講義ノート：総合講座（第五回）

細矢祐誉

テーマ：距離空間における関数の連続性

・開集合

実数の部分集合 A から $\mathbb{R}$ への関数 f の連続性について、我々は二つの定義を行い、それらが同値であることを議論した。第一の定義は、どんな $x \in A$ に対しても、$A \setminus \{x\}$ 上の数列 (a_n) が x に収束しているならば、$f(a_n)$ も $f(x)$ に収束しているというものである。第二の定義は、以下の論理式で与えられる。

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall y \in A,\ |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon. \tag{1}$$

今回は、それと代替的になるもうひとつの概念について述べておこう。実数の部分集合 A について、そのさらに部分集合 U を取る。この U が**集合 A の中で開**であるとは、どんな $x \in U$ に対してもある数 $r > 0$ が存在して、$y \in A$ かつ $|y - x| < r$ ならば $y \in U$ が成り立つ、ということを言う。また、A の部分集合 V が**集合 A の中で閉**であるとは、$A \setminus V$ が A の中で開であることを言う[*1]。

特に、$A = \mathbb{R}$ であるときには、$\mathbb{R}$ の中で開である集合 U は**開集合** (open set)、閉である集合 V は**閉集合** (closed set) と呼ばれる。ここで、実数の**開球** (open ball) と呼ばれる集合 $B_r(x)$ を以下のように定めよう。

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R} | |y - x| < r\}.$$

すると、U が開集合である必要十分条件は、以下の論理式で定められる。

$$\forall x \in U,\ \exists r > 0 \text{ s.t. } B_r(x) \subset U. \tag{2}$$

もちろん、$U \subset A$ が集合 A の中で開である必要十分条件も、同様に以下の式で定められる。

$$\forall x \in U,\ \exists r > 0 \text{ s.t. } B_r(x) \cap A \subset U.$$

開集合、閉集合という言葉が自然であるということを確認するために、開区間 (a, b) が開集合であることを示しておこう。$a < b$ とし、$x \in (a, b)$ を取る。このとき、$r > 0$ を、$x - a$ と $b - x$ の小さい方として取る。$y \in B_r(x)$ とすると、もし $y \le x$ ならば

$$0 \le x - y < r \le x - a$$

[*1] 定義から、空集合 $\emptyset$ と A 自身は自動的に A の中で開かつ閉である。

なので、$y > a$ がわかり、よって $y \in (a, b)$ である。同様に、$y > x$ ならば、

$$0 < y - x < r \leq b - x$$

なので、$b > y$ がわかり、よって $y \in (a, b)$ である。以上によって $B_r(x) \subset (a, b)$ が示せたから、たしかに (a, b) は開集合であることがわかった。同様に閉区間 $[a, b]$ が閉集合であることも示せるが、それは学生諸君への演習問題としておこう。

次に、集合の**逆像** (inverse image) と呼ばれる概念を定義しておこう。いま、$f : A \to B$ とし、$U \subset B$ とする。このとき、f による U の逆像は

$$f^{-1}(U) = \{x \in A | f(x) \in U\}$$

と定義される。これを使って、以下の定理を示しておこう。

定理１：A は実数の部分集合とし、$f : A \to \mathbb{R}$ を考える。このとき、この f が連続であることと、任意の開集合 U に対して $f^{-1}(U)$ が A の中で開であることは同値である。

証明：(1) 式が成り立つことを仮定し、また U は開集合とする。$x \in f^{-1}(U)$ とする。U は開集合なので、ある $r > 0$ に対して、$|y - f(x)| < r$ であれば $y \in U$ でなければならない。この r を $\varepsilon > 0$ に当てはめて (1) 式を適用すると、ある $\delta > 0$ が存在して、$y \in A$ かつ $|y - x| < \delta$ ならば $|f(y) - f(x)| < r$ であることがわかる。このふたつをつなげると、$y \in A$ かつ $|y - x| < \delta$ ならば $y \in f^{-1}(U)$ であることになる。したがって $f^{-1}(U)$ は A の中で開であることがわかった。

