講義ノート：総合講座（第九回）

細矢祐誉

テーマ：一様収束、複素数

・関数の収束

前回、関数 f の x のまわりのテイラー級数

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n \tag{1}$$

を紹介した。(1) 式の右辺は、多項式

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n$$

の極限である。つまり、前回扱った議論では、我々はただの数の極限ではなく、**関数の極限**という概念に初めて触れていたことになる。

今回はその関数の収束について少し考えてみよう。関数が収束するというのはどういうことであろうか。実は、ある関数の列 (f_n) が f に収束する、という言葉の定義は、ものすごくたくさんある。以下の例はほんの一例である。

- $p \geq 1$ に対して、次の値
$$\int |f_n(x) - f(x)|^p dx$$
が 0 に収束する。（L^p 収束）
- 次の値
$$\sup_x |f_n(x) - f(x)|$$
が 0 に収束する。（一様収束）
- 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ である確率が 0 に収束する。（確率収束）
- f_n の分布関数を F_n、f の分布関数を F としたとき、F の不連続点以外のすべての x において $F_n(x)$ が $F(x)$ に収束する。（分布収束）

これらは、もちろん使える場合と使えない場合がある。たとえば、確率空間でないと確率収束や分布収束は定義できない。これらの収束の共通点は、すべて距離で測れることであ

る。実際、前の二つは、それぞれ L^p ノルムや sup ノルムと呼ばれるノルムの収束で議論できる。特に L^2 ノルムは内積を使って定義できるので、一部の分野で非常に使いやすい。確率収束は Ky Fan の距離、分布収束は Prohorov の距離と言われる距離があって、その距離での収束に対応している。

しかし、関数の収束においては、もっと自然な、誰でも思いつくような概念があることに気づく。それは、「すべての点 x において、$f_n(x)$ が $f(x)$ に収束する」という定義である。この収束は**各点収束**と呼ばれる。

なぜ、この「当たり前の」収束を使わないのだろうか？　実は、各点収束はかなり多くの場合、望ましい性質を持たないのである。まず、各点収束は、対応する距離がないことが知られている。これは、距離がまだ見つかっていないのではなく、この収束を距離空間の収束として扱うことは絶対にできないことが定理として示されている、という意味である。

これだけならまだよいのだが、各点収束は関数の様々な性質を壊してしまうという弱点を持つ。たとえば、$D = [0, 2]$ とし、D 上の関数 $f_n(x) = \min\{x^n, 1\}$ について考えよう。この関数列 (f_n) は、

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1, \\ 1 & \text{if } x \ge 1, \end{cases}$$

に各点収束する。ところが見ればわかるとおり、この関数は**連続ではない**。このように、連続関数の極限が連続にならないようなことが、あり得るわけである。もちろん、L^p ノルムも同様で、上の f_n は f に L^p 収束するが、f は連続ではない。

しかし、我々がテイラー級数で扱っていたのは何回でも微分できる関数なのだから、その極限は何回でも微分できてくれないと、(1) 式は絶対に成り立たないことになる。微分可能な関数は必ず連続であるから、(1) 式の右辺が収束で連続性を保ってくれるような意味で収束していてくれないと困るのである。

というわけで、今回はまず、どのような収束の仕方をしていれば連続関数の極限は連続であるか、という議論から始めるとしよう。各点収束や L^p 収束はだめだった。では、他の収束ではどうだろうか？

・基本定理

この、関数の収束で連続性が保たれることについては、最も基本的な定理が存在する。この定理は後で何度も使うので、きちんと証明しておかなければならない。

最初に定義するのは、上の文章でも議論した一様ノルムである。まず、$D \subset \mathbb{R}^K$ とす

る。関数 $f: D \to \mathbb{R}^k$ が与えられたとき、この f が**有界**であるという言葉を、ある $M > 0$ が存在して、すべての $x \in D$ に対して $\|f(x)\| \le M$ である、という形で定義する。そして X は、D から $\mathbb{R}$ への連続で有界な関数をすべて集めてできた集合とする。$f \in X$ に対して、

