講義ノート：総合講座（第六回）

細矢祐誉

テーマ：ノルムと内積、ユークリッド空間

・距離空間、補足

前回の復習から始めよう。集合 X 上の距離とは、X のものを二つ放り込むと実数が帰ってくる関数 $\rho: X^2 \to \mathbb{R}$ で、以下の三つの性質を満たすもののことである。

1. $\rho(x,y) \geq 0$ が必ず成り立ち、また $\rho(x,y)=0$ と $x=y$ は同値である。
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ が成り立つ。
3. $\rho(x,z) \leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$ が成り立つ。

距離が定まった集合を**距離空間**と呼ぶ。距離空間では開球

$$B_r(x)=\{y \in X|\rho(x,y)<r\}$$

を用いて、**開集合**が定義できる。集合 $U \subset X$ が開集合であるとは、任意の $x \in U$ に対してある $r>0$ が存在して、開球 $B_r(x)$ が U の部分集合になることである。

距離空間では連続性やコンパクト性、最大値の存在などを議論できることがわかった。しかし、単に距離空間と言われても、まだまだ抽象的で、イメージを持ちづらいといった感想を抱く学生も多いだろう。実際、数学で扱われる距離の中には、確率に対するプロホロフの距離など、どうしてもわかりにくいものが存在する。しかし、たいていの場合には、それらよりもずっとわかりやすい形で距離が定義されているのが普通である。ここではその例として、**ノルム** (norm) と言われるものによって決まる距離の話をしよう。

・ノルム

まず、線形空間について述べなければならない。X が**線形空間** (linear space) であるとは、足し算とスカラー乗法という二つの演算があって、以下の条件を満たすことである[*1]。

I) 加法の結合法則。$(x+y)+z=x+(y+z)$ である。

[*1] 足し算はふたつの X の元からひとつの X の元を導く規則、スカラー乗法はひとつの実数とひとつの X の元からひとつの X の元を導く規則である。ここではスカラー乗法で実数を使ったが、複素数などを使う場合も多く、一般に体であればなんでもよい。スカラー乗法で実数を用いることを強調するときには、**実線形空間**という名で呼ばれる。

II) 加法の交換法則。$x+y=y+x$ である。

III) 加法零元の存在。あるベクトル x^* について $x+x^*=x$ が常に成り立つ。x^* は 0 と書かれるのが普通であり、**ゼロベクトル**と呼ばれる。

IV) 加法逆元の存在。どんな x に対しても、$x+y^*=0$ となる y^* が存在する。y^* は普通 $-x$ と書かれる。

V) スカラー乗法の右分配則。$a(x+y)=ax+ay$ が常に成り立つ。

VI) スカラー乗法の左分配則。$(a+b)x=ax+bx$ が常に成り立つ。

VII) スカラー乗法の結合性。$a(bx)=(ab)x$ が常に成り立つ。

VIII) $1x=x$ が常に成り立つ。

典型的な例としては、実数を n 個並べたベクトル $x=(x_1,...,x_n)$ を集めてできた空間に、足し算

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)$$

とスカラー倍

$$ax=(ax_1,ax_2,...,ax_n)$$

を定義してできた空間は上の8つの規則をすべて満たす。この空間は $\mathbb{R}^n$ と書かれ、n 次元の**ユークリッド空間**と呼ばれる。

さて、X を線形空間としよう。X 上のノルムとは X 上で定義された実数値関数 $\|\cdot\|$ で、以下の条件を満たすものである[*2]。

1) $\|x\|\ge 0$ が常に成り立ち、また $\|x\|=0$ と $x=0$ は同値である。
2) $\|ax\|=|a|\|x\|$ が常に成り立つ。
3) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ が常に成り立つ。

