体」の構造を為す。２）全順序構造を持ち、さらにその順序が加法乗法と関係を持つ「順序体」の構造を為す。３）「連続性」と呼ばれる性質を満たす。このうち、前回説明したデデキントの切断公理は三番目の性質に関わっているが、これを解析する前にまず、１）と２）の説明をしておこう。

集合 X の二つの要素に対して、集合 X の要素を対応させる規則を X 上の**演算**と呼ぼう。体の公理では、「足し算」と「かけ算」と呼ばれる二つの演算 $+, \times$ が定義されている必要がある。さらにそれらは、以下の１０個の性質を満たす。

1) 加法の結合法則。$a+(b+c)=(a+b)+c$ が成り立つ。
2) 加法の交換法則。$a+b=b+a$ が成り立つ。
3) 加法零元の存在。ある要素 a^* について、すべての a に関して $a+a^*=a$ を満たす。この a^* は普通、0 と書かれる。
4) 加法逆元の存在。どんな a に対しても、$a+b=0$ となる b が存在する。この b は普通、$-a$ と書かれる。
5) 乗法の結合法則。$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$ が成り立つ。
6) 乗法の交換法則。$a\times b=b\times a$ が成り立つ。
7) 乗法零元の存在。ある要素 b^* について、すべての a に関して $a\times b^*=a$ を満たす。この b^* は普通、1 と書かれる。
8) 乗法逆元の存在。0 以外のすべての a に対して、$a\times b=1$ となる b が存在する。この b は普通、b^{-1} または $\frac{1}{b}$ と書かれる。
9) 分配法則。$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$ が成り立つ。
10) $0\neq 1$ が成り立つ。

この１０個の要素を満たす演算規則が存在する集合 X を**体** (field) と呼ぶ。体については、特に誤解の余地がない限り、$a \times b$ は ab と略して書かれる。実数は体でなければならないが、実数以外にも体は存在する。たとえば、有理数は体である。

なお、8) の乗法逆元の存在について、少し違和感を持った学生もいるかもしれない。4) と違って、なぜ「0 以外の」というただし書きがあるのだろうか？　これは、体である限り、必ず次の公式が成り立つからである。

$$\forall a \in X,\ 0a = 0. \tag{1}$$

この公式があるため、もし 0^{-1} が存在したとすれば、

$$0 = 0 \times 0^{-1} = 1$$

となって 10) に違反してしまう。だから 0^{-1} は絶対に存在できないのである。

一応念のために (1) 式を証明しておこう。これは次のように行われる。まず、3) から $0 = 0 + 0$ であるから、9) を用いて

$$0a = (0+0)a = 0a + 0a$$

が成り立つ。よって 4) と 1) から、

$$0 = 0a + (-0a) = 0a + 0a + (-0a) = 0a + 0 = 0a$$

となって、たしかに正しいことがわかった[*1]。

ところで、実数以外にも有理数のような体が存在する、と述べた。他にも複素数のように体であるものは存在するが、もっと変わり者の体はないだろうか？　これを例示するために、本題からは逸れるが「剰余類体」と呼ばれるものを簡単に紹介しておこう。剰余類体は、小学生で習った「割り算の余り」に関する体である。

たとえば、自然数 n を 3 で割った余りは次の集合である。

$$X = \{0, 1, 2\}.$$

つまり、自然数 n はすべて、ある自然数 m と X の要素 a に関して、

$$n = 3m + a$$

[*1] 以上は非常に抽象的な証明なので戸惑うかもしれないが、厳密に議論するというのはこういうことである。実数でこれが成り立つことは、中学生ならば誰でも習って知っている。だが、ここで議論されているのは、実数かどうかもわからない抽象的な「体」と呼ばれるものの話なのである。注意して論理を追って欲しい

という形になっている。a のことを「n を 3 で割った余り」と呼ぶのだが、これに足し算とかけ算を次のように定義してみよう。$a+b$ は「自然数としての $a+b$ を 3 で割った余り」と、また ab は「自然数としての ab を 3 で割った余り」と定義するのである。