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\| | x \in D\}$$

と定義する。この $\|f\|$ がノルムの公理をすべて満たすことは簡単に確認できる。これを**一様ノルム**と呼ぶ。X 上の関数列 (f_n) が f に**一様収束** (uniformly converge) するとは、$\|f_n - f\|$ が 0 に収束することを言う。

当然ながら、すべての $x \in D$ に対して、

$$0 \le \|f_n(x) - f(x)\| \le \|f_n - f\|$$

なので、はさみうちの原理から、(f_n) が f に一様収束していれば、それは各点収束することがわかる。一方で、先ほど挙げた関数列 $f_n(x) = \min\{x^n, 1\}$ は $D = [0, 2]$ に対する X に入っている列だが、実は $\|f_n - f\| = 1$ が常に成り立つことを証明できる。したがって、各点収束していても一様収束しているとは限らない。

以下の定理が最も基本的である。

定理１：上で議論した空間 X は、一様ノルムの下で、完備距離空間になる。

証明：この定理は内容が難しいので、「なにをすれば証明したことになるのか」を整理することから始めなければならない。まず、完備距離空間とは、任意のコーシー列が収束する空間のことであった。ということは、(f_n) が X 上のコーシー列であるならば、ある f が存在して、$\|f_n - f\|$ が 0 に収束しなければならない。では、それだけでよいかというと、そうではない。今回の場合、X に入っていない関数 f でも、もしかすると $\|f_n - f\|$ が定義できてしまうかもしれないという懸念がある。よって、$f \in X$ であることも証明しないといけない。かなり議論が錯綜するので、以降の議論で証明する順番を下に書いておく。

1. (f_n) が X 上のコーシー列であるとすると、(f_n) が各点収束する関数 $f: D \to \mathbb{R}^k$ が存在する。
2. (f_n) が X 上のコーシー列で、f に各点収束していれば、$\|f_n - f\|$ は 0 に収束する。
3. (f_n) が X 上の関数列で、$\|f_n - f\|$ が 0 に収束していれば、$f \in X$ である。

以上３つを示すことで、この定理が証明されたことになることを学生諸君はよく確認されたい。

さて、まず (f_n) が X 上のコーシー列であるとする。このとき、$\varepsilon > 0$ を任意に取ってくると、ある N が存在して、$n, m \geq N$ ならば $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ である。このとき、$x \in D$ ならば、$n, m \geq N$ のとき、

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

である。よって $(f_n(x))$ という点列はコーシー列である。$\mathbb{R}^k$ は完備なので、この点列は収束する。その収束先を $f(x)$ と書こう。関数 $f : x \mapsto f(x)$ は D から $\mathbb{R}^k$ への関数である。よって 1. は正しいことがわかった。

次に 2. を示す。(f_n) は X 上のコーシー列で、f に各点収束しているとする。ここで $\varepsilon > 0$ を取る。まず、(f_n) は X 上のコーシー列であるから、ある N が存在して、$n, m \geq N$ ならば $\|f_n - f_m\| < \varepsilon/2$ である。$x \in D$ とすると $\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n - f_m\| < \varepsilon/2$ である。一方で、ノルム関数 $g(z) = \|z\|$ は連続である[*1]。$(f_m(x))$ は $f(x)$ に収束しているので、ノルムの連続性から

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon/2$$

となる。x がなんであろうと共通の N に対して $n \geq N$ ならばこれが言えるため、左辺の上限を取れば

$$\|f_n - f\| = \sup\{\|f_n(x) - f(x)\| | x \in D\} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

となる。よって $\|f_n - f\|$ は 0 に収束していて、2. が正しいことがわかった。

最後に 3. を示す。(f_n) が X 上の点列で、$\|f_n - f\|$ が 0 に収束していたとする。$x \in D$ と $\varepsilon > 0$ を任意に取る。$\|f_n - f\|$ は 0 に収束しているから、ある N が存在して、$n \geq N$ ならば $\|f_n - f\| < \varepsilon/3$ となる。一方、f_N は連続関数なので、ある $\delta > 0$ が存在して、$\|y - x\| < \delta$ ならば $\|f_N(y) - f_N(x)\| < \varepsilon/3$ となる。以上と、ノルムの三角不等式から、$\|y - x\| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}\|f(y) - f(x)\| &= \|f(y) - f_N(y) + f_N(y) - f_N(x) + f_N(x) - f(x)\| \\ &\leq \|f(y) - f_N(y)\| + \|f_N(y) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f(x)\| \\ &\leq \|f_N - f\| + \|f_N(y) - f_N(x)\| + \|f_N - f\| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\end{aligned}$$