この 3) もやはり三角不等式と呼ばれている。

ノルムが与えられているとき、

$$\rho(x,y)=\|x-y\|$$

と定義すれば、これは距離の条件をすべて満たすことが簡単に確認できる。よってノルムの与えられた空間は距離空間である。

[*2] 正式には関数なのだから $\|\cdot\|(x)$ などと書くべきなのだろうが、たいていの場合、ノルムについては $\|x\|$ と書かれる。

前回述べたように、距離空間においてコーシー列が必ず収束するときには、その空間は**完備** (complete) であると言われる。完備距離空間になるようなノルム空間を**バナッハ空間** (Banach space) と呼ぶ。

例をいくつか見せよう。

例１：実数をベクトルと見なせば、これは I) から VIII) までの条件をすべて満たすので、線形空間と見なせる。この場合、絶対値 $|x|$ はノルムの条件をすべて満たしているので、実数 $\mathbb{R}$ はノルム空間である。

例２：n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上で、

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$$

と定義すると、これはノルムである。三角不等式以外は当たり前だと思うので三角不等式だけ示すと、

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= |x_1+y_1| + |x_2+y_2| + ... + |x_n+y_n| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + ... + |x_n| + |y_n| \\ &= |x_1| + ... + |x_n| + |y_1| + ... + |y_n| \\ &= \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

となって、たしかに成り立っていることがわかる。

例３：有界な数列 $x = (x_n)$ の空間に、

$$\|x\| = \sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$$

と定義すると、驚くべきことにこれはノルムになる。この空間は ℓ^∞ と呼ばれる。

例４：$[0,1]$ から $\mathbb{R}$ への連続関数をすべて集めてできた集合上で

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$$

と定義すると、なんとこれもノルムになる。興味がある学生は三角不等式だけでも調べてみるとよい。

このように、様々な空間がノルムによって距離を与えられる。しかし、このような空間は必ずしも使いやすくないことが知られている。たとえば例２でも、この距離だと三角形

の角度についての性質や中線定理などが証明できないことが知られていて、多くの問題を引き起こす。そこで、より自然な定義が必要になる。

・内積

ふたたび X は線形空間とする。X のベクトル x, y に対して実数を与える規則 $x \cdot y$ が与えられているとき、この規則が**内積** (inner product) であるとは、以下の４つの条件が成り立つことを言う。

i) $x \cdot x \geq 0$ が常に成り立ち、また $x \cdot x = 0$ と $x = 0$ は同値である。
ii) $x \cdot y = y \cdot x$ が成り立つ。
iii) $(ax) \cdot y = a(x \cdot y)$ が成り立つ。
iv) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ が成り立つ。

この内積が与えられているとき、

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} \tag{1}$$

と定義しよう。すると、これはノルムになる。この定理は証明が簡単ではないし、重要なので、定理の形で述べておこう。

定理１：内積が与えられているとき、(1) 式で定義された関数 $\|\cdot\|$ はノルムの条件をすべて満たす。

証明：まず、1) は i) からただちに成り立つことがわかる。2) については、まず iii) から

$$(ax) \cdot y = a(x \cdot y)$$

であること、及び ii) から $x \cdot (ax) = (ax) \cdot x$ であることを用いれば、

$$\begin{aligned}\|ax\|^2 &= (ax) \cdot (ax) = a(x \cdot (ax)) \\ &= a((ax) \cdot x) = a^2(x \cdot x) = a^2\|x\|^2\end{aligned}$$

となって、たしかに成り立っていることが示せる。よって問題なのは 3) の三角不等式だけである。ここで次の補題を用意する。

補題１（コーシー＝シュワルツの不等式）：内積について以下の評価が必ず成り立つ。

$$|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\| \tag{2}$$

補題の証明：最初に、線形空間では $0=0x$ が成り立つことを示そう。これは、

$$0=0x+(-0x)=(0+0)x+(-0x)=0x+0x+(-0x)=0x$$

となるので、正しい。よって、もし $x=0$ であれば、

$$x\cdot y=(0x)\cdot y=0(x\cdot y)=0$$

となるため、(2) 式の両辺は 0 になり、よって自動的にこれは成り立つ。故に、我々は $x\neq 0$ であるときだけを考えればよいので、以後ではそれを仮定する。