具体的には、たとえば $1+2$ は、普通の計算だと 3 になる。しかし、いま考えているのは 3 で割った余りなので、3 を 3 で割った余りを計算する。したがってこれは 0 になる。2×2 は、普通の計算だと 4 になるが、これも 3 で割った余りを取って、1 とする。つまるところこうなる。

$$0+a=a+0=a,\ 1+1=2,\ 1+2=2+1=0,\ 2+2=1,$$

$$0\times a=a\times 0=0,\ 1\times a=a\times 1=a,\ 2\times 2=1.$$

このように定義された「足し算」と「かけ算」に関して、X は体の公理をすべて満足する (たとえば、$2^{-1}=2$ である)。実を言うとこれは 3 で割ったときの余りだけではなく、割り算するときの数が素数であれば必ず成り立つのである。このような「割り算の余り」で作られる体を「剰余類体」と呼ぶ[*2]。

もちろん、このような体に関しても、(1) 式は「必ず」成り立つ。体の公理を用いることの便利なところの一つは、体の公理だけから証明された性質は、「どんな体でも」必ず成り立つということである。それが実数でなく、複素数でも、剰余類体でも、等しく (1) 式は成り立つ。公理を用いて数学を構築することの利点の一つはこのような分析ができることである。

・順序体

続いて順序について触れなければならない。実数は順序構造を持たなければならない。$5>3$ であることや、$0>-6$ であることは、学生諸君は言われなくともわかっているだろう。この $>$ や $\geq$ という順序の構造については、次の 6 個の公理が置かれている。

11) 順序の反射性。$a\geq a$ である。
12) 順序の完備性。どんな $a,b\in X$ に対しても、$a\geq b$ か $b\geq a$ のどちらかが成り立つ。
13) 順序の推移性。$a\geq b$ かつ $b\geq c$ ならば、$a\geq c$ である。
14) 全順序性。$a\geq b$ かつ $b\geq a$ ならば、$a=b$ である。
15) 加法との関係。$a\geq b$ ならば $a+c\geq b+c$ である。
16) 乗法との関係。$a\geq 0$ かつ $b\geq 0$ ならば $a\times b\geq 0$ である。

[*2] 経済学ではあまり使われないが、この概念は現代の代数学では極めて重要な役割を果たす。

なお、$a \geq b$ かつ $a \neq b$ であるときには、普通 $a > b$ と書く。

ある体が上の 6 つの公理を満たす順序構造を持つとき、それを**順序体** (ordered field) と呼ぶ。実数や有理数は順序体である。一方で、複素数は、順序体ではない。なぜなら、1 と i のどちらが大きいかを判定できず、12) を満たさないからである。また、前の節で述べた 3 の剰余類体 $\{0, 1, 2\}$ も順序体ではない。たとえば、$2 \geq 1$ であるが、

$$2 + 1 = 0 < 2 = 1 + 1$$

となって、15) を満たさないのである。

このように、順序体であるというのは、それだけでかなり強い制約を持つ。体であるだけならばたくさんの例が作れるのだが、順序体はなかなか作りにくい。実のところ、ある意味で有理数は順序体として「最小」であることがわかっている。つまり、順序体は必ず、その一部に有理数と同じ構造をしたものを含んでいるということが、証明されている。

しかし、有理数は順序体なので、「順序体である」というだけでは、まだ実数であることを特定するのは不可能である。最後の一押しになるものが、追加で必要になる。

・連続性公理

実数の最後の公理は、「上界」という概念にまつわるものである。いま、A を空集合ではないような $\mathbb{R}$ の部分集合としよう。数 b が次の性質：

$$\forall a \in A,\ a \leq b$$

を満たしているとき、b のことを A の**上界** (upper bound) と呼ぶ。

A の上界の集合を U_A と書く。このとき、実数の最後の公理は次のものである。

17) 部分集合 A が非空で、U_A も非空であるならば、U_A には最小の数が存在する。

この公理を、**連続性** (continuity) の公理と呼ぶ。

一見して、この性質がなにを意味するのかがわからないという学生が大半であろう。しかし実は、次の定理が示せる。これは、実数の連続性が持つ意味が、前回のノートで説明した「あらゆる線分の長さを測れる」という意味に他ならないことを示している。