[*1] 実際、三角不等式から

$$\|z\| \leq \|w\| + \|z - w\|, \ \|w\| \leq \|z\| + \|z - w\|$$

が示せるので $|g(z) - g(w)| \leq \|z - w\|$ が成り立ち、よって $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon$ とすれば、$\|z - w\| < \delta$ のとき $|g(z) - g(w)| < \varepsilon$ である。

となる。よって f は点 x で連続である。x はどこでもよかったので、f は連続関数である。また、$\varepsilon = 1$ に対して、$n \geq N$ であれば $\|f_n - f\| \leq 1$ であるような N を取ってくれば、

$$\begin{aligned}\|f(x)\| &= \|f(x) - f_N(x) + f_N(x)\| \\ &\leq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x)\| \\ &\leq 1 + \|f_N\|\end{aligned}$$

なので、$\|f\| \leq \|f_N\| + 1$ であり、よって f は有界である。以上で、f は有界な連続関数であることがわかったので、$f \in X$ となる。以上で証明が完成した。■

この定理は、関数列の極限の連続性を保証する定理としては、非常に有力である。D がコンパクトであれば、任意の連続関数 $f : D \to \mathbb{R}^k$ に対して、最大最小原理から $\|f(x)\|$ には最大値があり、よって f は有界であって、$\|f\| = \max\{\|f(x)\| | x \in D\}$ である。よって、上の X はすべての連続関数からなる空間になる。しかし、コンパクトでない場合には若干の問題がある。たとえば $D = \mathbb{R}$ であるとき、$f(x) = x^2$ は連続であるが、これは有界ではない。また、$f_n(x) = x^{2-1/n}$ とすれば、これは $f(x) = x^2$ に明らかに各点収束するが、$\|f_n - f\| = +\infty$ になっていて、一様収束もしない。この問題を処理するためにはどうすればよいかというのは少し難しい話であるが、いったんそれは置いておこう。

次の定理はこの定理１の系であり、テイラー級数の議論に本質的に影響を与える。

定理２：関数列 (f_n) を考える。ただし、$f_n : D \to \mathbb{R}^k$ は連続で、$D \subset \mathbb{R}^K$ であるとし、また収束する正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$ に対して、$\|f_n(x)\| \leq M_n$ がすべての $x \in D$ について成り立つとする。このとき、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は一様収束し、極限 f は連続である。

証明：こちらも、主張を理解することから始めよう。次の関数を定義する。

$$g_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$$

主張は、この関数列 (g_N) が一様収束するような連続関数 f が存在することである。証明のために、$M = \sum_{n=0}^{\infty} M_n$ としておく。仮定から $0 \leq M < +\infty$ である。また、X を定理１と同様に D 上の有界で連続な実数値関数が作る空間とし、一様ノルム

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\| | x \in D\}$$

を定義しておく。

まず、三角不等式から、

$$\|g_N(x)\| \le \sum_{n=0}^{N} \|f_n(x)\| \le \sum_{n=0}^{N} M_n \le M$$

であるため、$\|g_N\| \le M$ が成り立つ。よって $g_N \in X$ である。次に、(g_N) がコーシー列であることを示そう。$\varepsilon > 0$ を任意に取って固定する。正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ は収束するため、ある N が存在して、$\sum_{N+1}^{\infty} M_n = M - \sum_{n=0}^{N} M_n < \varepsilon$ である。ここで $N_2 > N_1 \ge N$ とすると、

$$\begin{aligned}
\|g_{N_2}(x) - g_{N_1}(x)\| &= \left\| \sum_{n=0}^{N_2} f_n(x) - \sum_{n=0}^{N_1} f_n(x) \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=N_1+1}^{N_2} f_n(x) \right\| \\
&\le \sum_{n=N_1+1}^{N_2} \|f_n(x)\| \\
&\le \sum_{n=N_1+1}^{N_2} M_n \\
&\le \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \varepsilon
\end{aligned}$$

