講義ノート：総合講座（第七回）

細矢祐誉

テーマ：連続性と多項式

・問題意識

　たとえば、$f(x)=x^2$ という関数を持ってこよう。この関数は連続であろうか？

　答えは連続である。たとえば、$x\in\mathbb{R}$ と $\varepsilon>0$ に対して、$\delta=\min\{\varepsilon/|2x+1|,1\}$ とすれば、$|y-x|<\delta$ であれば

$$|f(y)-f(x)|=|y^2-x^2|=|y+x||y-x|<|2x+1|\delta\le\varepsilon$$

となって、点 x における連続性の条件

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ s.t. } |y-x|<\delta\Rightarrow|f(y)-f(x)|<\varepsilon$$

を満たしてくれる。x は任意だったから、この関数はすべての点で連続である。

　しかし、このような作業をいくつもの関数についていちいち確認するのは非常に面倒である。最低限、経済学でも多用する以下の関数については、その連続性をあらかじめ確認しておきたい。

- 多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$
- べき乗関数 $f(x)=x^a$
- 指数関数 $f(x)=a^x$
- 対数関数 $f(x)=\log_a x$
- 三角関数 $f(x)=\sin x,\ f(x)=\cos x,\ f(x)=\tan x$
- 逆三角関数 $f(x)=\arcsin x,\ f(x)=\arctan x$

　今回から数回はこれらの基本的関数についての連続性を証明していくのだが、その前にそもそも、これらの関数の定義自体がかなり難しいことを理解しなければならない。多項式については、学生諸君は十分知っていると思う。たとえば x^3 と書かれて「意味がわからない」という学生はいないだろう。だが、$x^{\sqrt{2}}$ はどうだろうか？　$2^{-\pi}$ などと書かれたとき、学生諸君はこの記号が意味する数を説明できるだろうか？

　もちろん、丁寧に議論すれば上のような記号を定義し、意味を説明することはできる。しかし、その上で x^a の連続性や微分可能性を示すというのは、案外難しいのである。これはべき乗関数の時点でもうかなり難しいのだが、三角関数になるとさらなる問題が発生

する。高校数学では $\sin x$ や $\cos x$ は、弧度法を用いて、原点を中心とした半径 1 の円周上を $(1,0)$ から出発して反時計回りに動く弧の長さが x になったときの位置が $(\cos x, \sin x)$ である、として定義される。ということは、弧の長さというのを定義しないと三角関数は定義できないことになるが、この長さを定義するために上の曲線を定義しなければならず、そのために弧の長さが必要になる、といった循環論法が生ずる。実は三角関数の定義法はそれ自体が数学的な一大テーマであり、どうやっても簡単には定義できないことがわかっている。

今回から何回かに分けて、我々は上の関数をすべて定義し、連続性を証明する。しかしそれは簡単な道のりではない。本講義では特に、整級数論を用いて統一的に指数関数や三角関数を議論する道を取るが、これ以外の方法もある。しかし、講師が知る限り、このやり方が上のような問題を解消するための最短距離なのである。

・連続性の証明法（１）：微分可能性

最も簡単に連続性を判定するやり方は、微分可能であることを証明することである。微分可能性の定義は第四回の講義ノートを参照せよ。

定理１：U は $\mathbb{R}$ の開集合とし、$f : U \to \mathbb{R}$ が点 $x \in U$ で微分可能であるとすれば、f は点 x で連続である。

証明：f が x で微分可能なのであるから、任意の x に収束し、$a_n \neq x$ を満たす数列 (a_n) に対して、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(x)}{a_n - x} = f'(x)$$

となる。これを変形すると、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(x) - f'(x)(a_n - x)}{a_n - x} = 0$$

であり、よって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f(a_n) - f(x) - f'(x)(a_n - x)|}{|a_n - x|} = 0$$

である。一方で、三角不等式から

$$\begin{aligned}|f(a_n) - f(x)| &\le |f(a_n) - f(x) - f'(x)(a_n - x)| + |f'(x)||a_n - x| \\ &= |a_n - x| \left[\frac{|f(a_n) - f(x) - f'(x)(a_n - x)|}{|a_n - x|} + |f'(x)| \right]\end{aligned}$$