さて、関数

$$f(t)=\|tx+y\|^2$$

を考えよう。この関数は定義から非負である。一方、ii) と iii) と iv) を使うことで、

$$f(t)=\|x\|^2t^2+2(x\cdot y)t+\|y\|^2$$

と分解することができる。よって、$f(t)$ は 0 を下回らない二次関数なので、判別式は 0 以下である。故に、

$$4(x\cdot y)^2\le 4\|x\|^2\|y\|^2$$

である。両辺を 4 で割り算して正の平方根を取ることで、

$$|x\cdot y|\le\|x\|\|y\|$$

を得るが、これは (2) 式である。以上で証明が完成した。 ■

これを用いて三角不等式を証明しよう。証明するべきは

$$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$$

であるが、両辺非負なので、二乗して

$$\|x+y\|^2\le(\|x\|+\|y\|)^2$$

が示せればよい。実際に計算すると、補題 1 を用いて、

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y)\cdot(x+y)\\&=\|x\|^2+2(x\cdot y)+\|y\|^2\\&\le\|x\|^2+2|x\cdot y|+\|y\|^2\\&\le\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2\\&=(\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

となって、たしかに正しいことがわかる。以上で証明が完成した。 ■

　一般に、内積で距離が定められた空間が完備であるならば、そのような空間を**ヒルベルト空間** (Hilbert space) と呼ぶ。ヒルベルト空間は非常に多くのよい性質を持っており、数学で多用される。以下にいくつかの例を挙げよう。

例５：ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において、

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

とすると、これは内積の条件をすべて満たす。この内積から作ったノルムは

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

である。ユークリッド空間でノルムを扱うときは、特に断りがない場合にはこのノルムが使用される。特に、三平方の定理や中線定理などの有名な定理はこのノルムでは成り立つが、例２のようなノルムでは成り立たない。

例６：二乗級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$$

が収束するような数列 $x = (x_n)$ の空間を考え、

$$x \cdot y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

と定義する。この演算は内積の公理をすべて満たすことが知られていて、この数列の空間はヒルベルト空間になる。この空間はよく ℓ^2 と書かれる。

例７：$[0, 1]$ から $\mathbb{R}$ への連続関数の空間に

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

と定義すると、この演算は内積の公理をすべて満たすことが簡単に証明できる。したがってこの空間は距離空間として扱える。ただし、この空間は完備ではない。

・ユークリッド空間のコンパクト性

ようやく準備が整った。コンパクト性についてはすでに距離空間の部分集合では定義した。前回講義ノートの定理７があるため、ある集合がコンパクトであるかどうかというのを判定できる規則は、数学では非常に重要視される。幸いにも、ユークリッド空間ではコンパクト性はとても簡単に特徴付けすることができる。次の定理がそれで、我々にとって極めて重要な意味を持つ。

まず、用語を定義しよう。$\mathbb{R}^n$ の部分集合 C が**有界** (bounded) であるとは、ある数 $M > 0$ が存在して、すべての $x \in C$ に対して $\|x\| < M$ が成り立つことである。開球 $B_r(x)$ を用いて別の表現をすると、

$$C \subset B_M(0)$$

となる数 $M > 0$ があるとき、C は有界であると言われる。

では、定理の主張を述べよう。

定理２：ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 C について、それがコンパクトであることと、有界な閉集合であることは同値である。

証明：まず、C がコンパクトであるとする。すでに、任意のコンパクト集合は閉集合であることを前回示してあるので、C は閉集合である。次に、もし C が有界でないとすれば、任意の自然数 k に対して、$\|x_k\| \ge k$ となる点 $x_k \in C$ が存在する。(x_k) は C 上の点列であり[*3]、C はコンパクトなので、収束部分列 $(x_{\ell(k)})$ が存在する。この収束先を x^* とすれば、アルキメデスの原理から、$N > \|x^*\| + 1$ となる自然数 N が存在する。このとき、$k \ge N$ とすれば、

$$\|x_{\ell(k)}\| \ge \ell(k) \ge \ell(N) \ge N > \|x^*\| + 1$$

である。一方、三角不等式から

$$\|x_{\ell(k)}\| = \|x^* + x_{\ell(k)} - x^*\| \le \|x^*\| + \|x_{\ell(k)} - x^*\|$$