となるため、(g_N) は確かにコーシー列であることがわかった。定理 1 から、(g_N) はある有界連続関数 f に一様収束するため、定理 2 の主張は正しい。以上で証明が完成した。 ■

・複素数

複素数について本講義ではいままで一切扱っていなかった。実際、経済学ではあまり必要のない概念なのだが、以降の議論でどうしても必要になる。したがって今回は複素数について議論しておくことにする。

まず、複素数は集合的には $\mathbb{R}^2$ と同一視される。ここで (a, b) と (c, d) に対して、普通の足し算 $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ を定義する。一方、かけ算については、

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

と定義する。この足し算とかけ算の組み合わせは、第二回の講義ノートで述べた体の公理をすべて満たす。したがって複素数の集合 $\mathbb{C}$ は体である。一方、絶対値 $|(a, b)|$ は、ノル

ム $\|(a,b)\|$ と同じ定義をする。つまり、複素数 (a,b) に対して

$$|(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}$$

である。コーシー＝シュワルツの不等式から、この絶対値についても三角不等式が成り立つことに注意する。複素数の空間にはこの絶対値で距離を与えるため、定理 1 や定理 2 の $k=2$ とすることで、これらの定理は任意の複素数値関数の列に対して成り立つことがわかる。

特別な複素数 $(1,0)$ を 1 で、$(0,1)$ を i で表す。こうすると、任意の複素数 (a,b) は

$$(a,b) = a1 + bi$$

と書ける。1 を書くのは煩雑なので省略してしまうと、$(a,b) = a+bi$ と書けるのである。以後、複素数を書くときには (a,b) と書く代わりに $a+bi$ と書く。こうすると、$i^2 = -1$ であることはかけ算の定義から明らかなので、

$$(a+bi)\times(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

となって、普通の分配法則で複素数のかけ算を定義できるので便利である。

複素数 $a+0i$ は実数 a と同一視できる。この意味で複素数体 $\mathbb{C}$ は実数体 $\mathbb{R}$ を含む。

複素数 $z=a+bi$ に対して、複素共役

$$\bar{z} = a-bi$$

を定義する。このとき、

$$|z|^2 = z\times\bar{z}$$

と書けることに注意しよう。これはしばしば使用される関係である。また、

$$z=a+bi,\ w=c+di$$

であるとすると、

$$zw = (ac-bd)+(ab+cd)i,\ \bar{z}\bar{w} = (ac-bd)-(ab+cd)i$$

であるから、zw の複素共役 $\overline{zw}$ は $\bar{z}\bar{w}$ と一致する。そこで、

$$|zw|^2 = zw\bar{z}\bar{w} = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2|w|^2$$

であり、よってこれの平方根を取ることで絶対値の公式

$$|zw| = |z||w|$$

を得る。

$\mathbb{R}^2$ は完備なので、複素数 $\mathbb{C}$ も完備である。特に、複素級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

を考える。ここで絶対値を取った級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$$

が収束するとき、この級数は**絶対収束**すると言う。絶対収束する級数は必ず収束する。なぜなら、$M > N$ のとき、三角不等式から

$$\left|\sum_{n=0}^{M} z_n - \sum_{n=0}^{N} z_n\right| \le \sum_{n=0}^{M} |z_n| - \sum_{n=0}^{N} |z_n|$$

であることがわかるため、絶対値の級数の部分和がコーシー列であれば、元の級数の部分和もコーシー列であるからである。

次回の講義以降で使う級数の収束判定法のうち、重要なものを命題としてまとめておこう。いくつかは複素級数ではなく正項級数、つまり a_n が 0 以上の実数である場合の判定法だが、複素級数を扱う場合には絶対収束するかどうかが問題になるため、正項級数が最も重要なのである。

命題１：以下が成り立つ。

(i) すべての n について $0 \le |a_n| \le b_n$ かつ $\sum_n b_n$ が収束するならば、$\sum_n a_n$ は絶対収束する。

(ii) $a_n = ar^n$ で、$0 \le r < 1$ ならば、$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \frac{ar^N}{1-r}$ である。