逆に、任意の開集合 U に対して $f^{-1}(U)$ が A の中で開になることを仮定する。$x \in A$ と $\varepsilon > 0$ を任意に取って固定しよう。ここで、$U = B_\varepsilon(f(x))$ と定義する。U は $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ と書き直せるので、開区間であり、故に上で示したように開集合である。よってこの段落の最初の仮定から $f^{-1}(U)$ は A の中で開である。したがって、$r > 0$ が存在して、

$$B_r(x) \cap A \subset f^{-1}(U)$$

となる。$\delta = r$ とセットすると、$y \in A$ かつ $|y - x| < \delta$ ならば $y \in B_r(x) \cap A$ であり、よって $y \in f^{-1}(U)$ であることがわかる。したがって (1) 式が成り立っており、この f は連続である。以上で証明が完成した。 ■

以上は連続な関数、つまり「すべての点で連続」な関数の条件だったが、同様にして以下の命題も示せる。この証明は興味のある学生への練習問題として残しておこう。

命題１：A は実数の部分集合とし、$f:A\to\mathbb{R}$ を考える。このとき、この f が点 $x\in A$ で連続であることと、$f(x)$ を含む任意の開集合 U に対して、x を含む開集合 V で $V\subset f^{-1}(U)$ となるものが存在することは同値である。

一見意味が少ないように見えるかもしれないこれらの結果は、とある発想の転換によって、数学における極めて重要な意味を持つに至った。いまは実数の部分集合で議論していたから、開集合や閉集合は実数の性質に従って「定義」された。しかし、逆に言えば、定理１の後ろの主張「任意の開集合の逆像が開集合であること」は、「開集合」という概念さえ定義できていれば、**別に実数でなくとも議論できる**のである。こうして我々は、実数ではないはるかに抽象的なものの空間における連続性の議論の仕方を手に入れることになる。

・位相

いままではこの講義では、集合が出てきたらそれは実数の部分集合であることが大半だった。しかし、ここからは、空でない抽象的な集合 X を扱っていく。この X の部分集合に対して、「どれを開集合と呼ぶか」を定めるルールが決まっているとき、そのルールのことを**位相** (topology) と呼ぶ[*2]。

もちろん、どんなルールでも位相と呼んでよいわけではない。それを説明するために、少し用語を追加しよう。X を空でない集合としたとき、X 内の集合の**族** (family) とは、なんらかの集合 I の元 i に対して X の部分集合 A_i を返す関数のことである。ただし、関数であることはあまり重要視されず、普通は数列のように $(A_i)_{i\in I}$ と書かれる。I について特に表記の必要がない場合、省略されて単に (A_i) と書かれることも多い。I が有限集合であるときには、この族は**有限族**と呼ばれる。

族 (A_i) には、**合併** (union) と**共通部分** (intersection) が定義できる。(A_i) の合併とは、$x\in A_i$ となる i が存在するような x をすべて集めてできた集合で、これは

$$\cup_i A_i$$

と書かれる。同様に、(A_i) の共通部分とは、すべての i に対して $x\in A_i$ となるような x をすべて集めてできた集合で、これは

$$\cap_i A_i$$

[*2] マクロ経済学でたまに位相図という言葉が出てくるが、あれは phase の訳語である。これは運悪く、違う分野で同じ言葉が訳として割り当てられてしまったケースで、物理学では位相は phase の訳であることが多い。

と書かれる。なお、$\cup_{i\in I}A_i$ などと I を強調して書く場合もある。

さて、準備はできた。開集合を定めるルールが位相と呼ばれるためには、次の 3 つのルールを満たしていることが必要である。

(1) 空集合 $\emptyset$ と X は開集合である。
(2) 開集合の族 (A_i) の合併 $\cup_i A_i$ は開集合である。
(3) ふたつの開集合 A と B の共通部分 $A\cap B$ は開集合である。

ルールが位相と呼ばれる条件はこれだけである。したがって位相というものはものすごくたくさんある。そして、集合 X と Y にそれぞれ位相が定まっていれば、$f:X\to Y$ の連続性は簡単に定義できる。つまり、f が連続であるとは、Y の任意の開集合 U に対して逆像 $f^{-1}(U)$ が開であることだ、と定義するのである。我々が定理 1 を議論したのは、まさにこのような定義をするためであった。

