講義ノート：総合講座（第八回）

細矢祐誉

テーマ：平均値の定理、逆関数定理、連続微分可能性、テイラー展開

・平均値の定理

平均値の定理は、微分積分学の最も重要な定理のひとつであり、極めて多くの応用を持つ。ここではまず、平均値の定理を厳密に証明し、その帰結について述べよう。

まず、次の定理から証明しなければならない。

定理１（ロルの定理）：$a < b$ とし、$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は $[a, b]$ 内で連続、(a, b) 内で微分可能であるとし、さらに $f(a) = f(b)$ とする。このとき、$f'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ が存在する。

証明：まず、次の問題

$$\begin{array}{cc} \max & f(x) \\ \text{subject to.} & a \le x \le b \end{array}$$

を考える。$[a, b]$ はコンパクトなので上の問題には解が必ず存在する。もし $a < c < b$ を満たす解 c があれば、講義ノート第四回の定理５から、$f'(c) = 0$ である。したがって、上の問題の解が $x = a$ 及び $x = b$ しかない場合だけを考えればよい。その場合、$a < x < b$ ならば $f(x) < f(a) = f(b)$ なので、問題

$$\begin{array}{cc} \max & -f(x) \\ \text{subject to.} & a \le x \le b \end{array}$$

の解 c は必ず $a < c < b$ を満たす。ふたたび $[a, b]$ はコンパクトで $-f(x)$ は連続なので解は必ず存在し、講義ノート第四回の定理５から、$f'(c) = 0$ でなければならない。以上で証明が完成した。 ■

定理２（コーシーの平均値の定理）：$a < b$ とし、$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ と $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ は $[a, b]$ 内で連続、(a, b) 内で微分可能であるとする。さらに、$g'(x) \neq 0$ がすべての $x \in (a, b)$ について成り立つとする。このとき、

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす数 $c \in (a,b)$ が存在する。

証明：まず、$g(a) = g(b)$ でないことに注意する：実際、もしそうであればロルの定理から $g'(x) = 0$ となる $x \in (a,b)$ が存在するが、仮定と矛盾する。ここで、

$$h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a))$$

は $h(a) = h(b) = 0$ を満たすため、ロルの定理を適用すると、$h'(c) = 0$ となる $c \in (a,b)$ が存在する。すると

$$0 = h'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))g'(c)$$

であるから、後はこれを $(g(b) - g(a))g'(c)$ で割り算すれば結論を得る。 ■

定理３（平均値の定理）：$a < b$ とし、$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は $[a,b]$ 内で連続、(a,b) 内で微分可能であるとする。このとき、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

を満たす数 $c \in (a,b)$ が存在する。

証明：コーシーの平均値の定理の $g(x)$ を $g(x) = x$ と設定すればよい。 ■

以上で、平均値の定理の証明が完成した。なお、平均値の定理において、$b = a + h$ と書き、$c = a + \theta h$ と書くと、平均値の定理の結論は以下のように書き換えられる。

$$\exists \theta \in (0,1) \text{ s.t. } f(a+h) = f(a) + f'(a + \theta h)h.$$

これは $h > 0$ のときだけ成り立つように見えるが、b と a の立場を入れ替えて同じ議論をすると、$h < 0$ でも成り立つことが示せる。

すでに合成微分の公式の証明で示したように、f が a で微分可能であれば、

$$\varepsilon(h) = \begin{cases} 0 & \text{if } h = 0, \\ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) & \text{if } h \neq 0, \end{cases}$$

と定義することで、

$$f(a+h) = f(a) + [f'(a) + \varepsilon(h)]h$$

と書けることがわかっている。上の平均値の定理の帰結を代入すると、

$$f'(a + \theta h) = f'(a) + \varepsilon(h)$$

となる。よって、我々は $\varepsilon(h)$ のもうひとつの評価法を得たことになる。つまり、

$$\varepsilon(h) = f'(a+\theta h) - f'(a)$$

である。

なお、$\varepsilon(0)=0$ であり、かつ $\varepsilon(h)$ は $h=0$ で連続であるが、これは関数 $f'(x)$ が a で連続であることは必ずしも意味しない。実際、θ は h が変わると変動するので、もしかすると θ のおかげで $\varepsilon(h)$ の連続性が保たれているかもしれないのである。