(iii) $a_n > 0$ がすべての n について成り立ち、かつ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ であるとする。もし $r < 1$ ならば $\sum_n a_n$ は収束し、$r > 1$ ならば $\sum_n a_n$ は発散する。

(iv) $\sum_n a_n$ と $\sum_n b_n$ が共に絶対収束するなら、$c_n = a_n + b_n$ としたとき、$\sum_n c_n$ も絶対収束し、$\sum_n c_n = \sum_n a_n + \sum_n b_n$ が成り立つ。

(v) $\sum_n a_n$ と $\sum_n b_n$ が共に絶対収束するならば、$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n$ とした級数 $\sum_n c_n$ も絶対収束し、$\sum_n c_n = (\sum_n a_n) \times (\sum_n b_n)$ が成り立つ。

証明：(i) については、$\sum_{n=0}^{N} |a_n| = s_N,\ \sum_{n=0}^{N} b_n = t_N$ とすると、(t_N) は収束数列なの

でコーシー列である。一方、$M > N$ のとき

$$|s_M - s_N| = \sum_{n=N+1}^{M} |a_n| \leq \sum_{n=N+1}^{M} b_n = |t_M - t_N|$$

なので、(s_N) もコーシー列であり、よって収束する。故に $\sum_n a_n$ は絶対収束する。

(ii) については、部分和 $\sum_{n=N}^{M} a_n = \frac{ar^N(1-r^{M-N+1})}{1-r}$ であるが、r^{M-N+1} は M が大きくなるにつれて 0 に収束するので、正しい。

(iii) について。まず $r < 1$ のときを考える。$r < r' < 1$ となる r' を取ると、$\varepsilon = r' - r$ に対してある N が存在して、$n \geq N$ ならば $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r + \varepsilon = r'$ である。$n < N$ のときは $b_n = a_n$ とし、$n \geq N$ ならば $b_n = a_N r^{n-N}$ と置くと、$a_n \leq b_n$ が常に成り立つが、(ii) から

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = a_0 + ... + a_{N-1} + \frac{a_N}{1-r}$$

となって収束するので、(i) から $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する。次に、$r > 1$ のときは上と同様に、ある N が存在して $n \geq N$ ならば $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ であるので、

$$\sum_n a_n \geq a_0 + ... + a_{N-1} + \sum_{n=N}^{\infty} a_N = +\infty$$

となって、$\sum_n a_n$ の発散がわかる。

(iv) については、三角不等式から明らか。

(v) について。まず、仮定から $\sum_n |a_n| = \alpha,\ \sum_n |b_n| = \beta$ となる α, β が存在する。三角不等式から、

$$\sum_{n=0}^{m} |c_n| \leq \sum_{n=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} |a_i||b_{n-i}| \leq \left(\sum_{n=0}^{m} |a_n| \right) \left(\sum_{n=0}^{m} |b_n| \right) \leq \alpha\beta$$

となるので、数列 $t_m = \sum_{n=0}^{m} |c_n|$ は上に有界な単調非減少数列で、よって上限に収束する。したがって $\sum_n c_n$ は絶対収束する。その収束先を c とする。一方、$s_m = \sum_{n=0}^{m} c_n$ とすると、(s_{2m}) は (s_m) の部分列なので c に収束する。また、

$$\alpha_m = \sum_{n=m}^{\infty} |a_n| = \alpha - \sum_{n=0}^{m-1} |a_n|,\ \beta_m = \sum_{n=m}^{\infty} |b_n| = \beta - \sum_{n=0}^{m-1} |b_n|$$

とすると、仮定から $m \to \infty$ のとき (α_m) と (β_m) は共に 0 に収束する。そこで、$\varepsilon > 0$

をひとつ固定する。このとき、

$$\begin{aligned}
\left|s_{2m}-\left(\sum_{n=0}^{m}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{m}b_n\right)\right| &\le \sum_{n=m+1}^{2m}\sum_{i=0}^{2m-n}|a_i||b_n|+\sum_{n=m+1}^{2m}\sum_{i=0}^{2m-n}|a_n||b_i| \\
&\le \left(\sum_{n=0}^{m}|a_n|\right)\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}|b_n|\right)+\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}|a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{m}|b_n|\right) \\
&\le \alpha\beta_{m+1}+\beta\alpha_{m+1}
\end{aligned}$$

