講義ノート：総合講座（第三回）

細矢祐誉

テーマ：実数の基本性質（3）

・数列の収束、発散

前回議論した数列の収束の定義をもう一度書いてみよう。数列 (a_n) が α に収束するとは、

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon \tag{1}$$

が成り立つことを言う。このことを $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と書く。

しかしながら、数列の収束には常に難しい問題がつきまとう。具体的に数列が与えられたとき、それが「どこに収束するか」がわからないと、上の (1) 式が成り立つかどうかをチェックできない。つまり、「収束しているかどうかを判定する」ために「収束先を知っている」必要があることになる。しかし普通に考えて、収束するかどうかもわかっていないときに収束先を知ることは不可能である。

したがって、「収束先がわからない状態でも収束しているかどうかが判定できる」ための条件が必要である。前回、そのような条件のひとつを証明した。つまり、上に有界な非減少数列、および下に有界な非増加数列は、収束することがわかっている。実はこれだけでも、経済学への応用がある。今日はそれを見ていき、また、より汎用的な判定定理も扱う。

なお、前回は述べなかったが、もうひとつ概念が必要なので定義しておこう。数列 (a_n) が $+\infty$ に**発散** (diverge) するとは、次の論理式が成り立つことである。

$$\forall M > 0,\ \exists N \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow a_n \geq M. \tag{2}$$

これは $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ と書かれる。また同様に、(a_n) が $-\infty$ に発散するとは、次の論理式が成り立つことである。

$$\forall M > 0,\ \exists N \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow a_n \leq -M. \tag{3}$$

こちらは $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と書かれる。前回述べたことから、非減少数列は収束しなければ $+\infty$ に発散しており、また非増加数列は収束しなければ $-\infty$ に発散しているが、これは非減少でも非増加でもない数列には当てはまらない。たとえば

$$a_n = (-1)^n$$

で定義される数列 (a_n) はどこにも収束しないが、発散もしない。この点に注意しよう。

・はさみうちの原理

収束を判定するに当たって最も有用なのは、すでに収束がわかっている別の数列を利用することである。次の定理は後々まで有用になるもので、**はさみうちの原理**と呼ばれている。

定理1：$(a_n), (b_n), (c_n)$ はすべて数列で、すべての n について $a_n \leq c_n \leq b_n$ が常に成り立ち、さらに (a_n) と (b_n) は共に α に収束しているとする。このとき、c_n も α に収束する。

証明：まず、$\varepsilon > 0$ を取って固定する。(a_n) は α に収束しているから、ある N_1 が存在して、$n \geq N_1$ ならば、

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となる。このとき、

$$a_n > \alpha - \varepsilon$$

であることがわかるので、$c_n \geq a_n$ だから、

$$c_n > \alpha - \varepsilon$$

である。

一方、(b_n) も α に収束しているので、ある N_2 が存在して、$n \geq N_2$ ならば、

$$|b_n - \alpha| < \varepsilon$$

となる。このとき、

$$b_n < \alpha + \varepsilon$$

であるから、$c_n \leq b_n$ を用いて、

$$c_n < \alpha + \varepsilon$$

である。したがって以上から、N_1 と N_2 の大きい方を N として、$n \geq N$ ならば

$$\alpha - \varepsilon < c_n < \alpha + \varepsilon$$

であり、よって

$$|c_n - \alpha| < \varepsilon$$

となる。故に (c_n) は α に収束する。以上で証明が完成した。 ■

　これが最も典型的に働くのは、$a_n = 0$ が常に成り立ち、かつ (b_n) が 0 に収束する場合である。この場合、$0 \le c_n \le b_n$ を確かめられた時点で、(c_n) が 0 に収束することが示せる。後で何度も使う論法なので覚えておこう。

　なお、時に次の**追い出しの原理**と呼ばれる定理が必要になる場合もあるので、示しておく。

定理２：(a_n) と (b_n) は数列で、すべての n について $a_n \le b_n$ が成り立っているとする。もし (a_n) が $+\infty$ に発散しているならば、(b_n) も $+\infty$ に発散する。また逆に、もし (b_n) が $-\infty$ に発散しているならば、(a_n) も $-\infty$ に発散する。