定理１：X は順序体とする。このとき、X がデデキントの切断公理を満たすことと、17) を満たすことは同値である。

証明：まず、証明の準備として、この定理の主張を「X がデデキントの切断公理を満たせば 17) を満たす」という主張と「X が 17) を満たせばデデキントの切断公理を満たす」

という主張に分解しよう。多くの場合、同値性の証明はこうして分解した方が簡単に示せる。

最初に前者、つまり X がデデキントの切断公理を満たせば 17) を満たすことを示そう。そのために、まずはデデキントの切断公理を復習しよう。順序体 X において**切断**とは、次の 3 つの条件を満たすような X の非空な部分集合 A と B のペアのことであった。

(i) $A \cup B = X$.
(ii) $A \cap B = \emptyset$.
(iii) $a \in A$ で $b \in B$ ならば $a < b$.

そしてデデキントの切断公理とは、A と B のペアが切断であれば、必ず A に最大の数があるか、B に最小の数があるかのどちらかである、という公理だった。

さて、このデデキントの切断公理が成り立つことを仮定する。そして、$A \subset X$ が空集合ではなく、$U_A \subset X$ も空集合ではないとしよう。ここで、

$$V_A = \{b \in X | \exists a \in A \text{ s.t. } b < a\}$$

と定義する。このとき、V_A と U_A のペアは、切断である。(i) と (ii) は明白だと思われるが、(iii) はそこまで明白ではないと思うので、それだけ示そう。いま $a \in V_A$ かつ $b \in U_A$ だと仮定する。このとき、$a \in V_A$ であるから、ある $c \in A$ に対して $a < c$ である。そして $b \in U_A$ であるから、$c \leq b$ である。つなげると、$a < c \leq b$ なので $a < b$ である。よってたしかに、V_A と U_A の組は切断であることがわかった。

ところで、もし V_A に最大の数 b^* があったとしよう。このとき、V_A の定義から、ある $a \in A$ に対して $b^* < a$ である。すると、$c = \frac{b^*+a}{2}$ としたとき、c は b^* と a の平均だから、$b^* < c < a$ である。$c < a$ は $c \in V_A$ を意味するが、b^* は V_A の最大の数だったのだから、これは矛盾である。よって V_A には最大の数はないので、デデキントの切断公理から、U_A の方に最小の数がなければならない。したがって、17) が成り立つ。これで片方が示せた。

逆に、17) が成り立つと仮定する。A と B のペアが切断であるとすると、A は非空であり、$B \subset U_A$ であるから U_A も非空である。いま、17) が成り立つと仮定されているので、U_A には最小の数 a^* が存在する。$a^* \in A$ だとしよう。このとき、$a^* \in U_A$ であるから、どんな $a \in A$ に対しても $a \leq a^*$ となる。よって a^* は A の最大数である。今度は $a^* \notin A$ だとしよう。すると (i) から $a^* \in B$ である。a^* は U_A の最小数なので、$a < a^*$ ならば $a \notin U_A$ であり、したがって $a < b$ となるような $b \in A$ が存在する。切断の性質 (iii) から、このとき $a \notin B$ であり、よって a^* は B の最小数である。故に、a^* は A の

最大数か B の最小数かのどちらかであり、したがってデデキントの切断公理が成り立つ。以上で証明が完成した。 ■

よって、連続性の公理 17) はデデキントの切断公理と同値である。実は、17) を満たすような順序体はある意味ですべて「同じ構造」を持っていることが証明されている。したがって現代の数学では、この 1)-17) が実数を特定する「公理」であると考えられているのである。逆に言うと、現代数学で「実数」と言った場合、17) を満たす順序体という意味である。それ以上のことは求められない。

なお、有理数体 $\mathbb{Q}$ は 17) を満たさない。示すためには、次の集合

$$A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 \leq 2\}$$

を考えると、$U_A = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0,\ x^2 \geq 2\}$ であるが、これの最小値は存在しない。存在するとすれば $\sqrt{2}$ になるが、これが有理数でないことは前回の講義ノートで書いた通りである。