次の結果は難しい極限の算出に有効であるが、その証明はコーシーの平均値の定理からすぐに出てくるため、ついでに示してしまおう。

定理４（ロピタルの定理）：f と g は a の近くで定義された連続関数で、$f(a)=g(a)=0$ であるとする。また、f も g も a の近くで微分可能であるとする。さらに、十分 a に近い x では $g'(x)\neq 0$ とする。ここでもし $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\alpha$ であれば、$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ である。

証明：$\varepsilon>0$ を任意に取ると、ある $\delta>0$ が存在して、$0<|x-a|<\delta$ ならば

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-\alpha\right|<\varepsilon$$

である。ここで、$0<|x-a|<\delta$ であるとすると、コーシーの平均値の定理から、x と a の間のある y に対して

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\alpha\right| &= \left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-\alpha\right| \\ &= \left|\frac{f'(y)}{g'(y)}-\alpha\right|<\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ。よって $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ である。以上で証明が完成した。■

計算例：ここでは、後の講義ノートで証明する公式

$$(e^x)'=e^x$$

を既知として議論する。極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1}$$

を計算してみよう。$f(x)=x^2$ とし、$g(x)=e^x-1$ とすれば、定理４の前提条件を満たす。そして、

$$f'(x)=2x,\ g'(x)=e^x$$

なので、

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^x}=\frac{0}{1}=0$$

として、極限が簡単に計算できる。

・逆関数定理

さて、ここで少し、後々に必要になる用語を定義しておこう。関数 $f:U\to\mathbb{R}$ が与えられているとき、$f(g(x))=x$ が常に成り立つ関数 g を、f の**逆関数** (inverse function) と呼んで、f^{-1} で表す。たとえば、$f(x)=2x$ であれば $f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$ であるし、$f(x)=x^2$ ならば $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ である。この逆関数の微分に関しては、逆関数定理と言われる有名な定理があるのだが、その証明はかなり難しい。今回は、平均値の定理を用いた証明法を使う。

証明の前に、ひとつ用語を追加しておこう。関数 f が与えられているとき、$f(x)=x$ が成り立つ点を f の**不動点** (fixed point) と呼ぶ。次の定理は、不動点の存在について最も基本的な結果である、バナッハが証明した縮小写像の不動点定理である。

定理５（縮小写像の不動点定理）：X は完備距離空間とし、その距離を $\rho(x,y)$ と書くことにする。また、$f:X\to X$ とする。仮に、$0\le k<1$ を満たすある k が存在して、どんな $x,y\in X$ に対しても

$$\rho(f(x),f(y))\le k\rho(x,y)$$

を満たすならば、f には不動点 x^* が存在し、しかもそれは一つしかない[*1]。さらに、任意の点 $x\in X$ に対して、$x_0=x$ とし、$x_{n+1}=f(x_n)$ として点列 (x_n) を定義すると、(x_n) は x^* に収束する。

証明：まず、f が連続であることに注意する。実際、任意の $\varepsilon>0$ に対して、$\delta=k^{-1}\varepsilon$ とすると、$\rho(x,y)<\delta$ ならば

$$\rho(f(x),f(y))\le k\rho(x,y)<k\delta=\varepsilon$$

となるので、たしかに f は連続である。

ここでひとつだけ補題を導入する。

補題：$0\le k<1$ ならば、数列 $a_n=k^n$ としたとき、(a_n) は 0 に収束する。

[*1] この条件を満たす関数 f を**縮小写像** (contraction mapping) と言う。

証明：まず (a_n) は 0 を下回らない単調非増加数列であるため、第二回講義ノートの定理 3 から下限に収束する。その下限を a^* と置く。$a^* > 0$ であると仮定すると $a^*/k > a^*$ である。このときには、$\varepsilon = [(a^*/k) - a^*]/2$ と定義すると、収束の定義からある N が存在して、$n \geq N$ ならば $|a_n - a^*| < \varepsilon$ である。すると $a_N < a^*/k$ であるから $a_{N+1} < a^*$ となるが、(a_n) の下限が a^* だったのでこれは矛盾である。よって $a^* = 0$ でなければならない。以上で証明が完成した。 ■