しかし、位相の中には当然ながら、使いやすい位相と使いにくい位相がある。そして、初心者のうちに使いにくい位相を使ってもあまり成果は出ない。そこで以下では、位相の中でも比較的扱いやすい、距離から定まる位相の話をしよう。

・距離

ここからは、**距離** (metric) と言われるもので位相を定める、いわゆる**距離空間** (metric space) の話をする[*3]。

集合 X 上の距離とは、X のものを二つ放り込むと実数が帰ってくる関数 $\rho:X^2\to\mathbb{R}$ で、以下の三つの性質を満たすもののことである。

1. $\rho(x,y)\geq 0$ が必ず成り立ち、また $\rho(x,y)=0$ と $x=y$ は同値である。
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ が成り立つ。
3. $\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z)$ が成り立つ。

最後の 3. の性質は**三角不等式** (triangle inequality) と呼ばれるもので、「x から z に直接行くよりも、y に寄り道した方が遠くなる」という意味である。実数の絶対値を用いて定義された実数上の距離 $\rho(x,y)=|x-y|$ は、絶対値の三角不等式 $|x+y|\leq|x|+|y|$ を使うと、

$$\rho(x,z)=|x-z|=|x-y+y-z|\leq|x-y|+|y-z|=\rho(x,y)+\rho(y,z)$$

[*3] 物理学では metric は「計量」という語を当てられることが多い。このように、この分野での訳語はかなり錯綜していてわかりづらい。

という形で、3. を満たすことが簡単に示せる。しかし、それ以外の空間では、三角不等式はなかなか証明できないことが多い。

距離が定まった集合を**距離空間**と呼ぶ。距離空間は X と、その上の距離 ρ のペア (X,ρ) で表されるのが正式であるが、距離がわかりきっているときには省略されて、X 自体を距離空間と呼んでしまう場合が多い。

距離空間では、**開球**が定義される。x を中心とした半径 $r>0$ の開球とは、

$$B_r(x)=\{y\in X|\rho(x,y)<r\}$$

として定義できる。これを用いると、(2) 式を用いて、**開集合**がふたたび定義できる。つまり、集合 $U\subset X$ が開集合であるとは、任意の $x\in U$ に対してある $r>0$ が存在して、開球 $B_r(x)$ が U の部分集合になることを言う。

この開集合の定義が位相の条件を満たすことを確かめるのが次の定理である。

定理２：距離空間の開集合の定義は位相の条件を満たす。

証明：条件 (1) は当たり前なので、(2) と (3) のみを確かめよう。

(2) について。(A_i) が開集合の族で、$U=\cup_i A_i$ とする。$x\in U$ とすれば、$x\in A_i$ となる i が存在する。A_i は開集合なので、ある $r>0$ が存在して、$y\in B_r(x)$ ならば $y\in A_i$ である。このとき、

$$B_r(x)\subset A_i\subset U$$

となるため、U は確かに開集合である。よって (2) は正しい。

(3) について。A と B が開集合で、$U=A\cap B$ とする。$x\in U$ とする。このとき、A も B も開集合なので、ある $r'>0$ と $r''>0$ に対して $B_{r'}(x)\subset A$ かつ $B_{r''}(x)\subset B$ である。そこで r' と r'' の小さい方を r とすると、$B_r(x)\subset A\cap B=U$ となるため、やはり U は開集合である。よって (3) も正しい。以上で証明が完成した。 ■

なお、開球 $B_r(x)$ は常に開集合である。これは三角不等式で簡単に証明できる。実際、$y\in B_r(x)$ とし、$r'=r-\rho(x,y)$ とすれば、$z\in B_{r'}(y)$ ならば

$$\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)<\rho(x,y)+r'=r$$

となるので $z\in B_r(x)$ であり、よって $B_{r'}(y)\subset B_r(x)$ である。このように、開球という用語は開集合という用語と整合的である。

また、距離空間では数列と同様に、**点列**やその**収束**の概念を定義することができる[*4]。距離空間 X 上の点列 (a_n) とは、自然数 $\mathbb{N}$ から X への関数のことである。この点列 (a_n) が a^* に収束することは、

$$\lim_{n\to\infty}\rho(a_n,a^*)=0$$

が成り立つこととして定義される。簡単にわかることだが、これは以下の論理式

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N \text{ s.t. } n\ge N\Rightarrow\rho(a_n,a^*)<\varepsilon$$