・上限と下限

実数の連続性公理はとても重要なので、もう少し細かく見ていこう。$A \subset \mathbb{R}$ が非空集合であるとき、上界の集合 U_A は、

$$U_A = \{b \in \mathbb{R} | \forall a \in A,\ a \leq b\}$$

と定義される。この集合が非空であるとき、A は**上に有界** (bounded from above) であると言われる。この U_A の最小値は A の**上限** (supremum) と呼ばれ、$\sup A$ と書かれる。

この $\sup A$ という記号が便利なのは、「A の最大数」がない場合にも、「A の上限」ならある場合があるからである。もし A の中に A の最大数があれば、それが A の上限である。しかし、A としてはたとえば次の集合

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

が考えられる（これは**開区間**と呼ばれるタイプの集合である)。この集合 (a, b) には最大数は当然ながら存在しない。しかし、$\sup(a, b) = b$ である。このように、「最大数」がないものに「最大数のようなもの」を見つけることができるのが、この sup という記号のすごいところなのである。

なお、U_A が空集合であるときには、$\sup A = +\infty$ とするのが慣例である。

上限と同様に、**下限** (infimum) も定義しておこう。$A \subset \mathbb{R}$ が非空であるとき、

$$L_A = \{b \in \mathbb{R} | \forall a \in A,\ b \leq a\}$$

と定義する。この L_A の要素となる数を A の**下界** (lower bound) と呼ぶ。連続性の公理を使うと簡単に、L_A が非空であればそれには最大数が存在することが示せるが、この最大数を A の下限と呼んで、$\inf A$ と書く。たとえば $\inf(a, b) = a$ である。もちろんこの場合も、L_A が非空である場合には A は**下に有界** (bounded from below) と呼ぶし、L_A が空集合になる場合には慣例上 $\inf A = -\infty$ とするのが普通である。これらの記号は現代数学とその応用にとってとても大切で、頻繁に出てくるので、覚えておこう。

・数列と収束

学生諸君は関数というものをどう捉えているだろうか。実は数学では、関数というのは極めて抽象的な「規則」として捉えられる。そこには「入れるもの」と「出てくるもの」が存在する。関数 f があったとき、この関数に「入れてもいいもの」の集合はこの関数の**定義域** (domain) と呼ばれ、「出てくるもの」の集合はこの関数の**値域** (range) と呼ばれる。関数 f の定義域が A で値域が B であることは、$f : A \to B$ という記号で表すのが普通である。

上記のように、関数自身の名前は f なのだが、「関数であること」を強調したいことがある。その場合は普通、$f(x)$ と書いておくのが普通である。f に a を入れたときに出てきたものは $f(a)$ と書かれるので、$f(x)$ というのは「f に x を入れたときに出てきたもの」と混同しそうに見える。しかし数学では、$f(x)$ と書いた方が文章が見やすくなることがよくあるため、あえてこのように書くのである。

なお、関数を具体的に書く場合に、少し問題がある。たとえば数 x を放り込むと x^2 を返す関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は、$f(x) = x^2$ と書かれる。これも普通はこう書くのだがこれだとわかりにくい場合があって、たまに代わりの書き方として

$$f : x \mapsto x^2$$

という書き方をすることがある。似た矢印でも、$\to$ と $\mapsto$ ではまったく違う意味になることに注意しよう。

さて、今回問題にするのは $a : \mathbb{N} \to X$ である。このように定義域が自然数であるような関数は**点列**と呼ばれ、特に $X = \mathbb{R}$ である場合は、**数列**と呼ばれる。高校数学では、数列というのは非常に規則的なものしか扱ってこなかった。しかし大学以降の数学で扱われる数列は、極めて不規則な動きをするものも含まれる。

数列については、$a(n)$ と書く代わりに $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ と書くのが普通である[*3]。しばしば簡略化されて (a_n) とだけ書かれることもある。また、ある n^* という自然数があって、n^* 版以降の n に対してしか a_n が定義されていないような場合には $(a_n)_{n=n^*}^{\infty}$ と書くが、これも n^* が明白である場合には省略して (a_n) とだけ書いてしまう場合が多い。

