

第 12.5 章 集計問題と余剰

拙著『消費者行動の理論分析』の 13.4 節（以降、「書籍」と呼ぶ）で述べたことを再掲しておこう。現代のたいていの国において、消費者各個人の消費は法的な権利として秘匿されている。そこで多くの経済学者は、一地域で行われた取引の合計データなどを用いて、その地域の「平均」消費量を見ることで、「平均的な」消費者の姿を捉えようとする。しかし、書籍で述べたように、多くの場合においてそれは非常に大きな困難を伴う。

書籍では、これを可能とする仮定として準線形効用

$$u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$$

を扱った。この文脈では第二財を貨幣に近いなにか（価値尺度財）であると仮定することが慣例であるので、今回もそのように扱う。したがって、以下では $p_2 = 1$ とする。すると第一財を $p = p_1$ という価格で取引することによる効用の増分は、**消費者余剰** (consumer's surplus) と呼ばれる概念で計ることができる。これは現代ではなんらかの図形の面積によって定義するのが慣例になっている。これを集計することで、我々は社会のよさを需要曲線だけから計算することができるのである。

しかし、この議論では重大な問題をいくつも放置していた。以下に、いくつか問題を列挙する。まず、多くの教科書で議論されている「消費者余剰」の素朴な議論と、この議論の間の関係が不透明である。消費者余剰を導入するとき、多くの教科書で最初に議論されるのは「支払意思額」であり、これを元に「需要曲線」が導出される。これと、我々が扱った「需要関数」は違う概念であるが、このふたつはなんらかの形で対応するのであろうか。それから、準線形効用が必要な理由もよくわからない。消費者が全員準線形効用を持てば消費者余剰と効用の増分が関係する、という点については書籍で議論したが、逆に消費者が準線形効用を持たない場合に関係しないのかどうかも定かではない。最後に、書籍において我々は消費集合を $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ としたが、このような集合を扱う必要がある理由がよくわからない。

このあたりの疑問を解決するのが、この章の目的である。ただし、上の列挙した問題は整理されていないため、これがどのような理論的問題に還元されるのかすら、現時点では定かではない。この章はこれに加えてさらにもう一つ、この問題が古典的な Gorman

(1959, 1961) の形の集計問題と大きく関わっていることも見る。この結果は増澤 (2025) によって得られた、現代的な消費者理論のひとつの大成果である。

本章において消費集合 Ω は様々な形を取る。典型的な例は $\mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R}$ であるが、本章で扱う消費集合はこれ以外にも様々なものがあり得る。

12.1 素朴な定義

Marshall (1890) 型の消費者余剰の定義の典型的な解説から始めよう。簡単に議論するために、ひとつの財の市場を考える。ここに 4 人の人間が買い手として参入している。各人は財をひとつずつ欲しいと思っているが、出せる額には上限がある。この上限を**支払意思額** (willingness to pay) と呼ぶ。いま、この 4 人の支払意思額を高い順に並べて、棒グラフのようなものを作ってみよう。

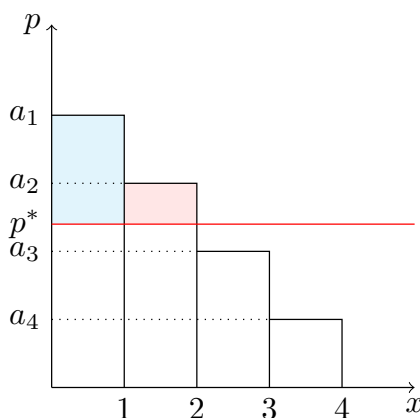


図 12.1 支払意思額のグラフ

図 12.1 がこの棒グラフである。ここで価格 p^* が与えられたとき、価格 p^* より高い支払意思額を持っている人間のみがこの財を買うことになる。したがって図 12.1 の場合は高い方から 2 人が買うことになる。その場合、一人目がこの取引で得した分は支払意思額 a_1 から実際の支払額 p^* を引いた値 $a_1 - p^*$ であり、二人目がこの取引で得した分は同様に $a_2 - p^*$ であるから、この取引を経て経済において買い手側が得をした金額の合計分はこの合計、つまり $(a_1 - p^*) + (a_2 - p^*)$ となる。

ところで、上の長方形は底辺の長さが 1 である。したがって、上の合計はまた、赤い線と棒グラフで囲まれた図形の面積でもある。この面積のことを**消費者余剰** (consumer's surplus) と呼ぶ。

実際の市場では参加者は 4 人などではなくもっと莫大であるため、分析を簡単にするために、この階段状の棒グラフは斜線で近似される。こうして我々は慣れ親しんだ**需要曲線**

(demand curve) の図を得る。

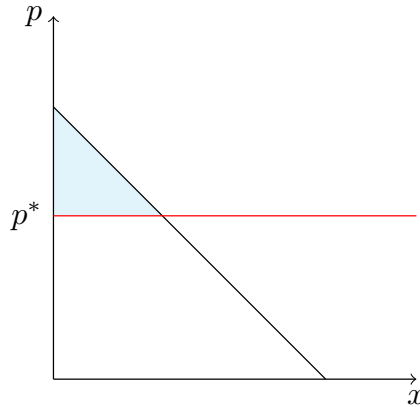


図 12.2 需要曲線

図 12.2 は需要曲線を描いたものである。便宜上この斜め線は直線で書いているが、特にこの線が直線でなければいけないという理由はない。しかし少なくとも階段ではなくなっている。このとき、高さ p^* の赤い線とこの需要曲線で囲まれた面積をやはり**消費者余剰**と呼び、これがこの市場の取引における買い手側が得をした分を表す指標であるとされる。