である。右辺は 0 に収束するので、はさみうちの原理から左辺も 0 に収束しなければならない。よって f は x で連続である。以上で証明が完成した。■

さて、これを用いて、いくつかの関数の連続性を証明していこう。まず最初は、$f(x) \equiv a$ という定数関数の連続性について。これは、

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a-a}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

なので、$f'(x) \equiv 0$ がわかる。よって定理 1 から、定数関数は連続であることがわかる。

次に、$f(x) = x$ という関数の連続性について。これは、

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

なので、$f'(x) \equiv 1$ がわかる。よってやはり定理 1 から、$f(x) = x$ は連続である。

この二つを使っていろいろな関数の連続性を証明したいのだが、その前に少し寄り道をして、多変数関数の連続性のために定理 1 を強化しよう。U は $\mathbb{R}^n$ の開集合で、$x \in U$ とする。このとき、$f : U \to \mathbb{R}$ が x で**全微分可能**であるとは、あるベクトル a に対して次の式

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - a \cdot h|}{\|h\|} = 0$$

が成り立つことを言う。このベクトル a は全微分の値と呼ばれ、$Df(x)$ と書かれる。

定理 2：U は $\mathbb{R}^n$ の開集合とし、$f : U \to \mathbb{R}$ は点 $x \in U$ で全微分可能であるとすれば、f は点 x で連続である。

証明：f が x で全微分可能なので、x に収束し、$a_k \neq x$ を満たす任意の点列 (a_k) に対して

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|f(a_k) - f(x) - Df(x) \cdot (a_k - x)|}{\|a_k - x\|} = 0$$

を満たす。このとき、

$$\begin{aligned}
|f(a_k) - f(x)| &= |f(a_k) - f(x) - Df(x) \cdot (a_k - x) + Df(x) \cdot (a_k - x)| \\
&\leq |f(a_k) - f(x) - Df(x) \cdot (a_k - x)| + |Df(x) \cdot (a_k - x)| \\
&\leq |f(a_k) - f(x) - Df(x) \cdot (a_k - x)| + \|Df(x)\| \|a_k - x\| \\
&= \left[\frac{|f(a_k) - f(x) - Df(x) \cdot (a_k - x)|}{\|a_k - x\|} + \|Df(x)\| \right] \|a_k - x\|
\end{aligned}$$

となる。ただし一番目の不等号は三角不等式、二番目の不等号はコーシー＝シュワルツの不等式を用いた[*1]。右辺は 0 に収束するので、はさみうちの原理によって $|f(a_k) - f(x)|$ も 0 に収束する。以上で証明が完成した。 ■

問題は、全微分可能であるか否かを簡単に判定できる方法が、いまのところ見当たらないことである。全微分はどうやって見つけたらいいのかを考えるために、少し別の微分の概念について考えてみよう。U が $\mathbb{R}^n$ の開集合で、$x \in U$ であり、また $f : U \to \mathbb{R}$ が与えられているとする。このとき、一変数関数の微分を真似てできた次の極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{h}$$

が存在するとき、これを f の x における第 i 座標に関する**偏微分**の値と呼んで、$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ と書くことにする。いま、f は x において全微分可能であり、$Df(x) = (c_1, ..., c_n)$ としよう。このとき、(a_k) が 0 に収束する任意の数列とし、$x_k = (x_1, ..., x_i + a_k, ..., x_n)$ と定義すると、$\|x_k - x\| = |a_k|$ なので、(x_k) は x に収束する。したがって

$$0 = \lim_{k \to \infty} \frac{|f(x_k) - f(x) - (x_k - x) \cdot c|}{\|x_k - x\|} = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{f(x_k) - f(x)}{a_k} - c_i \right|$$

となっているから、

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f(x_k) - f(x)}{a_k} = c_i$$

であることがわかる。よって、

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

であることがわかるので、全微分 $Df(x)$ は偏微分を並べたベクトルである。これをヒントにして、まずは基礎的ないくつかの関数について定理 2 を適用してみよう。

まず、$f(x, y) = x + y$ を考える。全微分可能ならば、$Df(x)$ の第 i 座標は偏微分の値になることがわかっている。したがってまずは偏微分を計算してみよう。簡単にわかるように、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h + y - x - y}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + y + h - x - y}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