証明：どちらも同じなので、(a_n) が $+\infty$ に発散している場合だけを示そう。このとき、$M > 0$ を任意に取ると、ある N が存在して、$n \ge N$ ならば $a_n > M$ である。$a_n \le b_n$ がすべての n について成り立つから、$n \ge N$ ならば $b_n > M$ でもある。したがって (b_n) も $+\infty$ に発散している。以上で証明が完成した。 ■

　ここでひとつ注意を追加しておく。上で仮定した関係 $a_n \le c_n \le b_n$ や $a_n \le b_n$ は「すべての n について」としたが、「ある n^* 番以降のすべての n について」だったとしても、定理１や定理２は変わらず成り立つ。収束というのは十分に大きい番号以上についてのみに関わる性質なので、このようなことは以降注意書きなしに度々用いる。

・級数

　数列 (a_n) があったとき、$a_m + a_{m+1} + ... + a_n$ という足し算は

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

と省略して書かれる。特に足し算の範囲が言わなくてもわかるような場合、$\sum_i a_i$ などと略記される場合もある。

　さて、$\sum_{i=1}^{n} a_i = s_n$ と定義しよう。このように定義してできた数列 (s_n) が収束するとき、その収束先を

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

と書く。上の記号自体は**級数** (series) と呼ばれる記法である。これも級数であることが明

確である場合には単に $\sum a_n$ などのように略記される場合がある。また、$n=1$ から始まるのは必須でなく、たとえば 0 から始まる

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

という級数もよく見かける。また、別の書き方をすれば、$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ なのだから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$$

と書き直すこともできる。

いくつかの級数については、すでに学生諸君はその収束先を知っているはずである。たとえば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

という公式は、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = 1$$

という形で、すでに習っている学生が多いだろう。しかし厳密に示すことは案外難しい。まず、$a_n = \frac{1}{2^n}$ とした場合、

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} \tag{4}$$

となる。等比数列の部分和の公式

$$a + ax + ax^2 + ... + ax^{n-1} = a\frac{1-x^n}{1-x} \tag{5}$$

の $x = \frac{1}{2}$ とし、$a = \frac{1}{2}$ として (4) に代入すると、

$$s_n = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

となる。ここで、$\varepsilon > 0$ を任意に取ろう。第一回で証明したアルキメデスの原理から、$N > \frac{1}{\varepsilon}$ となる N が存在する。すると、$\varepsilon > \frac{1}{N} \geq \frac{1}{2^N}$ である。よって、$n \geq N$ であれば、

$$|s_n - 1| = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^N} < \varepsilon$$

であることになるので、(1) が $\alpha = 1$ について成り立つ。故に公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

が、たしかに正しいことがわかった[*1]。

一方で、収束先が簡単にわからない問題もある。たとえば級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

を考えよう。後でこの講義ノート内で扱うコーシーの収束判定条件を用いることで、我々はこの級数が収束することを、それほど難しくなく示せる。しかし、これが正確にどこに収束するかは、簡単にはわからない。この級数の収束先を求める問題は**バーゼル問題**と呼ばれ、解答に１００年近くを要した難問であった[*2]。

さて、我々が議論したいのは次の級数である。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{6}$$

ただし、$n!$ は 1 から n までのすべての自然数をかけ算した値であり、n の**階乗**と呼ばれる。0! だけは定義できないので、便宜上 $0! = 1$ と定義される。簡単にわかるように $n \geq 2$ ならば

$$n! \geq 2^{n-1}$$

なので[*3]、これを用いることで、

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n!} \leq 2 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^{N-1}}$$

を得る。よって

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} < 3 \tag{7}$$

[*1] このように、一見して簡単に見える級数の計算でも、現代数学では「当たり前」とは見なさず、厳密に証明を行う。実際、アルキメデスの原理がなければこの証明は完成しない。だから、我々はデデキントの切断からこの授業を始めなければならなかったのである。

[*2] ちなみに、答えは $\frac{\pi^2}{6}$ になる。詳しく知りたければ「バーゼル問題」で検索するとよい。この結果は、円周率 π が無理数であることを証明するためにしばしば用いられる。