と同値である。興味のある学生は確かめてみるとよい。また、実数のときと全く同じ証明から、点列の極限は一つしか存在できないことが証明できるが、これも学生への演習問題として残しておく。

実数では、数列について収束することとコーシー列であることが同値であったが、これは一般の距離空間では成り立たない。正確に言うと、収束する数列は必ずコーシー列であるが、コーシー列が収束するかどうかはわからない。コーシー列が必ず収束するような距離空間は**完備** (complete) であると言われている。

・閉集合、閉包、内核、境界

位相空間 X において、$X\setminus U$ が開集合であるような集合 U を**閉集合**と言う。この定義は実数の閉集合とまったく同じである。位相の条件 (1)(2)(3) から、ただちに下の事実がわかる。

(i) 空集合 $\emptyset$ と X は閉集合である。
(ii) 閉集合の族 (A_i) の共通部分 $\cap_i A_i$ は閉集合である。
(iii) ふたつの閉集合 A と B の合併 $A\cup B$ は閉集合である。

さて、位相空間 X の部分集合 A を考えよう。A は、少なくともひとつは、開集合を部分集合として持つ。具体的には、$\emptyset\subset A$ である。そこで、A に含まれる開集合すべてからなる族の合併を U とすると、これは位相の条件 (2) から開集合になる。これは A に含まれる開集合の中で最大のものであり、A の**内核** (interior) と呼ばれ、int.A などと書かれる。

同様に、A を含む閉集合としては、X が少なくとも該当する。そこで、A を含む閉集合すべてからなる族の共通部分を V とすると、これは上の条件 (ii) から閉集合になる。こ

[*4] 英語だと点列と数列は sequence の語で表されて区別しないが、日本語では区別するのが慣例になっている。

ちらは A を含む閉集合の中で最小のものであり、A の**閉包** (closure) と呼ばれ、$\mathrm{cl}.A$ などと書かれる。

いくつか例を挙げよう。たとえば、$A = [0,1) \cup (2,3] \cup \{4\}$ としよう。このとき、$\mathrm{int}.A$ は $(0,1) \cup (2,3)$ である。また、$\mathrm{cl}.A$ は $[0,1] \cup [2,3] \cup \{4\}$ である。これらは簡単に証明できるので、意欲ある学生は自分で証明を試みられたい。

さて、上の A について、$\mathrm{cl}.A$ に入っているが $\mathrm{int}.A$ に入っていない点を列挙してみると、これは $\{0,1,2,3,4\}$ となる。このような集合を A の**境界** (boundary) と言って、∂A と書く。正式に述べると、位相空間 X において、$\partial A = \mathrm{cl}.A \setminus \mathrm{int}.A$ である。

変な形をした集合であると、境界が異様な形になることもある。たとえば有理数 $\mathbb{Q}$ は実数 $\mathbb{R}$ の部分集合であるが、この内核は $\emptyset$、閉包は $\mathbb{R}$ であり、よって境界は $\mathbb{R}$ である。このように、しばしば境界という用語は我々の直観に反するので注意しよう。

当然ながら、A が開集合であることと $\mathrm{int}.A = A$ であることは同値であり、また A が閉集合であることと $\mathrm{cl}.A = A$ であることは同値である。$\mathrm{int}.A \subset A$ であることから、ただちに我々は次の結果を得る。

定理３：位相空間 X の部分集合 A が閉であることと、$\partial A \subset A$ は同値である。また、A が開であることと、$\partial A \cap A = \emptyset$ は同値である。

つまり、閉集合とは境界をすべて含む集合であり、開集合とは境界の点をひとつも含まない集合である。以前の講義ノートで集合の「端」という用語を使ったが、この端というのは境界上の点を指す用語であった。

ここまでは位相空間で話したが、距離空間だともっと簡単に閉集合の特徴を書くことができる。次の定理がそれに当たる。

定理４：距離空間 X の部分集合 C を考える。この C が閉であることと、C 上の任意の収束点列 (a_n) の収束先が C に含まれることは同値である。

証明：まず、次の補題を示す。

補題１：距離空間 X の部分集合 A を考え、(a_n) は A 上の点列で、x に収束しているとする。このとき、$x \in \mathrm{cl}.A$ である。