ここまでで扱われた概念には、さまざまな問題が昔から指摘されていた。これらについて、まずは列挙してみよう。

- (1) 最初に気になるのは、消費者余剰を足し合わせていることである。たしかに、図 12.1 の青い長方形の面積と赤い長方形の面積はそれぞれ金額に対応しているため、一見して単位がそろっていて足し合わせることができるように見える。しかし、実際にはこれらが意味しているのは「得した分」、つまり金額というよりはある種の**効用指標**であると考えられる。であれば、効用を合計したものを議論してよいかという、第 1 2 章で扱った問題と同様の疑問が出てくることになる。特に、この面積による効用の計測は、第 1 2 章で扱ったハーサニー型、ハーヴェイ型のどちらの功利主義定理にも当てはまりそうにない。では、この足し合わせはどうやって正当化されうるのだろうか？
- (2) この問題を避けるため、モデルの解釈を変えてみよう。つまり、4 人の消費者がいるのではなく、消費者はあくまで 1 人で、ただし最大で 4 個の財を買おうと思っているという状況を考えるのである。こうなると、個人間比較をしているという考え方はしなくてよくなる。しかしこうするとまずいことが起こるのである。経済学において需要曲線は、通常は市場分析のために使用される。たとえば、図 12.2 に供給曲線を書き足してみても、その交点を「均衡価格」として、この価格を長期的に市場で実現する価格として考えることになる。しかし、需要曲線が個人のものであれば、それは総需要

を意味していないので、これと供給曲線の交点に特別な意味を見いだすことは難しくなる。

- (3) この、応用可能性の問題はいったん先送りしよう。ともかく、図 12.1 の解釈を「4人」から「1人」に変更することで、いったん効用の足し合わせの問題を我々は考えなくてもよくなった。しかし、今度は別の問題が生じる。我々が図 12.1 において支払意思額の高い順に図を並べることができた理由は、消費者が1人ではなくて4人だったので、特に並べ方に意味はなかったからである。しかし1人ということになると、図 12.1 の x 軸の「2」と書かれたメモリは「2人目」ではなく「2個目」と解釈されなければならない。すると、この図は「多く買うほど支払意思額が下がる」ことを仮定していることになるが、これは**需要法則**である。これは第6章で議論したこととミスマッチを起こしていないだろうか？
- (4) この難解な問題をいったん棚上げするために、需要法則を認めてしまうことにしよう。これで問題は解決しただろうか？ 答えは残念ながら否である。というのも、支払意思額の解釈が我々の考えてきた消費者理論の枠組とまったく相容れないからである。この点を明確にするために、たとえば次のような状況を考えてみよう。図 12.1 の状況下で、支払意思額 a_1 を持つ消費者が不意の事故等によって急な出費を強いられ、これによって a_1 が $c > 0$ だけ下がったとする。このとき、 $a_1 - p^* > c$ ならば、相変わらずこの消費者は商品を購入するので、購買量は変わらない。したがってこの市場では、前と変わらない価格 p^* の下で、商品が2個取引されることになる。しかし、結果として得られる消費者余剰の値は c だけ減少することになる。これはなぜだろうか？ この市場において、取引価格も、取引量も、どちらも変わっていないのだから、消費者の満足感も変わらないはずである。にもかかわらず、なぜ満足感が減ってしまったかのように記述されるのであろうか？

我々が図 12.1 やそれを発展させた図 12.2 で経済を議論する場合、これらの問題に対して、最低限なんらかの解答が得られなければならない。この章ではこの問題にアプローチするのだが、その前にひとつだけ補足をしておこう。というのも、書籍で議論した状況では(3)と(4)の問題が完全に解決されているのである。我々は書籍においてすべての消費者が準線形効用 $u_i(x_1, x_2) = v_i(x_1) + x_2$ を持っていると仮定し、そこから第一財の需要関数

$$f_1(p, 1, m) = (v_i')^{-1}(p) \quad (1)$$

を導出した。この需要関数は所得 m に依存しておらず、したがって**所得効果がない**。だから、急な出費を強いられた消費者の支払意思額は変わらないのである。これだけで、(4)で議論した問題は解決する。そして、 v_i が狭義凹関数であれば v_i' は減少関数であり、よって需要法則が成り立ち、(3)の問題も解決する。実を言うと(1)と(2)の問題も解決でき

るのだが、その議論は先送りする。したがって、たしかに準線形効用の仮定は消費者余剰にまつわる問題をすべて解決しているように見える。

だが、上の (4) で議論した「急な出費が必要になったから支払意思額が下がる」というのは、我々から見て普通にリアリティを持つ状況だったので、それが禁止されていることに対して若干の疑問を持つ読者もいるかもしれない。これについては、実は消費集合の形 $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ が意味を持っている。第二財を貨幣と解釈した場合、 x_2 をいくらでも負の値に持てるということは、実際にはいくらでも借金ができると仮定していることになる。これに加えて、その Ω の全域で第二財の限界効用 $\frac{\partial u_i}{\partial x_2}$ が一定であるという仮定は、借金が増えることによって将来負担が増すようなことも特にないということの意味する。このような状況では、「急な出費が必要になったから支払意思額が下がる」ということは、あまり起こりそうにない。その出費の分の借金をしてしまえばいいからである。

逆に言えば、 $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ としてその上の準線形効用を持つ個人を考えるということは、かなり非現実的な状況を扱っていることになる。この問題は深刻であるが、少なくともこの考察から、「なぜ Ω の仮定が必要だったのか」という、本章冒頭で提起した疑問には解答が与えられる。実際、もし通常の消費者理論のように $\Omega = \mathbb{R}_+^2$ であったとすれば、「もっと払いたいが金がない」という状況が発生してしまうため、準線形効用を持つにもかかわらず、所得効果が生じてしまうのである*1。

12.2 改善された定義：基準財余剰

この考え方に対して、余剰の定義そのものを抜本的に変えたのが Henderson (1941) である。彼は、支払意思という考え方を通常のミクロ経済学の理論に持ち込み、部分均衡ではなく一般均衡の枠組みにおいて、幅広く余剰分析を行うことを可能とする基盤を生み出した。彼の考える余剰は上のような需要の階段を経由せず、消費者余剰は個人の範囲で完結した形で定義される。

いま、 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ の状況を考える。第 n 財は**価値尺度財**とし、貨幣のようなものであると解釈することにする。また、この消費者の選好は弱順序 \succeq によって表現されているとする。以降、ベクトル $x \in \Omega$ を (\tilde{x}, x_n) と分解するような表記をする。もし $x \in \Omega$ ならば、 $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ である。