[*3] 厳密に証明したければ数学的帰納法を用いるとよい。

がわかる。故に s_n は上に有界な非減少数列であるため、3 より小さなどこかの数に収束する。しかしその収束先はどこであろうか？　数学者は長い議論の末、この収束先に**ネイピアの数**という名前をつけ、e という記号で表すことにした。この e という数字は、現代では 2.718 くらいの数であることがわかっているが、同時に無理数であることもわかっている。ネイピアの数 e は円周率 π と同様に非常に謎めいた数であるが、微分積分の授業ではとても重要な役割を果たす。

　なお、数学では以下の公式

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^x = e^r$$

が知られている。しかし、さしあたりこの講義ではこの公式は使用しない。これは、証明が難しい割に、この講義の範囲内だと恩恵が少ないためである。興味がある学生は高木貞治『解析概論』の第一章などを読むとよい。一応、経済学にも応用がある（連続複利という用語を調べるとよい)。

・部分列と閉区間のコンパクト性

　単調非減少列について、もう少し強めた条件が必要になることがある。数列 (a_n) が**増加的**であるとは、$n > m$ ならば $a_n > a_m$ であることである。ここで $k(n)$ という自然数から自然数への増加的な数列（あえて関数のように書いてある）を取ってきて、数列 (a_n) から

$$b_n = a_{k(n)}$$

として新たな数列 (b_n) を作ろう。このような数列を、(a_n) の**部分列** (subsequence) と呼ぶ。

　元の数列は収束しないが収束する部分列は存在する、ということはあり得る。たとえば、

$$a_n = (-1)^n$$

という数列を考えよう。これは奇数番で -1 を、偶数番で $+1$ を取る数列なので、明らかにどこにも収束しない。しかし $k(n) = 2n$ とし、$b_n = a_{k(n)}$ として部分列 (b_n) を取れば、これは $b_n \equiv 1$ を満たす数列なので、当然 1 に収束する。

　さて、実数の非空な部分集合 C を考えよう。数列 (a_n) は、$a_n \in C$ がすべての番号 n について成り立つとき、**集合 C 上の数列**と言う。このとき、この集合 C が**コンパクト** (compact) であるとは、C 上のどんな数列 (a_n) に対しても、C 内のどこかに収束するような部分列が存在することを言う。

一見して、コンパクト性はとても抽象的な性質に見えるかもしれない。ところが次の定理がある。これは実数の最も基本的性質と言ってもいいようなものであって、以後の議論で極めて重要な役割を果たす。

定理３（ボルツァーノ＝ワイヤストラスの定理）：$a < b$ のとき、閉区間 $[a, b]$ はコンパクトである[*4]。

証明：まず、(c_n) を $[a, b]$ 上の数列であるとしよう。このとき、数列 (a_n) と (b_n)、それから $k(n)$ を、以下のやり方で順次定義していく。

第一に、$a_0 = a,\ b_0 = b$ とする。$k(0) = 0$ としよう。

次に、$d_1 = \frac{a+b}{2}$ とする。d_1 は a_0 と b_0 の平均であるが、ここで区間 $[a, b]$ を $A_1 = [a, d_1]$ と $B_1 = [d_1, b]$ に分ける。もし $c_n \in A_1$ となる n が無限個存在したならば、$a_1 = a_0, b_1 = d_1$ とし、$k(1)$ は $n > k(0)$ を満たす中で、$c_n \in A_1$ を満たす最小の n とする。逆に、$c_n \in A_1$ となる n が有限個しかなければ、$c_n \in B_1$ となる n が無限個存在するはずである。このときは $a_1 = d_1, b_1 = b_0$ とし、$k(1)$ は $n > k(0)$ を満たす中で、$c_n \in B_1$ を満たす最小の n とする。