[*1] コーシー＝シュワルツの不等式は、第五回の講義ノートの補題 1 を参照。

となる。よって、$Df(x,y)$ の候補は $(1,1)$ というベクトルである。計算してみると、

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h,k)\to 0}\frac{|f(x+h,y+k)-f(x,y)-(1,1)\cdot(h,k)|}{\|(h,k)\|}\\
=&\lim_{(h,k)\to 0}\frac{|x+h+y+k-x-y-h-k|}{\|(h,k)\|}\\
=&\lim_{(h,k)\to 0}0=0
\end{aligned}$$

となって、たしかに $Df(x,y)=(1,1)$ であることがわかった。よってこの f は任意の点で全微分可能であり、したがって連続である。

まったく同じ操作で、$f(x,y)=x-y$ が連続であることも証明できる。これは学生諸君への演習として残す。

次に $f(x,y)=xy$ について考えよう。まず、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)y-xy}{h}=\lim_{h\to 0}y=y,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x(y+h)-xy}{h}=\lim_{h\to 0}x=x
\end{aligned}$$

となるので、$Df(x,y)$ の候補は (y,x) というベクトルである。計算してみると、

$$\begin{aligned}
0\le&\lim_{(h,k)\to 0}\frac{|f(x+h,y+k)-f(x,y)-(y,x)\cdot(h,k)|}{\|(h,k)\|}\\
=&\lim_{(h,k)\to 0}\frac{|(x+h)(y+k)-xy-yh-xk|}{\|(h,k)\|}\\
=&\lim_{(h,k)\to 0}\frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
\le&\lim_{(h,k)\to 0}\frac{h^2+k^2}{2\sqrt{h^2+k^2}}\\
=&\lim_{(h,k)\to 0}\frac{\sqrt{h^2+k^2}}{2}=0
\end{aligned}$$

となる（途中の不等式は相加相乗平均公式による）。よって、こちらもはさみうちの原理から、たしかに $Df(x,y)=(y,x)$ であり、全微分可能であることがわかったので、定理２からこの f は連続である。

・基本的な微分の公式

ここでは、微分の公式をいくつか証明しておこう。まず、四則演算と定数倍について求めておく。

命題１：U は $\mathbb{R}$ の開集合とし、$f:U\to\mathbb{R}$ と $g:U\to\mathbb{R}$ はある点 $x\in U$ で微分可能であるとする。このとき、以下が成り立つ。

1) $a\in\mathbb{R}$ に対して $h(y)=af(y)$ ならば h は点 x で微分可能で、$h'(x)=af'(x)$ である。
2) $h(y)=f(y)\pm g(y)$ ならば h は点 x で微分可能で、$h'(x)=f'(x)\pm g'(x)$ である（複合同順）。
3) $h(y)=f(y)g(y)$ ならば h は点 x で微分可能で、$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ である（ライプニッツの公式）。
4) $g(x)\neq 0$ であるとき、$h(y)=\frac{f(y)}{g(y)}$ ならば h は点 x で微分可能で、$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ である。

証明：まず 1) については、

$$h'(x)=\lim_{k\to 0}\frac{h(x+k)-h(x)}{k}=a\lim_{k\to 0}\frac{f(x+k)-f(x)}{k}=af'(x)$$

となって、正しい（ここで第四回講義ノートの定理１の 1. を用いた）。

2) については、$+$ と $-$ でほぼ同じ証明なので $+$ のみ扱う。このとき、

$$\begin{aligned}h'(x)=&\lim_{k\to 0}\frac{h(x+k)-h(x)}{k}\\=&\lim_{k\to 0}\frac{f(x+k)+g(x+k)-f(x)-g(x)}{k}\\=&\lim_{k\to 0}\frac{f(x+k)-f(x)}{k}+\lim_{k\to 0}\frac{g(x+k)-g(x)}{k}=f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