ここで、消費者の手持ちの財ベクトルが x から y へと変化した場合を考えよう。このとき、消費者の支払意思額 WI を、

$$WI(x, y) = \sup\{c \in \mathbb{R} \mid (\tilde{y}, x_n - c) \in \Omega, (\tilde{y}, x_n - c) \succeq (\tilde{x}, x_n)\}$$

*1 理論的には、ラグランジュ未定乗数法の解が第2章の例のように負の x_2 を指定する場合、その点が選べないため、(1) 式も成り立たなくなる。

として定義する。これを簡単に説明するために、いま $n = 2$ で、かつ $y_1 > x_1$ であるとしよう。消費者は x_1 から y_1 に第一財の量を増やすに当たって、第二財をどのくらい減らすことまでならば同意できるか、というその限度額が WI の値である。一方で、実際の支払額は $x_2 - y_2$ である。したがって、「支払意思額 - 実際の支払額」は以下の値になる。

$$CS(x, y) = WI(x, y) - (x_2 - y_2).$$

これをこの文脈における消費者余剰である。面積で定義された消費者余剰と区別するために、増澤 (2025) に従い、本章ではこの値を**基準財余剰**と呼ぶことにしよう。

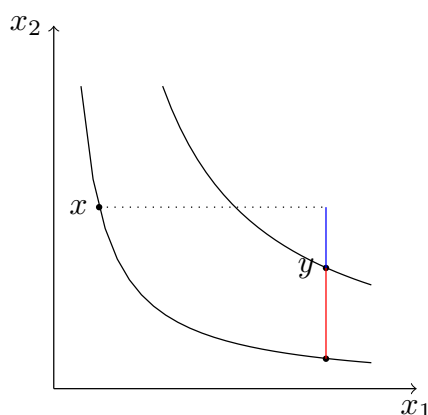


図 12.3 基準財余剰の考え方

図 12.3 がこの考え方を表している。図の中にある二つの曲線はそれぞれの点を通る無差別曲線である。支払用意額 $WI(x, y)$ は青い線と赤い線の長さの合計と一致する。一方で、実際の支払額は青い線の長さである。したがって基準財余剰は赤い線の長さが該当することになる。つまり、この場合の余剰の値は、無差別曲線の距離を価値尺度財の数量で測るものである。

ここで、 \succsim は第 n 財に関して強く単調である（つまり、 $a > b$ ならば $(\tilde{x}, a) \succ (\tilde{x}, b)$ である）と仮定しよう。このとき、 $(\tilde{y}, z) \in \Omega$ かつ $(\tilde{y}, z) \succsim x$ となる z がひとつでもあれば、 $WI(x, y)$ は定義できる。そして下限の定義から、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $WI(x, y) - \varepsilon < z \leq WI(x, y)$ となる z で

$$(\tilde{y}, x_n - z) \in \Omega, (\tilde{y}, x_n - z) \succsim x$$

となるものが存在しなければならない。ここから容易に以下の結果を得る。

命題 12.1. \succsim は第 n 財に関して強く単調であると仮定する。このとき、もし $WI(x, y)$ が定義できるならば、 $CS(x, y) > 0$ は $y \succ x$ を含意し、逆に $CS(x, y) < 0$ ならば $x \succ y$ を含意する。

証明. 実際、もし $CS(x, y) > 0$ であるならば、

$$WI(x, y) > x_n - y_n$$

であるから、これを整理して

$$y_n > x_n - WI(x, y)$$

である。したがって、 $\varepsilon = WI(x, y) - (x_n - y_n) > 0$ に対して上で議論した z が存在する。すなわち、 z は $x_n - y_n < z \leq WI(x, y)$ を満たしつつ、

$$(\tilde{y}, x_n - z) \in \Omega, (\tilde{y}, x_n - z) \succsim x$$

となっていなければならない。仮定から $y_n > x_n - z$ なので、 \succsim についての仮定から

$$y \succ (\tilde{y}, x_n - z) \succsim x$$

となって、たしかに $y \succ x$ が得られる。

逆に $CS(x, y) < 0$ であるとしよう。このとき、上と同じ計算から

$$y_n < x_n - WI(x, y)$$

を得るため、支払意思額の定義から $x \succ y$ である。以上で証明が完成した。 ■

命題 12.2. 命題 12.1 の仮定に加えて

$$(\tilde{y}, x_n - WI(x, y)) \in \Omega, (\tilde{y}, x_n - WI(x, y)) \sim x \quad (2)$$

が常に成り立つことを仮定する。このとき、 $CS(x, y) = 0$ であるならば、 $x \sim y$ である*2。

証明. 実際このとき、 $CS(x, y) = 0$ ならば $y_n = x_n - WI(x, y)$ なので、(2) から結果を得る。 ■

ここで重要なのは (2) 式が成り立つ状況ではなく、成り立たない状況を正確に理解することである。状況をより理解しやすくするために、図解を示しておく。

図 12.4 において、もし $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ であれば、青い線と赤い線と緑の線の長さの合計が支払準備額であり、実際の支払額は青い線の長さなので、赤い線と緑の線の長さの合計が基準財余剰となる。この場合、緑の線の下端はたしかに x と無差別である。しかし $\Omega = \mathbb{R}_+^2$ である場合には、第二財を 0 以下にできないため、支払準備額は赤い線と青い線

*2 ここで、

$$x_n - WI(x, y) = y_n - CS(x, y)$$

であることに注意。したがって (2) を仮定することは $x \sim y - CS(x, y)e_n$ を常に仮定していることと同値である (e_n は第 n 単位ベクトル)。この形の条件は今後もしばしば現れる。