数列に関して最も重要な概念は**収束** (convergence) である。数列 (a_n) がある数 α に収束するとは、以下の論理式が成り立つことである[*4]。

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \text{ s.t. } n \ge N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon. \tag{2}$$

まだ述語論理に慣れていない学生も多いだろうから、日本語に直しておこう。a_n が α に収束するとは、以下の日本語文が成り立つことである。

「どんな正の数 ε に対しても、ある番号 N が存在して、N 以降の番号 n については $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる」

これは機械的に直したものだが、もっと意味をかみ砕いたものが以下の文章になる。

「どんな**小さな**正の数 ε に対しても、ある番号 N が存在して、N 以降の番号 n については、a_n と α の**距離**が ε より近くなる」

こう直せば、言いたいことはだいたいわかるであろう。たとえば ε として $1/1000000$ のようなものすごく小さな数を取っても、n がものすごく大きなところでは、a_n と α との距離 $|a_n - \alpha|$ はこの数よりも小さくなっている、というのが、「a_n が α に収束する」ということの意味なのである。

数列 (a_n) が α に収束することを $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と書く。以下の定理は当たり前のように見えるかもしれないが、重要である。

定理２：(a_n) は数列であり、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であるとする。このとき、α と異なるどんな数 β に対しても、(a_n) は β に収束しない。

証明：$\varepsilon = \frac{|\alpha-\beta|}{2}$ と設定しよう。(2) から、十分大きな N に対して、$n \ge N$ であれば

[*3] 数学者はしばしば $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ という書き方を好む。しかし、講師はこの書き方は集合と混同する危険性があるため、あまりよくないと感じている。そのため、この授業では中括弧ではなく丸括弧を用いることにした。

[*4] 数列 (a_n) が $n \to \infty$ のとき α に収束する、という言い方もしばしば使うが、意味は同じである。

$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ である。絶対値に関する三角不等式から[*5]、

$$2\varepsilon = |\alpha - \beta| = |\alpha - a_n + a_n - \beta| \leq |\alpha - a_n| + |a_n - \beta|$$

であり、したがって

$$|a_n - \beta| \geq 2\varepsilon - |a_n - \alpha|$$

である。よって、$n \geq N$ であれば $|a_n - \beta| > \varepsilon$ でなければならない。もし (a_n) が β にも収束していたとすれば、ある M が存在して、$n \geq M$ であれば $|a_n - \beta| < \varepsilon$ にならなければならないが、n を N と M の大きな方よりさらに大きく取れば前述のように $|a_n - \beta| > \varepsilon$ であるから、矛盾が生ずる。よってこのような M は絶対に存在せず、故に (a_n) は β には収束しない。以上で証明が完成した。 ■

さて、数列について**有界性**の概念を与えよう。数列 (a_n) は、ある大きな数 $M > 0$ について、すべての番号 n に対して $a_n < M$ が成り立つとき、**上に有界**であると言う。同様に、ある大きな数 $M > 0$ について、すべての番号 n に対して $a_n > -M$ が成り立つとき、**下に有界**であると言う。上に有界で、かつ下に有界でもあるような数列は、単に**有界**であると呼ばれる。

次に、単調数列について定義しよう。数列 (a_n) は、$n \geq m$ であるとき常に $a_n \geq a_m$ であるならば、**単調非減少**である、と呼ばれる。逆に、$n \geq m$ であるとき常に $a_n \leq a_m$ であるならば、**単調非増加**である、と呼ばれる。