証明：背理法による。$x \notin \mathrm{cl}.A$ としよう。$\mathrm{cl}.A$ は閉集合であるから、$X \setminus \mathrm{cl}.A$ は開集合であり、よってある $r > 0$ が存在して、$B_r(x) \cap \mathrm{cl}.A = \emptyset$ である。一方、(a_n) は x に

収束しているため、ある N が存在して、$n \geq N$ ならば $\rho(a_n, x) < r$ となるが、これは $a_n \in B_r(x)$ を意味する。すると $a_n \notin \mathrm{cl}.A$ ということになるが、$a_n \in A$ だったので矛盾が生ずる。以上で証明が完成した。 ■

さて、定理４の証明に戻ろう。C が閉であるとし、(a_n) は C 上の収束点列であるとする。この収束先を x とすれば、補題１から $x \in \mathrm{cl}.C$ であるが、C は閉なので $C = \mathrm{cl}.C$ であり、よって $x \in C$ である。

逆に、C が閉でないとする。このとき、cl.C は C を含む閉集合なので、cl.C に含まれるが、C には含まれない点 x が存在する。このとき、$r > 0$ に対して、$B_r(x) \cap C = \emptyset$ であるとすれば、$X \setminus B_r(x)$ は C を含む閉集合であり、よって cl.C を含むことになる。これは $x \notin \mathrm{cl}.C$ を意味するが、当初の x の取り方に矛盾するため、あり得ない。故に、$B_r(x) \cap C$ は非空である。$r = \frac{1}{n}$ にこれを適用して、$B_{\frac{1}{n}} \cap C$ の要素 a_n を取れば、(a_n) は C 上の点列であり、さらに $\rho(a_n, x) < \frac{1}{n}$ なので、x に収束する。一方で $x \notin C$ である。よって、C が閉でないとすれば、C 上の点列で C の外の点に収束するものが存在することがわかった。この対偶を取ると、C 上の収束点列の収束先が常に C に入っていれば、C は閉集合であることがわかる。以上で証明が完成した。 ■

・相対位相

X が位相空間で、A がその非空な部分集合であるとしよう。このとき、A 上には自然な位相が存在する。B が A の部分集合であるとき、$B = A \cap U$ と書けるような X の開集合 U が存在するとき、この B を A **の開集合**と呼ぶことにしたい。このルールが位相の条件の (1) から (3) までを満たすことは簡単に確認できる。この形で定義される A 上の位相を、A における X の**相対位相** (relative topology) と呼ぶ。また、A の部分集合 B が X ではなく A の開集合であることを強調するために、**相対開集合** (relatively open set) という言い方をすることもある。

一見してわかりにくく見えるが、X が距離空間であるとぐっと話が単純になる。X 上の距離 ρ は X の要素二つに対して非負の実数を返す関数であるが、A が X の部分集合ならば、ρ はそのまま A 上の距離としても流用できる。そして、次の定理が成り立つ。

命題２：X は距離空間でその距離を ρ とし、A は X の非空部分集合とする。このとき、A の部分集合 B に対して以下の二命題は同値である。

- B は相対開集合である。

- A に距離 ρ を導入して距離空間と見なしたとき、B はその空間内での開集合である。

証明：まず、まぎらわしいのでひとつ記号を追加しておきたい。$x \in A$ としたとき、「x を中心とした半径 $r > 0$ の開球」が、いまの場合は二つある。つまり、X の中での開球と、A の中での開球である。この証明の中では前者を $B_r^X(x)$ と、後者を $B_r^A(x)$ と書こう。論理式で書くと、

$$B_r^X(x) = \{y \in X | \rho(x,y) < r\},\ B_r^A(x) = \{y \in A | \rho(x,y) < r\}$$

である。明らかに $B_r^A(x) = A \cap B_r^X(x)$ であることに注意。

さて、まず B が相対開集合であるとすると、$A \cap U = B$ となる X の開集合 U が存在する。ここで $a \in B$ を取ると、U は開集合だから、ある $r > 0$ に対して $B_r^X(a) \subset U$ となる。このとき、$B_r^A(a) \subset A \cap U = B$ なので、B は A を距離空間と見たときに開集合である。