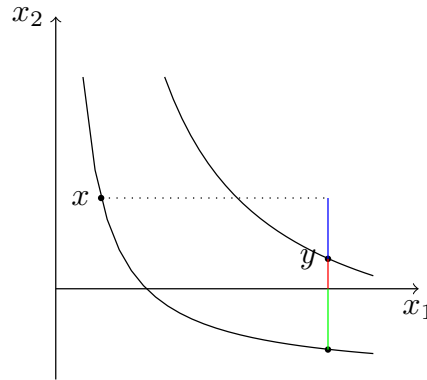


図 12.4 有効に定義されない基準財余剰

の長さの合計にしかならず、したがって基準財余剰も赤い線の長さにしかならない。この場合、赤い線の下端に当たる点 $(y_1, 0)$ は x と無差別にならないため、(2) 式が成り立たない。

具体的な数値例を示しておこう。たとえば $\Omega = \mathbb{R}_+^2$ で選好関係 \succsim が $u(x) = \sqrt{x_1} + x_2$ で表現されるとき、 $x = (1, 1)$ で $y = (5, 0)$ とすれば、0 よりも第二財を減らすことはできないため、定義からただちに

$$WI(x, y) = 1 = x_2 - y_2, \quad CS(x, y) = 0$$

を得る。しかし、 $u(x) = 2 < \sqrt{5} = u(y)$ である。このように、たとえ効用関数が準線形であったとしても、 Ω の仮定が追加されない限り、(2) 式は成立しない。

この、(2) 式が成立するとは限らないという問題はかなり深刻で、今後の議論に強い影響を及ぼす。そこで我々は以下の用語法を導入することにしよう。基準財余剰 $CS(x, y)$ が有効に定義されるとは、すべての $x, y \in \Omega$ に対して $WI(x, y)$ が定義され、かつ (2) 式が成り立つことを言う^{*3}。

実を言うと、基準財余剰が有効に定義されるかどうかは、 Ω の仮定と密接に関係している。これは以下の命題を見ればわかる。

命題 12.3. $n \geq 2$ とし、 $\Omega = \mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R}$ で、 \succsim を表現する準線形形式の効用関数

$$u(x) = v(\tilde{x}) + x_n$$

が存在すると仮定する。このとき、基準財余剰は有効に定義される。

^{*3} この仮定は「 Ω と \succsim のペア」に対する仮定であることに注意する。なお、増澤 (2025) においてこの仮定は「代替可能性」と呼ばれている。本稿では、代替という言葉が持つ意味が多様すぎることを鑑みて、あえて別の用語を当てることにした。

証明. 実際、

$$c = u(y) - u(x)$$

と定義すれば、

$$u(\tilde{y}, y_n - c) = u(y) - c = u(x)$$

となる。ここからただちに $c = WI(x, y)$ および (2) 式を得る。以上で証明が完成した。 ■

余剰分析を行う際に $\Omega = \mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R}$ という仮定がなされるのは、基準財余剰が有効に定義されることを保証するためである。しかし逆に言えば、「基準財余剰が有効に定義される」ならば、 Ω について上の形状にこだわる必要は必ずしもない。これは後の定理 12.2 を見ると明らかになる。

これから考える問題を理解しやすくするために、例をひとつ見てみよう。いま、 $\Omega = \mathbb{R}_+^2$ とし、 $u(x) = x_1 x_2$ とする。この場合には基準財余剰は有効に定義されることを容易に確認できる。そこで、 $x = (1, 4), y = (2, 3), z = (8, 1)$ としよう。簡単な計算により、

$$u(x) = u(y_1, c) \Leftrightarrow 4 = 2c \Leftrightarrow c = 2$$

となるため、

$$CS(x, y) = 3 - 2 = 1$$

が得られる。同様に、

$$u(x) = u(z_1, c) \Leftrightarrow 4 = 8c \Leftrightarrow c = 0.5$$

となるため、

$$CS(x, z) = 0.5$$

が得られる。したがって $CS(x, y) > CS(x, z)$ であるが、一方で $u(z) = 8 > 6 = u(y)$ となる。したがって、関数

$$y \mapsto CS(x, y)$$

は u とは異なる順序を与える。

これは驚くべき事実である。命題 12.1 や命題 12.2 を考えると、 $CS(x, y) > 0$ と $u(x) > u(y)$ は同値である。にもかかわらず、 $CS(x, y)$ の大きさは y の良さを表現しているとは限らないのである。この問題を解消するためにはどういう仮定が追加的に必要であろうか。これは 12.4 節で扱われる、本章の大きなテーマの一つである。

12.3 二つの消費者余剰の関係

前節の例で提起された問題は大きいですが、いったんその問題は後回しにする。我々は消費者余剰について、需要曲線と価格線との間の図形の面積（以下、「面積余剰」と呼ぶ）と、支払意思額 $WI(x, y)$ を用いた「基準財余剰」の二つを定義した。しかし、この二つの関係はまだ定かではない。そこでこれについて考えてみよう。とはいえ、そのままやるとこの二つは単に一致しないだけなので、若干の発想の飛躍が必要になる。

そのために重要になるのが、12.1 節で議論した支払意思額の解釈の問題である。いま、急な出費がかさんでしまったため、この消費者が可能な支払が減少してしまったと仮定しよう。すると支払意思額も減少せざるを得なくなることが容易に予想される。これによって消費者余剰も減ることになるが、これは余剰の解釈上不都合だというのが議論の趣旨であった。明らかに問題は所得効果であるから、所得効果がないモデルを考えればこの問題は解決するように見える。12.1 節で言及したのは準線形効用のケースであったが、本節では発想を転換し、代替効果だけを考えてみよう。この場合、扱うのは需要曲線ではなく、**補償需要曲線**ということになる。

必要な技術を思い返すために、第 4 章で議論したことを復習してみよう。簡単のために $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は凸集合であり、消費者の選好 \succsim は連続、単調、強く凸であるとし、以下の支出最小化問題

$$\begin{aligned} \min \quad & p \cdot y \\ \text{subject to.} \quad & y \in \Omega, \\ & y \succsim x \end{aligned} \tag{3}$$

を考える。 $p \in \mathbb{R}_{++}^n$ に対してこの問題の解 $h^x(p)$ を与える関数 h^x が補償需要関数であり、また問題の値 $E^x(p) = p \cdot h^x(p)$ を与える関数が**支出関数**であった。