なので、これは $\|x_{\ell(k)} - x^*\| \ge 1$ が常に成り立つことを意味するが、$(x_{\ell(k)})$ は x^* に収束することが仮定されていたので、矛盾が生ずる。よってこれはあり得ず、C は有界でなければならない。これで、「コンパクト集合は有界かつ閉である」ことの証明は終わった。

逆に、C は有界な閉集合であるとし、(x_k) を C 上の点列であるとしよう。このとき、有界性から、ある $M > 0$ に対して $\|x_k\| \le M$ が常に成り立つ。$x_k = (x_{1,k}, ..., x_{n,k})$ と

[*3] 本当ならば点列は (x_n) と書きたいのだが、いまは n がユークリッド空間の次元を表す数として使われているので、ここでは別の文字 k を用いる。

すると、どの座標 i に対しても

$$|x_{i,k}| \le \|x_k\| \le M$$

であるから、$(x_{i,k})$ は $[-M,M]$ 上の数列である。ボルツァーノ＝ワイヤストラスの定理から、この区間 $[-M,M]$ はコンパクトである。したがって、まず $i=1$ に対して収束部分列 $(x_{1,\ell_1(k)})$ が存在する。収束先を x_1^* と名付けておこう。今度は $(x_{2,\ell_1(k)})$ という数列を考えると、これは $[-M,M]$ というコンパクト集合上の数列だから、やはり収束部分列 $(x_{2,\ell_2(k)})$ が存在する。収束先を x_2^* と名付けておこう。このとき、$(x_{1,\ell_2(k)})$ は $(x_{1,\ell_1(k)})$ の部分列だから、やはり x_1^* に収束する。以下、この作業を $i=3,4,...$ と繰り返せば、どの i に対しても $(x_{i,\ell_n(k)})$ が x_i^* に収束するような部分列 $(x_{\ell_n(k)})$ が構築できる。ここで $\varepsilon>0$ を任意に取ろう。すると、ある番号 N_i が存在して、$k \ge N_i$ であれば $|x_{i,\ell_n(k)}-x_i^*| < \varepsilon/\sqrt{n}$ となる。そこで、N を N_i の中で最大の数とすれば、$k \ge N$ のときには、$x^*=(x_1^*,...,x_n^*)$ に対して

$$\begin{aligned}\|x_{\ell_n(k)}-x^*\| &= \sqrt{(x_{1,\ell_n(k)}-x_1^*)^2+...+(x_{n,\ell_n(k)}-x_n^*)^2} \\ &< \sqrt{\varepsilon^2/n+...+\varepsilon^2/n}=\varepsilon\end{aligned}$$

となる。よって、点列 (x_k) は x^* への収束部分列 $(x_{\ell_n(k)})$ を持っていることがわかった。ところが $(x_{\ell_n(k)})$ は C 上の点列で、C は閉集合であるから、前回講義ノートの定理４から $x^* \in C$ である。故に、C 上の任意の点列が C 内のどこかへの収束部分列を持つことがわかったので、C はコンパクトである。以上で証明が完成した。 ■

なお、この定理の帰結として、$M>0$ がなんであろうと $\{x \in \mathbb{R}^n | x_i \in [-M,M]\}$ はコンパクトであることがわかる。コーシー列は有界であることから、実数のときに示したのと同様にして我々は次の結果を容易に得られる。証明は学生への演習問題として残しておこう。

定理３：ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は完備である。

・効用最大化問題とその解

ミクロ経済学における消費者の理論で、次の最大化問題がよく出てくる。

$$\begin{array}{ll}\max & u(x) \\ \text{subject to.} & x \ge 0, \\ & p\cdot x \le m\end{array} \tag{3}$$