であることを用いると、十分大きな m に対して、上の式の一番上の左辺の絶対値が $\varepsilon/3$ より小さくなる。ここで $\sum_n a_n = a,\ \sum_n b_n = b$ と置くと、十分大きな m に対して $|c-s_{2m}|<\varepsilon/3$ で、かつ $|(\sum_{n=0}^m a_n)(\sum_{n=0}^m b_n)-ab|<\varepsilon/3$ になるので、

$$\begin{aligned}
|c-ab| &= \left|c-s_{2m}+s_{2m}-\left(\sum_{n=0}^{m}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{m}b_n\right)+\left(\sum_{n=0}^{m}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{m}b_n\right)-ab\right| \\
&\le |c-s_{2m}|+\left|s_{2m}-\left(\sum_{n=0}^{m}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{m}b_n\right)\right|+\left|\left(\sum_{n=0}^{m}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{m}b_n\right)-ab\right| \\
&< \varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon
\end{aligned}$$

となる。よって $|c-ab|$ は任意の正の数 ε より小さいため、$|c-ab|=0$ でなければならず、よって $c=ab$ である。以上で証明が完成した。 ■

・先週の課題の解説

まず、$a=\infty$ であるときを考えてみよう。$f(x),g(x)$ に対して $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}=0$ かつ $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\alpha$ と仮定する。そして、

$$h(x)=\begin{cases}f(1/x) & \text{if } x\neq 0,\\ 0 & \text{if } x=0,\end{cases}\quad k(x)=\begin{cases}g(1/x) & \text{if } x\neq 0,\\ 0 & \text{if } x=0,\end{cases}$$

と定義する。このとき、h,k は $[0,+\infty)$ 上で定義された関数として $x=0$ で連続である。そして、$x\neq 0$ のとき、合成微分の公式から

$$\frac{h'(x)}{k'(x)}=\frac{f'(1/x)}{g'(1/x)}$$

が成り立つ。以上から、普通のロピタルの定理によって、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{k(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{h'(x)}{k'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\alpha$$

となる。

次に、$\lim_{x\to a} f(x)$ と $\lim_{x\to a} g(x)$ がどちらも $+\infty$ と $-\infty$ のいずれかである場合を考えてみよう。$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$ と仮定する。仮定から、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して、$0 < |x-a| < \delta$ ならば $\frac{f'(x)}{g'(x)} \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ である。ここで $0 < |x-a| < \delta$ とし、x と a の間の y を取ると、コーシーの平均値の定理から

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$$

がわかる。この左辺を変形して

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)}}{1 - \frac{g(x)}{g(y)}}$$

と書ける。仮定から $y \to a$ のとき $\frac{f(x)}{g(y)}$ と $\frac{g(x)}{g(y)}$ は 0 に収束し、よって $\liminf$ と $\limsup$ を取ることで、

$$\alpha - \varepsilon \leq \liminf_{y\to a}\frac{f(y)}{g(y)} \leq \limsup_{y\to a}\frac{f(y)}{g(y)} \leq \alpha + \varepsilon$$

を得る。これは任意の $\varepsilon > 0$ について成り立つので、

$$\alpha = \liminf_{y\to a}\frac{f(y)}{g(y)} = \limsup_{y\to a}\frac{f(y)}{g(y)}$$

であり、よって $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ を得る。

以上のような考察から、ロピタルの定理は万能のように思えるかもしれない。ただし注意事項があって、あくまでこの公式は $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ がわからない場合、つまり $f(a) = g(a) = 0$ だったり $f(a) = g(a) = \pm\infty$ だったりする場合にだけしか適用できないということである。たとえば、$f(x) = 1, g(x) = x+1$ とすると、$f'(x) = 0$ で $g'(x) = 1$ なので、

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \neq 0 = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となるため、ロピタルの定理は成り立たない。

・今週の課題

今回は関数の収束について考える。すでに述べたように、一様収束は各点収束よりも強い収束であり、一様収束していれば各点収束もしているが、逆は成り立たない。では、この講義ノートで述べた L^p 収束との関係はどうなっているだろうか？