次に、$x \in X$ を任意に取り、$x_0 = x$ とし、$x_{n+1} = f(x_n)$ という漸化式で点列 (x_n) を定義したとする。このとき、

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+1}, x_n) &\leq k\rho(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq \ldots \\ &\leq k^n \rho(x_1, x_0)\end{aligned}$$

を得る。したがって、$n < m$ のとき、

$$\begin{aligned}\rho(x_m, x_n) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} \rho(x_{i+1}, x_i) \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1} k^i \rho(x_1, x_0) \\ &= \frac{k^n(1-k^{m-n})}{1-k} \rho(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} \rho(x_1, x_0)\end{aligned}$$

であるが、最下段は補題によって、$n \to \infty$ のとき 0 に収束する。よって、どんな $\varepsilon > 0$ に対しても、$\frac{k^N}{1-k}\rho(x_1, x_0) < \varepsilon$ となるような N を取ってきて、$N \leq n < m$ とすると、

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

となる。これは、(x_n) がコーシー列であることを意味する。X は完備だったので、(x_n) は収束先 $x^* \in X$ を持つ。ここで、

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

の両辺の n についての極限を取ると、左辺は x^* に収束し、右辺は f の連続性から、$f(x^*)$ に収束する。よって $x^* = f(x^*)$ であり、x^* はたしかに f の不動点で、(x_n) は x^* に収束している。

残った主張は不動点が一つしかないことだけである。仮に y^* をもうひとつの不動点とすると、

$$\rho(x^*, y^*) = \rho(f(x^*), f(y^*)) \le k\rho(x^*, y^*)$$

である。したがって、$\rho(x^*, y^*)$ は 0 以上の数で、しかも $a \le ka$ を満たすものであるが、$k < 1$ なのでそのようなものは $a = 0$ しかあり得ず、よって $\rho(x^*, y^*) = 0$ である。故に $x^* = y^*$ であり、これで定理の証明が完成した。 ■

定理 6（逆関数定理）：U は実数の開部分集合であり、$f : U \to \mathbb{R}$ は U 上のすべての点で微分可能で、導関数 $f'(x)$ も連続であるとする。もしある点 $x^* \in U$ で $f'(x^*) \neq 0$ であるならば、数 $\varepsilon > 0$ と、関数 $g : (f(x^*) - \varepsilon, f(x^*) + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ が存在して、$|x - x^*| < 2\varepsilon/|f'(x^*)|,\ |y - f(x^*)| < \varepsilon$ が成り立つようなどんな (x, y) に対しても、以下が成り立つ。

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x.$$

さらに、関数 g は微分可能で、$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$ が成り立つ[*2]。

証明：まず、$x^* = 0, f(x^*) = 0, f'(x^*) = 1$ の場合に定理が成り立つことを示す。ここで

$$h(x) = x - f(x)$$

と置くと、この関数は微分可能でその導関数 $h'(x)$ は連続、さらに $h(0) = h'(0) = 0$ である。したがって、十分小さな $\varepsilon > 0$ を取れば、$|x| \le 2\varepsilon$ であるときには必ず $|f'(x) - 1| \le \frac{1}{2}$ となる。よって、$|x| \le 2\varepsilon$ であれば $f'(x) \ge \frac{1}{2} > 0$ であることに注意する。

平均値の定理から、$|x| \le 2\varepsilon$ であれば

$$\begin{aligned} |h(x)| &= |x - f(x)| = |f(x) - f(0) - (x - 0)| \\ &= |(f'(\theta x) - 1)(x - 0)| \le \frac{1}{2}|x| \end{aligned}$$