以降、$a_i, b_i, k(i)$ まで定まっていたとして、次の $a_{i+1}, b_{i+1}, k(i+1)$ を決めよう。まず $d_{i+1} = \frac{a_i+b_i}{2}$ とし、区間 $[a_i, b_i]$ を $A_{i+1} = [a_i, d_{i+1}]$ と $B_{i+1} = [d_{i+1}, b_i]$ に分ける。もし $c_n \in A_{i+1}$ となる n が無限個存在したならば、$a_{i+1} = a_i, b_{i+1} = d_{i+1}$ とし、$k(i+1)$ は $n > k(i)$ を満たす中で、$c_n \in A_{i+1}$ を満たす最小の n とする。逆に、$c_n \in A_{i+1}$ となる n が有限個しかなければ、$c_n \in B_{i+1}$ となる n が無限個存在するはずである。このときは $a_{i+1} = d_{i+1}, b_{i+1} = b_i$ とし、$k(i+1)$ は $n > k(i)$ を満たす中で、$c_n \in B_{i+1}$ を満たす最小の n とする。

以上のように構成した数列 $(a_n), (b_n), k(n)$ については、以下の条件がすべて成り立っている。

i. (a_n) は単調非減少数列で、(b_n) は単調非増加数列、$k(n)$ は増加的である。
ii. $a_n \leq c_{k(n)} \leq b_n$ が必ず成り立つ。
iii. $a \leq a_n < b_n \leq b$ であり、かつ $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ となる。

[*4] なお、閉区間 $[a, b]$ は $a \leq x \leq b$ となる x をすべて集めてできた集合である。集合論の記述だと、

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

と書かれる。

i. と iii. から、(a_n) は上に有界な単調非減少数列なので、収束する。同じく i. と iii. から、(b_n) は下に有界な単調非増加数列なので、やはり収束する。よって $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ となる $\alpha, \beta \in [a,b]$ が存在する。もし $\alpha \neq \beta$ だったとすれば、$\varepsilon = \frac{|\beta-\alpha|}{3}$ としたとき、$\varepsilon > 0$ である。よって十分大きな N を取れば、$n \geq N$ のときは必ず

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon,\ |b_n - \beta| < \varepsilon$$

となるはずである。一方でアルキメデスの原理から、$M > \frac{b-a}{\varepsilon}$ となる $M \geq N$ が存在するが、このとき

$$\varepsilon > \frac{b-a}{M} \geq \frac{b-a}{2^M}$$

となるので、三角不等式 $|a+b| \leq |a| + |b|$ から、

$$\begin{aligned} 3\varepsilon = |\beta - \alpha| &= |\beta - b_M + b_M - a_M + a_M - \alpha| \\ &\leq |\beta - b_M| + |b_M - a_M| + |a_M - \alpha| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \end{aligned}$$

となって、矛盾が生ずる。よって $\alpha = \beta$ である。ii. とはさみうちの原理から、このとき $\lim_{n\to\infty} c_{k(n)} = \alpha$ がわかり、よって、たしかに (c_n) は収束部分列を持つ。(c_n) は閉区間 $[a,b]$ 上を動く任意の数列だったのだから、これで $[a,b]$ がコンパクトであることが証明された。 ■

・コーシーの収束判定定理

以上の準備を元に、数列の収束判定で最も重要である、**コーシーの収束判定定理**の解説に移ろう。コーシーの収束判定定理とは、**コーシー列** (Cauchy sequence) と呼ばれる数列の条件に関係する問題である。数列 (a_n) がコーシー列であるとは、以下の論理式が成り立つことである。

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \text{ s.t. } n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{8}$$

前にも述べたように、必ずしも単調ではないような数列 (a_n) が収束するかどうかをテストするためには、たいていの場合は、収束先がわかっていないといけない。一方で、数列がコーシー列であるかどうかをテストするためには、収束先の情報は必要ない。実際、(8) には収束先の情報などはなにも入っていない。ところが、実は次の定理が成り立つ。

定理 4（実数の完備性）: 数列 (a_n) について、それがどこかの実数に収束することと、コーシー列であることは同値である。

証明：いままで何度もやってきたように、これも、証明はふたつに分解した方がよい。つまり、「収束する数列はコーシー列である」という主張と、「コーシー列はどこかに収束する」という主張の、両方を示せばよいのである。前者の方が簡単なので、そちらから証明しよう。

まず、(a_n) は α に収束しているとする。$\varepsilon > 0$ を取って固定しよう。(1) の主張を ε の代わりに $\varepsilon/2$ に適用すると、ある N が存在して、$n \geq N$ ならば、