以上の準備の下、以下のとても大切な定理を示そう。

定理３：上に有界な単調非減少数列は上限に収束する。また、下に有界な単調非増加数列は下限に収束する。

証明：どちらも同じような証明になるため、「上に有界な単調非減少数列」の方だけを取り扱う。$A = \{x \in \mathbb{R} | \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x = a_n\}$ と定義する。A は非空である。(a_n) は上に有界なので、U_A も非空である。よって上限 $a^* = \sup A$ は実数である。いま、$\varepsilon > 0$ を取ってきてみれば、a^* は U_A の最小数なのだから、$a^* - \varepsilon$ は U_A に含まれない。よって、ある A の要素 x が存在して、$a^* - \varepsilon < x$ となる。a^* は U_A に含まれるので $x \leq a^*$ である。$x = a_N$ とすると、(a_n) は単調非減少なので、$n \geq N$ であれば

$$a^* - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a^*$$

[*5] 三角不等式 $|a+b| \leq |a| + |b|$ については、もう少し先の授業で詳しく解説する。

であることになる。これは、$|a^* - a_n| < \varepsilon$ を意味する。よって、(2) が $\alpha = a^*$ に対して成り立っていることがわかり、定理の証明が完成した。 ■

この定理は単純なように見えるが、その実ものすごく大きな意味を持っている。実は、順序体 X について、この「上に有界な単調非減少数列は必ず収束する」という性質は、連続性公理 17) と同値であることが知られている。したがって上の定理を「公理」として議論することもできる。この定理は実数の最も基本的な性質の一つであり、その応用範囲は極めて広い。

・最小値原理

前回、付録において「最小値原理」という名前の自然数の性質が出てきた。この性質は本来ならば出てきた時点で証明されなければならなかったが、前回は実数体の公理を説明しきっていなかったため、示せなかった。今回は定理３を用いて、この定理を証明しよう。

定理４（最小値原理）：A が $\mathbb{N}$ の非空な部分集合であれば、A には最小数が存在する。

証明：背理法による。A が $\mathbb{N}$ の部分集合で、かつ非空であるにもかかわらず、最小数が存在しないとしよう。A は非空であると仮定されているので、$n_0 \in A$ が存在する。n_0 は A 内で最小ではないため、$n_1 < n_0$ となる $n_1 \in A$ が存在する。以下、n_k まで定まり、すべての i について $n_i \in A$ で、かつ $i < j$ ならば $n_j < n_i$ であるとしよう。すると、n_k は A の中で最小ではないため、$n_{k+1} < n_k$ となる $n_{k+1} \in A$ が存在する。こうして、数列 (n_k) が定義できたことになるが、n_k はすべて自然数なので $0 \le n_k$ であり、したがってこれは下に有界な単調非増加数列である。よって定理３から、(n_k) はある $n^* \in \mathbb{R}$ に収束する。故に $\varepsilon = 1$ に対してある数 K が存在して、$k \ge K$ ならば $|n^* - n_k| < 1$ であるはずである。しかしこのとき、

$$n_{K+1} \le n_K - 1 < n^*$$

であり、

$$n_{K+2} \le n_{K+1} - 1 < n^* - 1$$

なので、

$$|n_{K+2} - n^*| > 1$$

となって矛盾が生ずる。以上で証明が完成した。 ■

最小値原理は非常に重要な応用を持つ。そのうちのひとつが**数学的帰納法の原理**である。この原理は、自然数 k に対するある性質の正しさを測るための最も有効な手法のひとつである。定理の形にまとめておこう。

定理５（数学的帰納法の原理）：自然数に対する命題 P があって、次の二性質を満たしていたとする。

1) $n^* \in \mathbb{N}$ に対しては P が成り立つ。
2) $k \in \mathbb{N}$ に対して P が成り立つならば、$k+1$ に対しても P が成り立つ。

このとき、n^* 以上のすべての自然数に対して P が成り立つ。

証明：いま集合 A を、n^* 以上の自然数で P が成り立たないものをすべて集めてできた集合とする。もし A が非空であれば、最小値原理から、最小数 $\bar{n} \in A$ が存在する。1) を仮定しているので $n^* < \bar{n}$ であり、よって $k = \bar{n} - 1$ とすれば、$n^* \leq k$ である。そして定義から $k \notin A$ なので、k については P が成り立つ。2) から $\bar{n} = k+1$ についても P が成り立つが、これは $\bar{n} \notin A$ を意味し矛盾。よって A は空集合である。故に、主張は正しい。以上で証明が完成した。 ■