となることがわかる。また、

$$|h'(x)| = |1 - f'(x)| \le \frac{1}{2}$$

[*2] この定理の主張のうち、最後の微分の評価は当たり前の結果である。なぜなら、恒等式 $f(g(y)) = y$ の両辺を y で微分すると、合成微分の公式から

$$f'(g(y))g'(y) = 1$$

が出てくるためである。しかし、合成微分の公式を適用するためには、f も g も微分可能でなければならない。f の微分可能性は仮定されていたが、g はこの定理で導出するものなので、その微分可能性は証明されなければならない。これが、この定理を難しくしている理由である。

となることもわかる。そこでまず、

$$S = [-2\varepsilon, 2\varepsilon]$$

と定義する。次に $|y| \leq \varepsilon$ となる y を固定し、関数 $k_y : S \to \mathbb{R}$ を

$$k_y(x) = y + h(x) = y + x - f(x)$$

と定義する。$x \in S$ ならば、

$$|k_y(x)| \leq |y| + |h(x)| \leq \varepsilon + \frac{1}{2}|x| \leq 2\varepsilon \tag{1}$$

となるから、$k_y(x) \in S$ である。次に、平均値の定理から、$x, x' \in S$ ならば、x と x' の間のある z に対して、

$$|k_y(x) - k_y(x')| = |h(x) - h(x')| = |h'(z)||x - x'| \leq \frac{1}{2}|x - x'|$$

である。以上より、k_y は S から S への縮小写像であることがわかった。S は距離 $\rho(x, x') = |x - x'|$ に関して完備距離空間であると見なせるので、縮小写像の不動点定理から、k_y はただひとつの不動点 $x(y)$ を持つ。また、$y < \varepsilon$ であれば、(1) 式の不等号は強められるため、$|x(y)| < 2\varepsilon$ であることに注意する。

次に、$|y| \leq \varepsilon$ かつ $|y'| \leq \varepsilon$ であるとする。このとき、不動点の定義から、

$$k_y(x(y)) = x(y),\ k_{y'}(x(y')) = x(y')$$

である。よって、$x(y)$ と $x(y')$ の間にある z を使って平均値の定理で評価すれば、

$$\begin{aligned}
|x(y) - x(y')| &= |k_y(x(y)) - k_{y'}(x(y'))| \\
&\leq |k_y(x(y)) - k_{y'}(x(y))| + |k_{y'}(x(y)) - k_{y'}(x(y'))| \\
&= |y + h(x(y)) - y' - h(x(y))| + |y' + h(x(y)) - y' - h(x(y'))| \\
&= |y - y'| + |h(x(y)) - h(x(y'))| \\
&= |y - y'| + |h'(z)||x(y) - x(y')| \\
&\leq |y - y'| + \frac{1}{2}|x(y) - x(y')|
\end{aligned}$$

を得る。よって両辺をまとめると

$$|x(y) - x(y')| \leq 2|y - y'|$$

という評価を得る。

そこで、

$$W=(-\varepsilon,\varepsilon),\ V=(-2\varepsilon,2\varepsilon)$$

と定義する。すでに示したように $y\in W$ ならば $x(y)\in V$ である。このとき、

$$k_y(x(y))=y+x(y)-f(x(y))=x(y)$$

であるから、

$$f(x(y))=y$$

である。よって関数 $x(y)$ は W から V への関数で、f の逆関数としての性質を持つ。また、$y\in W$ のときに、$f(x)=y$ である $x\in V$ を取ってくれば、

$$k_y(x)=y+x-f(x)=x$$

となって、これは k_y の不動点となる。縮小写像の不動点定理から S 内には不動点はただひとつしか存在せず、$V\subset S$ なので、$x=x(y)$ であり、よって、$x\in V, y\in W$ であるとき、$f(x)=y\Leftrightarrow x(y)=x$ となる。

後は、$x(y)$ の微分可能性を示さなければならない。いま $x=x(y)$ とし、十分 $|k|$ が小さな k に対して $h=x(y+k)-x(y)$ とすると、$k=f(x+h)-f(x)$ であり、よって

$$\begin{aligned}x(y+k)-x(y)-\frac{1}{f'(x(y))}k=h-\frac{1}{f'(x(y))}k&=\frac{1}{f'(x(y))}[f'(x)h-k]\\&=-\frac{1}{f'(x(y))}[f(x+h)-f(x)-f'(x)h]\end{aligned}$$