第 4 章では $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ か $\Omega = \mathbb{R}_{++}^n$ の場合のみを扱ったので、本章と若干仮定が異なるが、この問題はいったん先送りする*4。まず f^\succsim を通常の需要関数としたとき、双対原理（定理 4.4）から

$$h^x(p) = f^\succsim(p, E^x(p)) \tag{4}$$

が成り立ち、またシェパードの補題（定理 4.6）から、

$$\nabla E^x(p) = h^x(p) \tag{5}$$

が成り立つことになる。 E^x は凹関数であるから、次の関数 $c \mapsto E^x(p + ce_i)$ も凹関数で

*4 後に補論で、第 4 章の定理群が本章の仮定の下でも成り立つことを厳密に確認する。

あり、 $h_i^x(p + ce_i)$ はこの関数の導関数であるから、非増加でなければならない。したがって h_i^x は p_i に関して非増加であるという結果を得ることになる。

ここで $\Omega = \mathbb{R}_+$ もしくは $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ の場合を考え、 $x, y \in \mathbb{R}_{++}^2$ とする。 \succsim を表現する連続、増加的、狭義準凹な効用関数 u が存在するとし、さらに基準財余剰 $CS(x, y)$ は有効に定義されると仮定する。このとき、 x に対して $z_1 = y_1$ かつ $z_2 = x_2 - WI(x, y)$ と定義すると、(2) 式から $x \sim z$ である。一方、 x の上部等高線集合 $U(x) = \{v \in \Omega | u(v) \geq u(x)\}$ は u が狭義準凹であることから凸集合にならなければならない。そして単調性から x, z はこの集合の端に位置するので、凸集合の支持超平面定理からある $p, q \in \mathbb{R}_{++}^2$ が存在して、 $m = p \cdot x$ と $w = q \cdot z$ に対して

$$x = f^{\sim}(p, m), \quad z = f^{\sim}(q, w)$$

とならなければならない。ここからただちに $E^x(p) = m$ を得る。一方で、

$$w = q \cdot z = \min\{q \cdot v | v \succsim x\} = E^x(q)$$

であるため、(4) 式より

$$x = h^x(p), \quad z = h^x(q)$$

を得ることになる。しかし $y_1 = z_1$ なのであるから、

$$x_1 = h_1^x(p), \quad y_1 = h_1^x(q)$$

となることがわかった。

ここで、必要ならば p を $\frac{1}{p_2}p$ と取り替え、 q を $\frac{1}{q_2}q$ と取り替えることで、 $p_2 = q_2 = 1$ を仮定しよう。補償需要曲線 $D^x(r)$ を

$$D^x(r) = h_1^x(r, 1) \tag{6}$$

と定義すると、 $x_1 = D^x(p_1)$ であり、 $y_1 = D^x(q_1)$ である。

図 12.5 がこの状況を表している。ここでは $y_1 > x_1$ を追加的に仮定している。 h_1^x は p_1 について非増加であり、よって $p_1 \geq q_1$ であるが、 $p_1 = q_1$ だとすれば狭義準凹性の帰結である「効用最大化問題の解はただひとつに定まる」に違反してしまう（つまり、 $x \neq z$ なのに $x, z \in f^u(p_1, 1, m)$ となる）ため、これはあり得ず、よって $p_1 > q_1$ でなければならない。そこで、図 12.5 の青い図形の面積と赤い図形の面積の合計は

$$\int_{q_1}^{p_1} D^x(r) dr = \int_{q_1}^{p_1} \frac{\partial E^x}{\partial p_1}(r, 1) dr = E^x(p) - E^x(q)$$

となる。一方で我々はすでに

$$E^x(p) = m = p \cdot x, \quad E^x(q) = w = q \cdot z$$

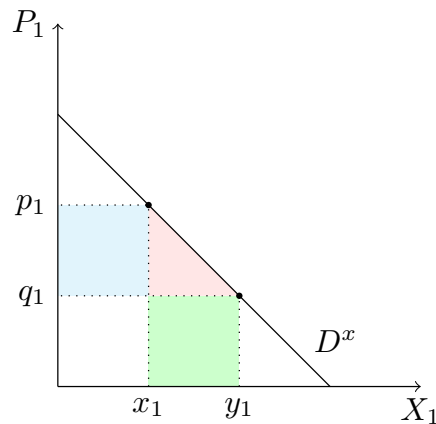


図 12.5 補償需要曲線

を示していたため、

$$\begin{aligned} \int_{q_1}^{p_1} D^x(r) dr &= p_1 x_1 + x_2 - q_1 y_1 - z_2 \\ &= (p_1 - q_1) x_1 + x_2 - z_2 - q_1 (y_1 - x_1) \end{aligned}$$

という結果を得るため、赤い図形の面積は

$$x_2 - z_2 - q_1 (y_1 - x_1) \quad (7)$$

で与えられる。この式は驚くべき意味を持っている。なぜなら、まず定義からただちに、 $WI(x, y) = x_2 - z_2$ である。一方で、緑色の図形の面積は $q_1 (y_1 - x_1)$ である。したがって (7) 式が意味していることは、 $WI(x, y)$ の値が赤い図形と緑色の図形の面積の合計と一致するということなのである。12.1 節で棒グラフで議論したときと同じように、支払意思額は、ただし需要曲線ではなく、補償需要曲線の下側面積によって一般に表すことができるのであった。

では、ここで $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ で、かつ u が準線形効用 $v(x_1) + x_2$ の場合を考えてみよう。この場合、ラグランジュの一階条件から容易に $D^x(r) = (v')^{-1}(r)$ を得ることができる。したがって D^x は x には依存せず、さらには補償需要曲線と需要曲線の差は消滅する。つまり、上の D^x は通常の需要曲線

$$D(r) = f_1^u(r, 1, m)$$

と同一である。特に、 $v'(y_1) = q_1$ であることから、 $c = q \cdot y$ に対して

$$y = f^u(q, c)$$

が成り立つ。したがって第 1 財の消費を x_1 から y_1 に増やすことによる出費額は

$$q_1 (y_1 - x_1)$$

であり、これは緑色の図形の面積と一致する。支払意思額は赤い図形と緑色の図形の面積の合計であったのだから、赤い図形の面積こそが $CS(x, y)$ と一致することになる。