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$$

が成り立つことになる。このとき、$n \geq N$ かつ $m \geq N$ であれば、三角不等式 $|a+b| \leq |a| + |b|$ から、

$$|a_n - a_m| = |a_n - \alpha + \alpha - a_m| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

となる。よって、(8) はたしかに成り立っていて、(a_n) はコーシー列である。

逆を示すためには、少し迂回する必要がある。まず、次を示そう。

補題：(a_n) がコーシー列であり、かつこれが収束する部分列 $(a_{k(n)})$ を持つとすれば、(a_n) はその部分列と同じ場所に収束する。

補題の証明：いま、(a_n) はコーシー列であり、$\lim_{n\to\infty} a_{k(n)} = \alpha$ であるとしよう。$\varepsilon > 0$ をひとつ取って固定する。(a_n) はコーシー列であるから、ε の代わりに $\varepsilon/2$ を使って主張 (8) を適用すると、ある N_0 が存在して、$n, m \geq N_0$ ならば

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2$$

が必ず成り立つ。一方、$(a_{k(n)})$ は α に収束しているので、やはり ε の代わりに $\varepsilon/2$ を使って主張 (1) を適用すると、ある N_1 が存在して、$n \geq N_1$ ならば

$$|a_{k(n)} - \alpha| < \varepsilon/2$$

が必ず成り立つ。ここで、N を、$N \geq N_1$ と $k(N) \geq N_0$ が両方とも成り立つように十分大きく取る。このとき、$n \geq k(N)$ であれば、三角不等式から

$$|a_n - \alpha| \leq |a_n - a_{k(N)}| + |a_{k(N)} - \alpha| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

となるので、(a_n) は α に対して (1) 式を満たし、たしかに収束していることがわかった。以上で補題の証明が完成した。■

いま、コーシー列 (a_n) に対してある数 $M>0$ が存在して、$a_n \in [-M,M]$ が常に成り立っていたとしよう。このとき、ボルツァーノ＝ワイヤストラスの定理から、(a_n) は収束する部分列を持ち、よって補題によって、収束する。したがって証明するべきは上のような $M>0$ の存在だけである。いま、$\varepsilon=1$ として (8) を適用すると、ある N が存在して、$n \ge N$ かつ $m \ge N$ ならば必ず

$$|a_n - a_m| < 1$$

である。特に $m=N$ として固定すれば、$n \ge N$ のときには必ず

$$|a_n - a_N| < 1$$

であること、よって三角不等式から

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \le |a_n - a_N| + |a_N| < |a_N| + 1$$

であることがわかる。そこで、

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$$

と定義すれば、すべての n に対して $|a_n| \le M$ であり、よって $a_n \in [-M,M]$ である。以上で証明が完成した。■

この定理を用いて、(a_n) がコーシー列であることを示すことでどこかに収束することを証明する手法を、**コーシーの収束判定テスト**と言う。

定理４の証明の最後の部分から、ただちに我々は次の結果を得る。

定理５：収束する数列は有界である[*5]。

また、次の結果は簡単に示せるが、後々まで使う大事な結果である。

定理６：数列 (a_n) が α に収束していれば、その任意の部分列 $(a_{k(n)})$ も α に収束する。

証明：$\varepsilon>0$ を任意に取ると、(a_n) は α に収束しているから、ある N が存在して、$n \ge N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ である。ところが $k(n) \ge n$ であるから、$n \ge N$ ならば $k(n) \ge N$ でもあり、よって $|a_{k(n)} - \alpha| < \varepsilon$ でもある。これは $(a_{k(n)})$ が α に収束していることを意味する。以上で証明が完成した。■

[*5] 有界性の定義は前回の講義ノートを参照。

最後に、少しだけ補足しておこう。「実数」においては、コーシー列は必ず収束する。しかし、「順序体」についてはそうではない。たとえば有理数についてみれば、π の小数展開を一桁ごとに増やしていった次の数列

$$a_0 = 3,\ a_1 = 3.1,\ a_2 = 3.14,\ a_3 = 3.141,\ a_4 = 3.1415, ...$$

は、どんな有理数にも収束しないが、コーシー列である。

一般に、どんなコーシー列も収束するような順序体を、「完備な」順序体と言う。では、実数以外に完備な順序体はあるのだろうか？　答えは、存在する。具体的には、完備ではあるがアルキメデスの原理を満たさないような順序体を、構築する方法が知られている。したがって、「完備であること」は、「デデキントの切断公理」とは同値ではない。