である。ところがすでに示したように $|h|\le 2|k|$ なので、

$$0\le\frac{\left|x(y+k)-x(y)-\frac{1}{f'(x(y))}k\right|}{|k|}\le\left|\frac{2}{f'(x(y))}\right|\frac{|f(x+h)-f(x)-f'(x)h|}{|h|}$$

である。右辺の関数は $h\to 0$ のとき 0 に収束するが、$|h|\le 2|k|$ だから、$k\to 0$ のとき $h\to 0$ であり、よって右辺は $k\to 0$ のとき 0 に収束する。よってはさみうちの原理から、

$$\lim_{k\to 0}\frac{\left|x(y+k)-x(y)-\frac{1}{f'(x(y))}k\right|}{|k|}=0$$

であり、これは

$$x'(y)=\frac{1}{f'(x(y))}$$

を意味する。よって、$x^*=0, f(x^*)=0, f'(x^*)=1$ という仮定での証明はこれで終わった。

次に、$f'(x^*)=1$ であるが、x^* と $f(x^*)$ は必ずしも 0 でない場合には、

$$h(x)=f(x^*+x)-f(x^*)$$

と定義すれば、$h(0)=0$ かつ $h'(0)=1$ なので、上の議論から、数 $\varepsilon>0$ と $W=(-\varepsilon,\varepsilon)$, $V=(-2\varepsilon,2\varepsilon)$、そして微分可能な関数 $x:W\to V$ が存在して、$x\in V$ かつ $y\in W$ であるときには $h(x)=y$ と $x(y)=x$ が同値になる。後は、$g(y)=x^*+x(y-f(x^*))$ と定義すればこの $g(y)$ が定理の条件をすべて満たす。

最後に、$f'(x^*)\neq 0$ ではあるが $f'(x^*)=1$ とは限らない場合には、$f'(x^*)=a$ として

$$h(x)=f(x)/a$$

と定義すれば、$h'(x^*)=1$ であるから、上の結果から数 $\varepsilon>0$ と $W=(f(x^*)-\varepsilon/|a|,f(x^*)+\varepsilon/|a|)$ と $V=(x^*-2\varepsilon/|a|,x^*+2\varepsilon/|a|)$、そして関数 $x:W\to V$ が存在して、$x\in V$ かつ $y\in W$ であれば $h(x)=y$ と $x(y)=x$ が同値になる。今度は $W'=(f(x^*)-\varepsilon,f(x^*)+\varepsilon)$ として、$y\in W'$ に対して $g(y)=x(y/a)$ と定義しよう。すると、$x\in V$ かつ $y\in W'$ であれば、$y/a\in W$ であるから、

$$f(x)=y\Leftrightarrow h(x)=y/a\Leftrightarrow g(y)=x(y/a)=x$$

となって、g が定理の仮定をすべて満たす。以上で証明が完成した。 ■

この定理に出てくる g が f^{-1} である。ちなみに、この証明の f の定義域は $\mathbb{R}$ ではなく $\mathbb{R}^n$ でもうまく行くし、それどころか、バナッハ空間であればほとんど同様にして同じような定理が証明できることがわかっている。詳しくは、$\mathbb{R}^n$ の場合は丸山徹『経済の数学解析』の第三章を、バナッハ空間の場合は丸山徹『数理経済学の方法』の第五章を参考にせよ。

・連続微分可能性

平均値の定理のもう一つの効能は、連続微分可能性についての有名な定理を証明できることである。U は $\mathbb{R}^n$ の開集合とし、$f:U\to\mathbb{R}$ が与えられているとする。この f が点 $x\in U$ で連続微分可能であるとは、x の近くですべての座標 i に対する偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)$ が定義されていて、しかも連続であることを意味する。これについて、以下の定理が成り立つ。

定理7：U は $\mathbb{R}^n$ の開集合とし、$f:U\to\mathbb{R}$ は x で連続微分可能とする。このとき、f は x で全微分可能である。