逆に、B が距離空間 A の中で開集合だとしよう。$a \in B$ を取ると、B は A の中で開集合だから、ある $r > 0$ に対して $B_r^A(a) \subset B$ となる。そこで $U_a = B_r^X(a)$ と定義し、$U = \cup_{a \in B} B_r^X(a)$ と定義する。$(B_r^X(a))_{a \in B}$ は X 上の開集合の族であるため、位相の条件 (2) から U も X の開集合である。そして、$B_r^A(a) = A \cap B_r^X(a) \subset B$ であるから、$A \cap U \subset B$ でなければならない。逆に、$a \in B$ ならば $a \in B_r^A(a) \subset U$ なので、$B \subset A \cap U$ であり、よって $B = A \cap U$ である。以上で証明が完成した。 ■

ちなみに、**相対閉集合**も同様に定義でき、同じ議論が成り立つことを付け加えておきたい。これは学生諸君への課題として残す。また、X が実数体 $\mathbb{R}$ であったときには、この講義ノートの最初で述べた「A の中で開」という概念は、A の相対開集合という概念と一致する。これも確認は学生諸君に任せておこう。

A の相対開集合であることは、必ずしも X の開集合であることを意味しないことに注意する。たとえば、$X = \mathbb{R}$ とし、$A = [0,1]$ とする。$0 < r < 1$ のとき、0 を中心とした半径 r の開球は、本来ならば開区間 $(-r, r)$ である。しかし、A 自身を距離 $\rho(x,y) = |x - y|$ によって距離空間と見なすと、そこでの 0 を中心とした半径 r の開球は $[0, r)$ である。つまり、一見して開集合に見えない $[0, r)$ は A 上の相対開集合なのである。この相違に注意して、以降の議論を見ていきたい。

・関数の連続性

いま X と Y が距離空間であるとき、$f: X \to Y$ の点 x における**連続性**は「x に収束する任意の点列 (a_n) に対して、$b_n = f(a_n)$ で定義される点列 (b_n) が $f(x)$ に収束すること」として、実数のときと同様に定義できる。ρ_X を X の距離、ρ_Y を Y の距離とすると、実数のときと同様にして、f の連続性は以下の論理式と同値であることが示せる。

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \rho_X(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

すべての点で連続である関数は、単に**連続関数**と呼ばれる。

以下の定理は、証明が定理１とほとんどまったく同じであるため、省略する。

定理５：X と Y は距離空間で、$f: X \to Y$ を考える。このとき、f が連続であることは、任意の Y の開集合 U に対して $f^{-1}(U)$ が開集合になることと同値である。

連続性は、位相空間における二つの概念と密接に関連を持っている。まず、X と Y を位相空間とし、C は X の部分集合とする。$f: X \to Y$ を考え、f による C の**像** (image) を

$$f(C) = \{y \in Y | \exists x \in C \text{ s.t. } f(x) = y\}$$

と定義する。

さて、距離空間 X が**コンパクト** (compact) であるとは、X 上の任意の点列 (a_n) が、C 内のどこかに収束する部分列を持つことを言う。また、距離空間 X の部分集合 C が**コンパクト集合**であるとは、C 自身を距離空間と見なしたときにコンパクトであることを言う。定理４から、コンパクト集合は必ず閉集合でなければならないことがただちにわかる。もちろん閉集合が必ずコンパクトであるわけではない。たとえば、$\mathbb{R}$ 自身は閉集合だがコンパクトではない。

一方、距離空間 X が**連結** (connected) であるとは、X の非空な二つの開集合 U と V で、$U \cap V = \emptyset$ かつ $U \cup V = X$ となるようなものが、ひとつも存在しないことを言う。もちろんこの場合も、部分集合に考えを適用できる。距離空間 X の部分集合 C が**連結集合**であるとは、C 自身を距離空間と見なしたときに連結であることを言う。この連結性の定義は若干抽象的だが、後でもう少し詳しく解説する。我々がここで出したいのは以下の結果である。