つまり、準線形効用を持つ消費者にとっての面積余剰は、通常取引を経由して得られた遷移である限りにおいて、基準財余剰と完全に一致するのである。これを要約して「面積余剰＝基準財余剰」と捉えれば、たしかに準線形効用を持つ消費者の世界においては、面積余剰の形で消費者余剰を計算することには意味がある。

なお、上の議論において「通常取引を経由して得られた遷移」という但し書きがついていることには注意が必要である。実際、上の計算では $y = f^u(q, c)$ を用いて議論しているため、これが成り立たない場合には準線形効用を持つ消費者に対してであっても面積余剰と基準財余剰は一致しない。たとえば、 x から y への遷移が政府から強要されたものである場合には、この議論は崩れてしまうことになる。

12.4 余剰の基本定理

余剰分析については、多くのミクロ経済学系のテキストで、準線形効用を持つ場合には多くの問題が解決することを紹介されている。しかし、これは実のところ必要十分条件として描かれるべきものである。実のところ、準線形効用を強い仮定だと見なした論者は多く、そのため Samuelson (1947) などは、準線形効用でない場合でも扱える余剰分析を大きく取り扱っている。しかしそのような議論が意味を持つためには、「準線形効用ならば問題が解決する」ことではなく、「準線形効用でない場合には絶対に問題が起こる」ことの方が重要なのである。本節ではこの問題を解決する。

まず、用語を一つ追加する。 $L_n = \{ce_n | c \geq 0\}$ とし、 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は、条件 $\Omega = \Omega + L_n$ を満たしていると仮定する。ここで、 \succsim が無差別曲線平行性を満たすとは、任意の $x, y \in \Omega$ と $c \geq 0$ に対して、 $x \sim y$ と $x + ce_n \sim y + ce_n$ が同値になることを言う。

予備的な結果として以下を示す。

命題 12.4. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は条件 $\Omega = \Omega + L_n$ を満たすとする。もし \succsim が準線形効用 $u(x) = v(\tilde{x}) + x_n$ によって表現されるならば、 \succsim は無差別曲線平行性を満たす。

証明. \succsim が準線形効用 $u(x) = v(\tilde{x}) + x_n$ で表現されるとする。任意の $x, y \in \Omega$ と $c \geq 0$ を取ると、 $x + ce_n, y + ce_n \in \Omega + L_n = \Omega$ となり、かつ

$$x \sim y \Leftrightarrow v(\tilde{x}) + x_n = v(\tilde{y}) + y_n \Leftrightarrow v(\tilde{x}) + x_n + c = v(\tilde{y}) + y_n + c \Leftrightarrow x + ce_n \sim y + ce_n$$

となるため、 \succsim は無差別曲線平行性を満たす。以上で証明が完成した。 ■

定理 12.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は条件 $\Omega = \Omega + L_n$ を満たし、 \succsim は第 n 財について強く単調で、基準財余剰は有効に定義されるとする。このとき、以下の 7 条件は同値である。

- 1) \succsim は準線形効用 $u(x) = v(\hat{x}) + x_n$ によって表現される。
- 2) \succsim は無差別曲線平行性を満たす。
- 3) 基準財余剰 $CS(x, y)$ は加法性条件

$$CS(x, y) + CS(y, z) = CS(x, z) \quad (8)$$

を満たす。

- 4) ある実数値関数 $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して、

$$CS(x, y) = \varphi(y) - \varphi(x) \quad (9)$$

を満たす。

- 5) 基準財余剰は反対称性条件

$$CS(x, y) = -CS(y, x) \quad (10)$$

を満たす。

- 6) すべての $x^* \in \Omega$ に対して、関数 $v(x) \equiv CS(x^*, x)$ は \succsim を表現する。
- 7) なんらかの $x^* \in \Omega$ に対して、関数 $v(x) \equiv CS(x^*, x)$ は \succsim を表現する。

証明. 1) を仮定すれば、命題 12.4 によって 2) が成り立つ。

2) を仮定する。 $x, y, z \in \Omega$ としよう。まず、 $CS(x, y) \geq 0$ の場合を扱う。このとき、

$$y^* = y - CS(x, y)e_n, \quad z^* = z - CS(y, z)e_n, \quad z^+ = z - CS(x, z)e_n$$

とすれば、(2) 式から $z^+ \sim x \sim y^*$ であり、かつ $z^* \sim y$ である。無差別曲線平行性を x, y^* に適用すれば、 $x^* = x + CS(x, y)e_n$ としたとき、 $x^* \sim y \sim z^*$ である。同様に、 $z' = z^+ + CS(x, y)e_n$ とすれば $z' \sim y$ である。 \succsim は第 n 財について強く単調であるから、 $z' = z^*$ でなければならず、結果として

$$z_n - C(x, z) + C(x, y) = z_n - C(y, z)$$

となるため、整理すれば (8) 式を得る。

$CS(x, y) < 0$ のときには、 $x^* = x - CS(y, x)e_n$ とすると (2) 式から $x^* \sim y$ であるが、一方で $x = x^* + CS(y, x)e_n \sim y - CS(x, y)e_n$ であり、よって $CS(y, x) = -CS(x, y)$ でなければならない。 $CS(y, x) > 0$ なのですでに得られた結果から

$$CS(x, z) - CS(x, y) = CS(y, x) + CS(x, z) = CS(y, z)$$

となるが、これを整理すればやはり (8) 式を得る。こうして 3) が示せた。

3) を仮定する。 $x^* \in \Omega$ を一つ取って固定し、

$$\varphi(x) = CS(x^*, x)$$

と定義する。基準財余剰は有効に定義されているという仮定から、 φ は Ω 全体で定義されている。さらに (8) 式から

$$CS(x^*, x) + CS(x, y) = CS(x^*, y)$$

であるため、

$$CS(x, y) = \varphi(y) - \varphi(x)$$

となって (9) 式が導かれる。よって 4) が成り立つ。

4) を仮定する。このとき、

$$CS(x, y) = \varphi(y) - \varphi(x) = -[\varphi(x) - \varphi(y)] = -CS(y, x)$$

となるため、(10) が得られる。よって 5) が成り立つ。

5) を仮定する。 $x^* \in \Omega$ を任意に取る。 $x, y \in \Omega$ のとき $z = y - CS(x, y)e_n$ とすると、(2) 式より、 $z \sim x$ でなければならない。ここで (2) 式と (10) 式の組み合わせから、