一方、任意の順序体において、ボルツァーノ＝ワイヤストラスの定理はデデキントの切断公理と同値である[*6]。この意味で、閉区間のコンパクト性はどうやら、実数にとっては本当に根本的な性質であるらしい。一方、完備性はそれと比べると少しだけ足りない性質であるようである。

・先週の課題の解説

まず (3) 式、つまり

$$a + 1 \neq a$$

を見てみよう。この式が間違っており、仮に

$$a + 1 = a$$

が成り立っていたとする。このとき、両辺に体の公理の 4) で存在が保証される $-a$ を足し算してみると、次のようになる。

$$a + 1 + (-a) = a + (-a) = 0.$$

[*6] 証明に興味のある学生は次のように証明を構築するとよい。まず、我々はデデキントの切断公理と同値な連続性の公理から前回の定理 3 を導出し、この定理 3 からボルツァーノ＝ワイヤストラスの定理を導出した。したがってデデキントの切断公理からボルツァーノ＝ワイヤストラスの定理は出てくる。逆を示すには、A, B が切断として、$a \in A, b \in B$ を取る。$a_0 = a, b_0 = b$ とし、a_{n-1}, b_{n-1} が定まっているとき、$d = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ が A に入っていれば $a_n = d, b_n = b_{n-1}$ と、逆に B に入っていれば $a_n = a_{n-1}, b_n = d$ とする。(a_n) と (b_n) は共に閉区間 $[a, b]$ 上の数列なので収束部分列を持つが、一方でそれほど難しくなくコーシー列であることが示せるので、上の補題から両者は収束する。その収束先が A に入っていれば A の最大値、B に入っていれば B の最小値であることを示すのは難しくない。

結合法則 1) と交換法則 2) を用いれば、左辺は

$$(a+1)+(-a)=(1+a)+(-a)=1+(a+(-a))=1+0=1$$

と計算できるので、この式は

$$0=1$$

を意味するが、体の公理の 10) に違反しているのであり得ない。よって体である限り、(3) は必ず正しい。

一方、(4) 式、つまり

$$1+1\neq 0$$

については、これが成り立たない体を簡単に作れる。具体的には、2 の剰余類体

$$\{0,1\}$$

を考えよう。0 は偶数を、1 は奇数を表しているので、この体の足し算とかけ算は

$$0+0=0,\ 0+1=1+0=1,\ 1+1=0,$$

$$0\times 0=0,\ 0\times 1=1\times 0=0,\ 1\times 1=1$$

と定義される。したがってこの体では $1+1=0$ であり、よって (4) は成り立たない。

このように、体の公理だけから必ず言える性質と、言えるとは限らない性質は、簡単には判別できないので注意しよう。

・今週の課題

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ についてもう一度考えてみよう。$a_n \geq 0$ が常に成り立つならば、

$$s_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$$

は非減少になるので、収束するか発散するかのどちらかが必ず成り立つ。このような級数は**正項級数**と呼ばれ、扱いが最も容易な級数として知られている。

一方、必ずしも $a_n \geq 0$ が成り立つとは限らない級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を考えよう。ここで、項 a_n を $|a_n|$ に取り替えた正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ を考えよう。元の級数の n 番目までの和の絶対値

$$|a_1+\ldots+a_n|$$

と、絶対値を取った後の級数の n 番目までの和

$$|a_1| + ... + |a_n|$$

を比べると、三角不等式 $|a+b| \leq |a| + |b|$ から、後者の方が絶対に大きくなる。この後者の級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

が収束するとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**絶対収束**すると言う。

さて、問題は絶対収束に関係することである。絶対収束とただの収束はどんな関係を持っているだろうか。たとえば、収束する級数は必ず絶対収束するだろうか？　あるいは、その逆はどうか？　少し考えてみて欲しい。