定理６：X と Y は距離空間で、$f: X \to Y$ は連続であるとする。このとき、以下が成り立つ。

1) C がコンパクトならば、$f(C)$ もコンパクトである。

2) C が連結ならば、$f(C)$ も連結である。

証明：1) について。まず、(b_n) は $f(C)$ 上の点列とする。$f(C)$ の定義から、$b_n = f(a_n)$ となる点 $a_n \in C$ が存在する。C はコンパクトなので、点列 (a_n) は C 内の点 x に収束する部分列 $(a_{k(n)})$ を持つ。f は連続なので、$b_{k(n)} = f(a_{k(n)})$ は $f(x)$ に収束するが、$f(x) \in f(C)$ なので、$f(C)$ はたしかにコンパクトである。

2) について。対偶法による。$f(C)$ が連結でないとすれば、$f(C)$ の非空な相対開集合 A, B で、$A \cap B = \emptyset$ かつ $A \cup B = f(C)$ となるものが存在する。相対開集合の定義から、$A = f(C) \cap U,\ B = f(C) \cap V$ となる Y の開集合 U, V が存在する。ここで $U' = f^{-1}(U)$ とし、$V' = f^{-1}(V)$ とすると、f は連続であるから、U', V' は両方とも開集合である。$A' = U' \cap C,\ B' = V' \cap C$ と定義すると、A', B' は共に C の相対開集合である。A, B は非空だから、A', B' も非空である。$x \in A' \cap B'$ とすれば $f(x) \in A \cap B$ となるが、$A \cap B = \emptyset$ だったからこれはありえず、よって $A' \cap B' = \emptyset$ である。最後に、$A' \cup B' = C$ は明らかなので、C は連結ではない。対偶を取ると、C が連結であれば $f(C)$ も連結である。以上で証明が完成した。 ■

連結性について、距離を一切使っていないことを注記しておく。実際、この定理は 2) については位相空間でも成り立つ。一方で、1) については、我々はコンパクト性の定義に点列を使っているため、少し問題が生じる。実は位相空間で定義できるコンパクト性の定義もあるのだが、この講義では使わないので省略することにした。

さて、コンパクト性はすでに、前回の定理４で最大化問題の解の存在を保証するために使った。証明を一切変えず、ただ絶対値を距離に置き換えるだけで、以下の定理が得られる。

定理７：X は距離空間とし、$f : X \to \mathbb{R}$ は連続であるとし、$A \subset X$ はコンパクトであるとする。このとき、問題

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ \text{subject to.} & x \in A \end{array}$$

は少なくとも一つは解を持つ。

一方で、連結性のもっとも重要な応用のひとつは中間値の定理である。これを示すために、まずは次の定理を示しておきたい。これは、「連結」という言葉を正当化する根拠のひとつとなっている。

定理８：C は $\mathbb{R}$ の非空な部分集合とする。このとき、以下のふたつは同値である。

1. C は連結である。
2. $a < c < b$ かつ $a, b \in C$ ならば $c \in C$ である。

証明：まず、2. が成り立たないとする。このとき、$a < c < b$ で、$a, b \in C$ かつ $c \notin C$ となるような a, b, c が存在する。そこで、$A = \{x \in C | x < c\}$ とし、$B = \{x \in C | x > c\}$ とすると、$a \in A$ かつ $b \in B$ なので、A, B は非空な C の相対開集合で、$A \cap B = \emptyset$ かつ $A \cup B = C$ となるため、1. も成り立たない。対偶を取れば、1. が成り立てば 2. も成り立つことがわかる。

次に、2. が成り立っているが 1. が成り立たないとする。このとき、A, B というふたつの C の非空な相対開集合があって、$A \cap B = \emptyset$ かつ $A \cup B = C$ である。A, B は非空なので $a \in A$ と $b \in B$ を取る。A と B はどちらでも構わないので、一般性を失うことなく $a < b$ であるとして以下の議論を行う。2. が成り立っているので、閉区間 $[a, b]$ は C に含まれる。次に、B は相対開集合なので、ある $r' > 0$ が存在して、$b - r' < x \le b$ ならば $x \in B$ であり、よって $x \notin A$ である。一方、A も相対開集合なので、ある $r'' > 0$ が存在して、$a \le x < a + r''$ ならば $x \in A$ である。そこで、$c^* = \sup(A \cap [a, b])$ と定義しよう。上で示したことから $a < a + r'' \le c^* \le b - r' < b$ であることがわかる。2. から $c^* \in C$ なので、$c^* \in A$ か $c^* \in B$ のどちらかが成り立つ。もし $c^* \in A$ ならば、A が開集合であることからある $r > 0$ が存在して $c^* \le x < c^* + r$ ならば $x \in A$ ということになるが、これは c^* が上限であることに矛盾する。よって $c^* \in B$ ということになるが、やはり B が開集合であることからある $r > 0$ が存在して $c^* - r < x \le c^*$ ならば $x \notin A$ であることになり、c^* が $A \cap [a, b]$ の上界として最小であったことに矛盾する。したがってこれはあり得ず、2. が成り立てば 1. も成り立つ。以上で証明が完成した。 ■