となるので、正しい（ここで第四回講義ノートの定理１の 2. を用いた）。

3) については、

$$\begin{aligned}h'(x)=&\lim_{k\to 0}\frac{h(x+k)-h(x)}{k}\\=&\lim_{k\to 0}\frac{f(x+k)g(x+k)-f(x)g(x)}{k}\\=&\lim_{k\to 0}\frac{f(x+k)g(x+k)-f(x)g(x+k)+f(x)g(x+k)-f(x)g(x)}{k}\\=&\lim_{k\to 0}\frac{f(x+k)-f(x)}{k}g(x+k)+\lim_{k\to 0}f(x)\frac{g(x+k)-g(x)}{k}\\=&f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\end{aligned}$$

となるので、正しい（ここで第四回講義ノートの定理１の 4. を用いた）。

4) については、まず g は点 x で微分可能なので定理１から点 x で連続であり、よって $|k|$ が十分小さければ $g(x+k)\neq 0$ であり、$h(x+k)$ が定義できることに注意する。よって、

$$\begin{aligned}
h'(x) =& \lim_{k\to 0}\frac{h(x+k)-h(x)}{k}\\
=& \lim_{k\to 0}\frac{\frac{f(x+k)}{g(x+k)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{k}\\
=& \lim_{k\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+k)}\frac{f(x+k)g(x)-f(x)g(x+k)}{k}\\
=& \lim_{k\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+k)}\frac{f(x+k)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+k)}{k}\\
=& \lim_{k\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+k)}\frac{f(x+k)-f(x)}{k}g(x)-\lim_{k\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+k)}f(x)\frac{g(x+k)-g(x)}{k}\\
=& \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}$$

となるので、正しい（ここで第四回講義ノートの定理１の 5. を用いた)。以上で証明が完成した。 ■

・合成微分の公式

上で証明した公式群に加えて、次の合成微分の公式を使うことで、我々は様々な微分を計算することができるようになる。ここではそれの証明をしよう*2。

定理３：U は $\mathbb{R}^n$ の開集合、$f:U\to\mathbb{R}$ は $y\in U$ において全微分可能とする。また、V は $\mathbb{R}$ の開集合、$g:V\to\mathbb{R}^n$ は x において微分可能で、$g(x)=y$ とする。このとき、$\ell(z)=f(g(z))$ と定義すると h は x において微分可能で、

$$\ell'(z)=Df(y)\cdot g'(x)$$

である。

この定理の最後の結論は略式に、

$$(f(g(x)))'=Df(g(x))\cdot g'(x) \tag{1}$$

*2 この公式は英語で chain rule と呼ばれ、よって古い教科書だと微分の**連鎖率**もしくは**鎖法則**などと呼ばれることがある。

と書かれる。もちろん g の値域は $\mathbb{R}^n$ なので、実際には $g(z) = (g_1(z), ..., g_n(z))$ とベクトルの形で与えられている。よって $g'(x) = (g_1'(x), ..., g_n'(x))$ であり、上の $Df(g(x)) \cdot g'(x)$ というのはベクトルの内積である。この点、誤解しないように注意しよう。

また、$n = 1$ である場合には、全微分は普通の微分になる。したがって上の定理 3 の結論は

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

という、非常に簡単な形になる。これもよく使われるので覚えておこう。

証明：まず、次の補題から示す。

補題１：V は $\mathbb{R}$ の開集合で、$f : V \to \mathbb{R}$ とする。このとき、次の二つは同値である。

1. f は x で微分可能で、$f'(x) = a$ である。
2. ある関数 $\varepsilon(h)$ が存在して、$\varepsilon(0) = 0$ で、$\varepsilon(h)$ は $h = 0$ の点で連続であり、さらに等式
$$f(x + h) = f(x) + ah + \varepsilon(h)h \tag{2}$$
を常に満たす。

補題１の証明：まず、2. を仮定すると、(2) から

$$f(x + h) - f(x) = (a + \varepsilon(h))h$$

となるので、

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (a + \varepsilon(h)) = a$$

であるため、1. が成り立つ。

逆に、1. を仮定すると、

$$\varepsilon(h) = \begin{cases} 0 & \text{if } h = 0, \\ \frac{f(x+h) - f(x) - ah}{h} & \text{if } h \neq 0, \end{cases}$$

と定義すれば 2. が成り立つ。以上で補題 1 の証明が完成した。 ■

これを使って、$\ell(z) = f(g(z))$ の微分を計算していこう。まず、$a = Df(y) \cdot g'(x)$ とする。証明の目標は、補題 1 の $\varepsilon(h)$ に当たるものが作れるかどうかである。最初に、