最後に、前回証明したアルキメデスの原理と最小値原理の非常に単純な応用として、以下の定理を証明しておこう。これも後々重要になる。

定理６：どんな実数 x と数 $\varepsilon > 0$ に対しても、$|y - x| < \varepsilon$ となる有理数 y が存在する。

証明：$x = 0$ ならば $y = 0$ とすればよいので、それ以外を扱おう。$z = |x|$ とする。また、アルキメデスの原理から、$N > \frac{1}{\varepsilon}$ となる自然数 N が存在するが、$10^N > N$ であるため、$\varepsilon > \frac{1}{10^N}$ である。そこで、ふたたびアルキメデスの原理から、$M > 10^N z$ となる自然数 M が存在する。よって集合

$$A = \{n \in \mathbb{N} | n \geq 10^N z\}$$

は非空な $\mathbb{N}$ の部分集合であり、定理４から A は最小数 M^* を持つ。$M^* - 1 < 10^N z \leq M^*$ であるため、

$$\left| \frac{M^*}{10^N} - z \right| < \frac{1}{10^N} < \varepsilon$$

であるが、$\frac{M^*}{10^N}$ は有理数である。$x > 0$ のときは $z = x$ なので、$y = \frac{M^*}{10^N}$ とすればよい。$x < 0$ のときは $z = -x$ なので、$y = -\frac{M^*}{10^N}$ とすればよい。以上で証明が完成した。 ■

・基本的な収束

後でよく使うので、$a_n = \frac{1}{n}$ としたときに数列 (a_n) が 0 に収束することを示しておこう。これはアルキメデスの原理から簡単に示せる。実際、$\varepsilon > 0$ をひとつ取ると、アルキメデスの原理から、$N > \frac{1}{\varepsilon}$ となる自然数 N の存在が示せる。$n \geq N$ ならば、$n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ なので、$0 < a_n < \varepsilon$ であり、よって $|a_n - 0| < \varepsilon$ である。これで証明が終わった。

同様にして、たとえば $a_n = \frac{1}{2^n}$ としたときに (a_n) が 0 に収束することも示せるが、これは学生への練習問題として残す。

・前回の課題の解説

まず、$\forall$ に関係する箇所は、互いに順序を入れ替えても意味が変わらないということを前回の講義ノートで説明した。したがって、1. と 2. と 3. は全部同じ意味になる。そこで 1. を見てみよう。これは

$$\forall y,\ \forall x,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

という形をしている。しかし、この式は**恒真式**であり、どんな関数を持ってきても絶対に成り立つ。なぜかというと、まず y と x が同じ場合には、$|y - x| = |f(y) - f(x)| = 0$ なのだから $\delta = 1$ などを適当に選んでおけば当然成り立つとして、y と x が違う場合には、$\delta = |y - x|$ とすればよいのである。こうすると、$|y - x| < \delta$ は成り立たなくなる。一般に、「$A \Rightarrow B$」が正しくなくなるのは、「A が成り立つのに B が成り立たないとき」だけである。いまの場合、A に当たる $|y - x| < \delta$ が正しくないので、$A \Rightarrow B$ はなにがあろうと正しくなり、結果として成り立ってしまう。よって上の式は、関数の条件としては「意味のない式」になる。

なぜこれが起こったかというと、「y に応じて δ を変えることができる」ことが問題なのである。そこで 4. を見てみると、

$$\forall x,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall y,\ |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

となっている。日本語に書き直すと、

「どんな x と正の数 ε に対しても、ある正の数 δ が存在して、どんな y に対しても、$|y - x| < \delta$ ならば $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ である」

となる。これは、δ を選んでから y を選んでいるので、上のように y に応じて δ を変えることが禁止されている。したがって、4. のみが本来の文章と同じ意味であり、他はすべて本来の意味と変わってしまっているため、4. が正解になる。

・今回の課題

体の公理についてもう少し考えてみよう。次の二つの式を考えてもらいたい。

$$a + 1 \neq a, \tag{3}$$
$$1 + 1 \neq 0. \tag{4}$$

これらの式は、たとえば実数ならばどちらも当然のように成り立つものである。では、実数ではない体も含めて、「すべての体で」正しいだろうか？