$$x \sim x^* - CS(x, x^*)e_n = x^* + CS(x^*, x)e_n$$

が得られる。同様に

$$y \sim x^* - CS(y, x^*)e_n = x^* + CS(x^*, y)e_n$$

となる。 \succsim は第 n 財について単調だから、

$$x^* + CS(x^*, x)e_n \succsim x^* + CS(x^*, y)e_n \Leftrightarrow CS(x^*, x) \geq CS(x^*, y)$$

でなければならず、これらをつなげることで

$$x \succsim y \Leftrightarrow CS(x^*, x) \geq CS(x^*, y)$$

を得る。よって $v(x) = CS(x^*, x)$ と定義すれば、 v は \succsim を表現し、6) が成り立つ。

6) が成り立てば 7) が成り立つのは当然である。

最後に、7) を仮定する。対応する $x^* \in \Omega$ を取り、 $v(x) = CS(x^*, x)$ と定義する。このとき、任意の $x \in \Omega$ と、 $x + ce_n \in \Omega$ となる $c \in \mathbb{R}$ に対し、

$$WI(x^*, x + ce_n) = WI(x^*, x)$$

となる。そこで、なんらかの $x_n \in \mathbb{R}$ に対して $(\tilde{x}, x_n) \in \Omega$ となるような任意の $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対して、

$$w(\tilde{x}) = WI(x^*, x) - x_n^*$$

と定義する。この w の定義が x_n に依存していないのは上で述べた通りである。さらに、任意の $x \in \Omega$ に対して、

$$v(x) = CS(x^*, x) = WI(x^*, x) - x_n^* + x_n = w(\tilde{x}) + x_n$$

となるから、たしかに $v(x)$ は準線形である。したがって、 \succsim は準線形効用で表現されるので、1) が得られた。以上から我々は

$$1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5) \Rightarrow 6) \Rightarrow 7) \Rightarrow 1)$$

を示したので、これらすべては同値である。以上で証明が完成した。 ■

この定理の証明において、基準財余剰が有効に定義されていることは重要である。実際、(2) 式を何度も用いていることから、これは明らかである。しかし、基準財余剰が有効に定義されていないときにはなにが起こるだろうか？ これを示したのが以下の定理である。

定理 12.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は条件 $\Omega = \Omega + L_n$ を満たし、 \succsim は第 n 財について強く単調であるとする。さらに、 $L_n(x) \equiv \{c \in \mathbb{R} | x + ce_n \in \Omega\}$ と定義したとき、すべての $x \in \Omega$ について $L_n(x)$ が開集合であるか、あるいは逆にすべての $x \in \Omega$ について $L_n(x)$ が閉集合であるかのどちらかを仮定する*5。このとき、以下の 2 条件は同値である。

- I) \succsim は無差別曲線平行性を満たし、かつ基準財余剰は有効に定義される。
- II) 任意の $x, y \in \Omega$ に対して基準財余剰は定義され、かつすべての $x \in \Omega$ に対して、 $v_x(y) \equiv CS(x, y)$ は \succsim を表現する。

証明. I) を仮定すれば定理 12.1 の前提条件が満たされており、かつ定理 12.1 の 2) が成り立っているので、6) も成り立っており、よって II) が成り立つ。

逆に、II) を仮定しよう。このとき、 $x, y \in \Omega$ かつ $c \geq 0$ であれば、 $x + ce_n, y + ce_n \in \Omega$ である。そして、

$$x \sim y \Leftrightarrow 0 = v_x(x) = v_x(y) \Leftrightarrow v_x(x + ce_n) = c = v_x(y + ce_n) \Leftrightarrow x + ce_n \sim y + ce_n$$

となって、 \succsim は無差別曲線平行性を満たす。

残った問題は、基準財余剰が有効に定義されていることを示すことだけである。そこで $x, y \in \Omega$ を任意に取る。ここで、 $y + ce_n \in \Omega$ となるどんな $c \in \mathbb{R}$ に対しても、 $CS(x, y + ce_n) = CS(x, y) + c$ であることに注意する。したがって、もし $y - CS(x, y)e_n \in \Omega$ であれば

$$v_x(y - CS(x, y)e_n) = v_x(y) - CS(x, y) = CS(x, y) - CS(x, y) = 0 = v_x(x)$$

となるため、(2) 式が成り立つ。よって、 $y - CS(x, y)e_n \in \Omega$ が証明の目標となる。

*5 当然ながら、 Ω が閉なら $L_n(x)$ は閉で、 Ω が開なら $L_n(x)$ は開である。よって、この仮定は Ω が開あるいは閉である場合を含む。

もし $x \succ y$ ならば $CS(x, y) \leq 0$ であり、したがって $y - CS(x, y)e_n \in \Omega$ である。よって、 $y \succ x$ であるときだけを考えればよい。定義より

$$CS(x, y) = WI(x, y) - (x_n - y_n)$$

であることから、 $c < CS(x, y)$ であれば $y - ce_n \in \Omega$ である。 $L_n(y)$ が閉集合であれば $y - CS(x, y)e_n \in \Omega$ となり、これで証明が完成する。 $L_n(y)$ が開集合である場合、仮に $y - CS(x, y)e_n \notin \Omega$ であったとしよう。 $y \succ x$ であるから、 $v_y(x) < v_y(y) = 0$ となり、したがって $CS(y, x) < 0$ である。これは $x^* \equiv x - CS(y, x)e_n \in \Omega$ を意味する。すでに示したように、このとき $x^* \sim y$ である。もし $x^* - ce_n, y - ce_n \in \Omega$ であれば、無差別曲線平行性から $x^* - ce_n \sim y - ce_n$ となる。そこで、