この問題 (3) は**効用最大化問題**と呼ばれる。$p=(p_1,...,p_n)$ は価格システムを表すベクトルで、$p_i>0$ は第 i 財の価格、また $m>0$ は予算である。最後の条件

$$p\cdot x\le m$$

は

$$p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n\le m$$

と書かれ、第 i 財をそれぞれ x_i 個買うために必要な費用が予算を超えないという意味である。この制約は**予算制約**と呼ばれる。一方、u は $x=(x_1,...,x_n)$ という消費計画に対してその計画の望ましさを返す関数で、**効用関数**と呼ばれる。

多くのミクロ経済学の授業ではこの最大化問題に解があることを当然として扱うが、ここでは u の連続性を仮定して、それを厳密に示そう。

定理４：効用関数 u が連続ならば、問題 (3) には少なくともひとつ解が存在する。

証明：集合

$$\Delta(p,m)=\{x\in\mathbb{R}^n|x\ge 0,\ p\cdot x\le m\}$$

を考えると、(3) は

$$\begin{array}{ll}\max & u(x)\\ \text{subject to.} & x\in\Delta(p,m)\end{array}$$

と書き直せる。よって、前回の定理７から、$\Delta(p,m)$ がコンパクトであることを示せば証明は完成する。定理３から、そのためには $\Delta(p,m)$ が有界な閉集合であることを示せればよい。

まず、有界性について。$x\in\Delta(p,m)$ ならば、

$$0\le p_ix_i\le p\cdot x\le m$$

であるから、

$$0\le x_i\le\frac{m}{p_i}$$

でなければならない。よって、$\frac{m}{p_i}$ の中で最大のものを M とすれば、$x\in\Delta(p,m)$ である限り

$$\|x\|\le\sqrt{n}M$$

となるので $\Delta(p,m)$ は有界である。

次に、閉集合であることについて。$x \notin \Delta(p,m)$ としよう。もし $x_i < 0$ となる i があれば、$r = |x_i|$ と置くと、$y \in B_r(x)$ ならば

$$|y_i - x_i| \le \|y - x\| < r = |x_i|$$

であり、よって $y_i < 0$ であるから、$y \notin \Delta(p,m)$ である。一方、すべての i について $x_i \ge 0$ ならば、$p \cdot x > m$ である。このときは、$\frac{p \cdot x - m}{np_i}$ の i についての最小値を r とすれば、$y \in B_r(x)$ であるとき、

$$|y_i - x_i| \le \|y - x\| < r \le \frac{p \cdot x - m}{np_i}$$

なので、

$$p_i y_i > p_i x_i - \frac{p \cdot x - m}{n}$$

となって、これを i について足し合わせることで、

$$p \cdot y > p \cdot x - p \cdot x + m = m$$

となって、$y \notin \Delta(p,m)$ がわかる。よって、$\mathbb{R}^n \setminus \Delta(p,m)$ はたしかに開集合なので、$\Delta(p,m)$ は閉集合である。以上で証明が完成した。■

この問題の解がただひとつであるとき、それを需要の値と呼んで、$f(p,m)$ と書く。(p,m) に対して $f(p,m)$ を対応させるこの関数 f は需要関数と呼ばれる。需要関数がある程度以上いい性質を持っていないと経済を満足に分析できないのだが、そのためにはさらなる分析が必要になる。しかし、それは次回以降の課題としよう。

・先週の課題の解説

簡単な例として、$A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ を考える。この A_n はすべて開集合である。ところが、$\cap_n A_n = \{0\}$ であり、これは開集合ではない。このように、無限個の開集合の共通部分は普通、開集合にならないことがわかっているために、位相の条件では共通部分については２個で議論しているのである。

・今週の課題

定理２はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ についてのコンパクト性の証明だった。もっと一般の、ユークリッド空間でない空間でも同じことは言えるだろうか？　少し考えてみよう。