$k \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\varepsilon_f(k) = \begin{cases} 0 & \text{if } k = 0, \\ \frac{f(y+k)-f(y)-Df(y)\cdot k}{\|k\|} & \text{if } k \neq 0, \end{cases}$$

とし、また

$$\varepsilon_g(h) = \begin{cases} 0 & \text{if } h = 0, \\ \frac{g(x+h)-g(x)-g'(x)h}{h} & \text{if } h \neq 0, \end{cases}$$

と定義する。f と g の微分可能性の仮定から、ε_f は $k = 0$ の点で連続であること、また ε_g も $h = 0$ の点で連続であることに注意する。

　このとき、

$$k = g(x+h) - g(x)$$

とすると、

$$\begin{aligned} \ell(x+h) - \ell(x) &= f(g(x+h)) - f(g(x)) \\ &= f(y+k) - f(y) \\ &= Df(y)\cdot k + \varepsilon_f(k)\|k\| \end{aligned}$$

と書ける。一方、

$$k = g(x+h) - g(x) = g'(x)h + \varepsilon_g(h)h$$

なので、これを上に代入すると、

$$\begin{aligned} \ell(x+h) - \ell(x) &= Df(y)\cdot(g'(x)h + \varepsilon_g(h)h) + \varepsilon_f(k)\|k\| \\ &= Df(y)\cdot g'(x)h + Df(y)\cdot\varepsilon_g(h)h + \varepsilon_f(k)\|k\| \\ &= ah + [Df(y)\cdot\varepsilon_g(h)h + \varepsilon_f(k)\|k\|] \end{aligned}$$

である。そこで、

$$\delta(h) = \begin{cases} 0 & \text{if } h = 0, \\ \frac{\|k\|}{h} & \text{if } h \neq 0 \end{cases}$$

とすれば、

$$\ell(x+h) - \ell(x) = ah + [Df(y)\cdot\varepsilon_g(h) + \varepsilon_f(k)\delta(h)]h$$

と書ける。よって、

$$\varepsilon(h) = Df(y)\cdot\varepsilon_g(h) + \varepsilon_f(k)\delta(h)$$

と定義したときに、$\varepsilon(0) = 0$ かつ $\varepsilon(h)$ が $h = 0$ で連続であれば、補題 1 から、$\ell'(x) = a$ となって証明が完成する。

$\varepsilon_g(0)=0$ かつ $\delta(0)=0$ なので、$\varepsilon(0)=0$ は当然である。

次に、

$$k = g'(x)h + \varepsilon_g(h)h$$

なので、$h\to 0$ のとき $k\to 0$ である。よって、$h\to 0$ のとき $\varepsilon_f(k)$ は 0 に収束する。そして一方、$h\neq 0$ ならば

$$|\delta(h)| = \|g'(x)+\varepsilon_g(h)\|$$

であるから、$\delta(h)$ は 0 の近くで有界である。よって、第四回講義ノートの定理 1 の 4. の証明と同じ議論から、

$$\lim_{h\to 0}\varepsilon_f(k)\delta(h) = 0$$

が示せる。これは

$$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0 = \varepsilon(0)$$

を意味するため、$\varepsilon(h)$ はたしかに $h=0$ の点で連続である。以上で証明が完成した。 ■

これを用いると、命題 1 の 3) の別解が得られる。実際、$\ell(z,w)=zw$ とすると先に示したように $D\ell(z,w)=(w,z)$ で、一方

$$f(x)g(x) = \ell(f(x),g(x))$$

と書けるので、公式 (1) から、

$$(f(x)g(x))' = D\ell(f(x),g(x))\cdot(f'(x),g'(x)) = g(x)f'(x)+f(x)g'(x)$$

となって、主張が正しいことがわかる。

しかし、命題 1 の 3) はより簡単に証明できる。実を言うと、後で**複素微分**という概念が出てきたとき、命題 1 は全部そのまま複素微分に同じ証明で適用できる。そのため、今回はあえて初等的な証明をしたのである。