この簡単な応用として以下の定理が示せる。

定理９（中間値の定理）：$a < b$ とし、$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続とする。もし γ が $f(a)$ と $f(b)$ の間にあれば、$f(c) = \gamma$ となる $c \in [a, b]$ が存在する。

証明：$f(a) < f(b)$ の場合と $f(a) \ge f(b)$ の場合があるが、どちらでも似たようなものなので $f(a) < f(b)$ を仮定する。このとき、定理８から $[a, b]$ は連結なので $f([a, b])$ も連結であり、よって $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$ である。定理の仮定は $\gamma \in [f(a), f(b)]$ なので、$\gamma \in f([a, b])$ であることになり、よって $\gamma = f(c)$ となる $c \in [a, b]$ が存在する。以上で証

明が完成した。 ■

・先週の課題の解説

まず、(b_n) が必ずしも収束しないとし、$c_n = cb_n$ とする。$c > 0$ であるとすれば、

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = c \limsup_{n\to\infty} b_n,\ \liminf_{n\to\infty} c_n = c \liminf_{n\to\infty} b_n$$

であることは簡単に示せる。しかし、実は $c < 0$ であるとこれは成り立たない。実際、$c < 0$ であるとすれば、$d_n = \inf_{m\ge n} b_m$ かつ $e_n = \sup_{m\ge n} c_m$ と定義すると、簡単にわかるように $e_n = cd_n$ になる。したがって、

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} e_n = c \lim_{n\to\infty} d_n = c \liminf_{n\to\infty} b_n$$

であることがわかる。同様に、

$$\liminf_{n\to\infty} c_n = c \limsup_{n\to\infty} b_n$$

になる。よって定理 1 の 1. の関係は $c > 0$ のときにしか成り立たないことがわかった。

一方、(a_n) が α に収束しているが (b_n) は収束しているとは限らないとしよう。そして、$c_n = a_n + b_n$ とする。まず、

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

を示そう。実際、$\varepsilon > 0$ を任意に取ると、ある N が存在して、$n \ge N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ であり、よって

$$\alpha - \varepsilon \le a_n \le \alpha + \varepsilon$$

である。故に、

$$\alpha - \varepsilon \le \sup_{m\ge n} a_m \le \alpha + \varepsilon$$

であるが、これは $\limsup_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を意味する。これで示したかったことが示せた。

さて、ふたたび $\varepsilon > 0$ を任意に取ると、ある N が存在して、$n \ge N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ であるから、$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$ である。そこで、

$$\alpha - \varepsilon + \sup_{m\ge n} b_m = \sup_{m\ge n}(\alpha - \varepsilon + b_m) \le \sup_{m\ge n} c_m \le \sup_{m\ge n}(\alpha + \varepsilon + b_m) = \alpha + \varepsilon + \sup_{m\ge n} b_m$$

となる。ここから。、

$$\alpha - \varepsilon + \limsup_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} c_n \le \alpha + \varepsilon + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

がわかるが、$\varepsilon > 0$ は任意だったため、

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \alpha + \limsup_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

がわかった。つまり、(a_n) が収束しているという仮定の下では、定理 1 の 2. は成り立つのである。もちろん、その仮定がない場合には 2. は成り立たない。上極限、下極限を使う際にはこのあたりに注意しなければならない。

・今週の課題

位相空間について、開集合の条件のうち (2) は無限個の開集合の族についての条件、(3) は二つの開集合についての条件だった。(3) も無限個ではなぜいけないのだろうか。考えてみよう。