証明：$n=2$ のときに示せれば他の場合はほとんど同じなので、それだけ示す。よって、二変数関数 $f(x,y)$ だけを考えることにし、$a=\frac{\partial f}{\partial x}(x),\ b=\frac{\partial f}{\partial y}(x)$ と定義し、ベクトル (a,b) が $Df(x)$ の要件

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|f(x+h,y+k)-f(x,y)-(a,b)\cdot(h,k)|}{\|(h,k)\|}=0$$

を満たすことを示そう。まず、平均値の定理から、$|h|$ と $|k|$ が共に十分小さいとき、

$$\begin{aligned}f(x+h,y+k)-f(x,y)&=f(x+h,y+k)-f(x,y+k)+f(x,y+k)-f(x,y)\\&=\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1 h,y+k)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\theta_2 k)k\end{aligned}$$

を満たす $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$ が存在することがわかる。そこで、

$$\begin{aligned}g_1(h,k)&=\frac{\partial f}{\partial x}(x+h,y+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\\g_2(h,k)&=\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,y+k)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{aligned}$$

と定義すると、上の計算からから、

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)-(a,b)\cdot(h,k)=(g_1(\theta_1 h,k),g_2(0,\theta_2 k))\cdot(h,k)$$

とまとめることができる。そこで、コーシー＝シュワルツの不等式から、

$$\begin{aligned}0&\le\frac{|f(x+h,y+k)-f(x,y)-(a,b)\cdot(h,k)|}{\|(h,k)\|}\\&=\frac{|(g_1(\theta_1 h,k),g_2(0,\theta_2 k))\cdot(h,k)|}{\|(h,k)\|}\\&\le\|(g_1(\theta_1 h,k),g_2(0,\theta_2 k)\|\end{aligned}$$

を得る。$\frac{\partial f}{\partial x}$ と $\frac{\partial f}{\partial y}$ は両方とも連続だから、上の式の一番下の行は $(h,k)\to(0,0)$ のとき 0 に収束し、よってはさみうちの原理によって、我々の主張が正しいことがわかる。以上で証明が完成した。 ■

　これを使うことで、さまざまな関数の全微分可能性が比較的簡単に導出できる。全微分可能であれば合成関数の微分の公式が使えるので、この定理は大変有用である。

・テイラーの定理

最後に、いわゆるテイラーの定理について証明しておこう。用語をひとつ追加する。U は $\mathbb{R}$ の開集合であり、$f : U \to \mathbb{R}$ はすべての点で微分可能であるとする。x に対して $f'(x)$ を返す関数 f' は f の**導関数**と言い、それが連続であるとき、f は連続微分可能であると言う。ここまではすでに述べたことがあるが、さらに f' が微分可能であったとき、その微分を f の**二階微分**と言い、$f''(x)$ で表す。同様に $f'''(x)$ や $f''''(x)$ なども定義できるが、ダッシュ記号が多すぎると読みにくいので、$f'''(x)$ と書く代わりに $f^{(3)}(x)$ と書く場合が多い。$f^{(n)}(x)$ と書いた場合の意味については、もう誤解の余地はないであろう。なお、$f(x)$ 自身は $f^{(0)}(x)$ と書くこともある。

これを使って、以下の定理が証明できる。

定理８（テイラーの定理）：U は $\mathbb{R}$ の開集合で、$f : U \to \mathbb{R}$ はすべての点で n 階微分可能で、その n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ は連続であるとする。このとき、$x \in U$ に対して