最後に注意を述べておきたい。よく高校数学などでは、公式 $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ の証明として

$$g(x+h)-g(x) = k$$

と定義し、$h\to 0$ ならば $k\to 0$ となることから、

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x)+k)-f(g(x))}{k}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(g(x))g'(x)$$

という形で導き出している。この証明は、しかし、正しくない。なぜなら、$h\neq 0$ でも $k=0$ になる可能性があるため、$\frac{f(g(x)+k)-f(g(x))}{k}$ が定義できないからである。定理 3 の証明がものすごく難しくなったのは、基本的にこの問題のためである。

・多項式の微分

さて、微分の公式があらかた揃ったので、さしあたりいくつかの簡単な関数の微分を計算しておこう。まずは次の定理を示す。

命題２：$f(x)=x^n$ とすると、$f'(x)=nx^{n-1}$ である。

証明：数学的帰納法による。$n=1$ のときは $f(x)=x$ なので、すでに示した通り $f'(x)=1$ である[*3]。$n=k$ のときに主張が正しいとして、$f(x)=x^{k+1}$ のときを考えよう。$g(x)=x^k$ とし、$h(x)=x$ とすれば、帰納法の仮定から $g'(x)=kx^{k-1}$ であり、また上で示したように $h'(x)=1$ である。$f(x)=g(x)h(x)$ なので、命題１の 3) から

$$f'(x)=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)=kx^{k-1}\times x+x^k\times 1=(k+1)x^k$$

となって、$n=k+1$ のときにも主張が正しいことがわかる。以上で証明が完成した。■

この命題を使って、多項式の微分可能性を示そう。すでに述べたように多項式とは、

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x_1+a_0 \tag{3}$$

の形で書ける関数である。たとえば、

$$f(x)=x+1,$$
$$f(x)=-x^2+3x+2,$$
$$f(x)=10x^4+2x^2-3x+2$$

などはすべて多項式である。通常、$a_n\neq 0$ が仮定され、その場合 n をこの多項式の**次数**と呼ぶ。

定理４：多項式はすべて微分可能であり、(3) 式の $f(x)$ の微分は

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+...+2a_2x+a_1$$

で与えられる。

証明：命題１と命題２を使えば簡単に示せる。■

---

*3 後々解説するが、$x^0=1$ と定義される。

もちろん、定理１からすべての多項式は連続であることがわかる。こうして、我々は最も簡単な関数のクラスについて、その連続性と微分可能性を導出することができた。もう少し難しい関数については、次回以降の課題としよう。

・先週の課題の解説

前に紹介した、二乗級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$$

が収束する数列 (x_n) の空間 ℓ^2 を考えよう。$x = (x_n)$ と $y = (y_n)$ が ℓ^2 に属していれば、相加相乗平均公式から

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (x_n^2 + y_n^2) < +\infty$$

なので、級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$$

は絶対収束する。そこでこの値を $x \cdot y$ と書けば、これは内積の条件をすべて満たすことが簡単に確認できる。そこで、$x^k = (x_n^k)$ という数列を、

$$x_n^k = \begin{cases} 1 & \text{if } n = k, \\ 0 & \text{if } n \neq k, \end{cases}$$

と定義しよう。すぐにわかるとおり、

$$\|x^k\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n^k)^2 = 1$$

であるから、(x^k) というのは $A = \{x \in \ell^2 | \|x\| \leq 1\}$ という有界な閉集合上の点列である。そして、簡単にわかるように、$\ell \neq k$ ならば

$$\|x^\ell - x^k\| = \sqrt{2}$$

なので、この点列のどんな部分列も絶対にコーシー列にならない。収束する点列はコーシー列なので、この点列 (x^k) はどこかに収束する部分列を絶対に持たない。よって、上の集合 A は有界な閉集合だが、コンパクトではないのである。

実を言うとリースという数学者によって、ノルム空間において上の集合 A がコンパクトであるための必要十分条件は、それが**有限次元**であることだということが知られてい

る。有限次元のノルム空間はある意味でユークリッド空間とほぼ同じ性質を持つことが知られているため、実は前回の定理２は、実質的にはユークリッド空間でしか成り立たないのである。

・今週の課題

今回は偏微分と全微分の関係を考えてみよう。全微分できれば、偏微分はできる。では逆に、偏微分できれば全微分もできるのだろうか？