$$g_{f,n}(y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}(y-x)^i,$$

$$R_n(h) = f(x+h) - g_{f,n}(x+h)$$

と定義すると、

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_n(h)}{h^n} = 0$$

が成り立つ。

証明：まず、合成微分の公式を $(y-x)^i$ に適用すると、

$$((y-x)^i)' = i(y-x)^{i-1}$$

となることに注意する。これを使うと、

$$g'_{f,n}(y) = g_{f',n-1}(y)$$

が成り立つことが容易にわかる。とくに $g_{f,n}(x) = f(x)$ なので、

$$g'_{f,n}(x) = g_{f',n-1}(x) = f'(x)$$

が成り立つ。そこで平均値の定理を何度も使うと、

$$\begin{aligned}\frac{R_n(h)}{h^n} &= \frac{f(x+h)-g_{f,n}(x+h)}{h^n}\\ &= \frac{f'(x+\theta_1 h)-g_{f',n-1}(x+\theta_1 h)}{h^{n-1}}\\ &= \frac{f''(x+\theta_2 h)-g_{f'',n-2}(x+\theta_2 h)}{h^{n-2}}\\ &= \dots\\ &= f^{(n)}(x+\theta_n h)-g_{f^{(n)},0}(x+\theta_n h)\end{aligned}$$

であることがわかる。ただし、$\theta_i \in (0,1)$ である。ところが、定義から $g_{f,0}(y)=f(x)$ なので、上の式の一番下の行は

$$f^{(n)}(x+\theta_n h)-f^{(n)}(x)$$

に等しい。$f^{(n)}$ は連続だから、$h\to 0$ のとき一番下の行は 0 に収束し、よって、定理の主張は正しい。以上で証明が完成した。 ■

この定理に出てくる $g_{f,n}(y)$ は多項式である。この $g_{f,n}(y)$ のことを、関数 f の n 次の**テイラー展開**と言う。$x=0$ がたまたま成り立っていた場合には、これを**マクローリン展開**と呼ぶ場合もある。

f の n 次のテイラー展開 $g_{f,n}$ は、f を x のまわりで**近似**するような n 次の多項式の中で、最も近似精度が高いものである。実際、$R_n(h)$ は近似誤差であり、テイラーの定理はこの誤差が、$h\to 0$ のときに、h^n よりも早い速度で 0 に収束することを意味している。

さて、f が何度でも微分可能だとしよう。すると、なんとなく $n\to\infty$ としたときに、次の公式

$$f(y)=g_{f,\infty}(y)$$

が成り立ちそうな感じがする。級数で書き下すと、

$$f(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n$$

ということである。この右辺は**テイラー級数**と呼ばれ、特に $x=0$ ならば、**マクローリン級数**と呼ばれる。ところがここでやっかいなことがあって、このテイラー級数が $f(y)$ と一致しない関数があるのである。たとえば、

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{if } x\neq 0,\\ 0 & \text{if } x=0,\end{cases}$$

と定義しよう。計算はとても面倒なのだが、$f^{(n)}(0) = 0$ であることを証明することができる。したがって、マクローリン級数は恒等的に 0 を与える関数になるが、$f(x)$ は $x \neq 0$ のときは 0 ではないので、上の等号は成り立たない。

では、どんなときに関数はテイラー級数で書けるのだろうか？　次回はこれについてもう少し解説しよう。

・先週の課題の解説

この講義ノートで書かれている通り、連続微分可能ならば全微分可能である。しかし、連続微分可能でないならば、たとえば次のような反例が存在する。関数

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{if } (x,y) \neq (0,0), y = x^2, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

は、点 $(0,0)$ でどちらの方向にも偏微分可能で $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ である。もし全微分可能であれば $Df(0,0) = (0,0)$ である。ところで、$g(t) = (t, t^2)$ と定義すると、定義から $f(g(t)) = t$ である。よってもし f が全微分可能ならば合成微分の公式から

$$Df(0,0)g'(0) = (t)' = 1$$

であるが、$Df(0,0) = (0,0)$ だとすればこれはあり得ない。以上から、この f は $(0,0)$ で全微分可能ではないことがわかる。

というわけで、偏微分可能であっても全微分可能とは限らない。また同時に、合成微分の公式は全微分可能でないと適用できないこともわかった。適用時には常に注意すること。

・今週の課題

今回はロピタルの定理について出題する。今回のロピタルの定理は $f(a) = g(a) = 0$ および a が実数という条件下で議論した。しかし、a に $+\infty$ や $-\infty$ を入れたり、あるいは $f(a) = +\infty$ かつ $g(a) = -\infty$ といった、変わった状況がいくつもある。どこまでロピタルの公式は適用できるだろうか？