$$c^* = \sup\{c \in \mathbb{R} \mid y - ce_n \in \Omega\}$$

としよう。仮定から $c^* \leq CS(x, y)$ であり、また $L_n(y)$ が開であるから、 $y - c^*e_n \notin \Omega$ である。もし $c^* > -CS(y, x)$ であるならば、無差別曲線平行性から $x \sim y + CS(y, x)e_n$ となるため、 $CS(x, y) = -CS(y, x)$ となるが、これは仮定に矛盾する。したがって $c^* \leq -CS(y, x)$ であり、よって $x^* - c^*e_n \geq x$ であるから、 $x^* - c^*e_n \in \Omega$ となる。 $L_n(x^*)$ は開集合なので、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、 $0 < c < c^* + \varepsilon$ となる任意の $c > 0$ に対して $x^* - ce_n \in \Omega$ となる。このとき、 $c^* < c < c^* + \varepsilon$ であれば定義から

$$WI(x^* - ce_n, y) = WI(x^* - c^*e_n, y)$$

となるため、

$$c = v_{x^* - ce_n}(x^*) = v_{x^* - ce_n}(y) = v_{x^* - c^*e_n}(y)$$

となるが、右辺は c に依存しない定数であるため矛盾が生ずる。したがってこれはあり得ず、 $y - CS(x, y)e_n \in \Omega$ でなければならない。以上で証明が完成した。 ■

我々が基準財余剰に期待する条件は定理 12.1 の 6) の条件である。つまり、「基準財余剰が大きいほど変化後がよい状態である」ということを保証したい。しかし定理 12.2 は、そのために「無差別曲線平行性」と、「基準財余剰が有効に定義されていること」が必要であることを示している。おおざっぱに述べれば前者は「効用関数は準線形に取れる」ことを意味しており、後者は Ω が都合のよい形をしていることを意味している。特に、 $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ であれば、基準財余剰が有効に定義されることは命題 12.3 ですでに示した通りである。したがって、余剰分析の正当化のためには「準線形効用で選好が表現され、かつ Ω が $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ のように都合がいい形をしている」という、二つの仮定が必要であることになる。ただし、 Ω はここに書かれている集合でなくともよい。たとえば、ある基準点 x^* に対して $u(x) \geq u(x^*)$ を満たすすべての $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ の集合に Ω を制限したとしても、その範囲では上の定理が成り立つことになる。

一方、 $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ という典型的な場合においては、準線形効用を仮定している限り (2) 式が成り立たない x, y のペアが存在する。定理 12.2 から、定理 12.1 の 6) が成り立たないことが導かれる。よってこの場合、**基準財余剰を効用の代理変数として使用することは絶対にできない**のである。このように、消費集合の仮定は余剰理論において大きな影響を与える。特に、いくつかの文献で扱われているような「初期所得が十分に大きいと仮定する」ことではこの問題は解決しないという点には、十分な注意が必要である。

12.5 集計された消費と選好

前節までで、「消費者余剰」が個人の問題を考える際の基礎付けは完了した。支払意思額の解釈にまつわる問題は解決し、面積余剰と基準財余剰の関係もはっきりした。さらには、基準財余剰が個人の効用の指標として使用可能となるための条件も精査できた。しかし、12.1 節を見返してみるとわかるのだが、余剰を分析するに当たって当初問題となっていたもののうち、(1) と (2) は解決していない。幸い、全員が準線形効用を所持している場合には、経済の総需要関数の値は単に各個人の需要関数の足し合わせであるため、それらの積分である面積余剰の合計値は総需要関数を用いて計算した面積余剰と一致する。これは状況をたいへん見通しよくしてはいるのだが、面積余剰は準線形効用の場合を除いていい性質をほとんど持たない。そこで、ふたたび「準線形効用以外にこの問題は解決できないのか？」という疑問が生ずる。すでに述べたように、準線形効用に加えて基準財余剰が有効に定義されているという仮定はかなり強いものなので、できればこの仮定なしで議論したい。そして、これについてはもう少し柔軟に議論する余地があるのである。本節ではその考え方の基礎についていくつか議論しよう。

まず、基準財余剰の基本性質を確認する。基準財余剰が有効に定義されている場合、命題 12.1 と命題 12.2 から、 $CS(x, y) \geq 0$ と $y \succeq x$ は同値である。これをさらに敷衍して、次の状況を考えよう。いま、個人が N 人いて、それぞれ消費集合 Ω_i とその上の選好関係 \succeq_i を持っているとする。各 Ω_i は $L_n = \{ce_n | c \geq 0\}$ に対して条件 $\Omega_i = \Omega_i + L_n$ を満たし、またすべての個人について基準財余剰は有効に定義されていると仮定しよう。このとき、社会の状態を表す集合を $\bar{\Omega} = \prod_{i=1}^N \Omega_i$ とし、 $\bar{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \bar{\Omega}$ と $\bar{y} = (y_1, \dots, y_N) \in \bar{\Omega}$ に対して

$$CS_0(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^N CS_i(x_i, y_i)$$

と定義しよう。これを社会の基準財余剰とする。ここで、

$$\bar{y} \succeq_K \bar{x} \Leftrightarrow CS_0(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$$

と定義すると、 \succeq_K は $\bar{\Omega}$ 上の二項関係となる。

この \succeq_K を理解するために、まず次の用語を思い出そう。 $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Omega}$ のとき、 \bar{x} が \bar{y} を強パレート改善するとは、すべての $i \in \{1, \dots, N\}$ に対して $x_i \succ_i y_i$ が成り立つことを言う。ここで、第 n 財のみを社会の各個人について動かすことを考えよう。具体的には、

$$K(\bar{y}) = \left\{ \bar{z} \in \Omega \mid \forall i \in \{1, \dots, N\}, \tilde{y}_i = \tilde{z}_i, \text{ and } \sum_{i=1}^N y_{in} = \sum_{i=1}^N z_{in} \right\}$$

と定義する。この集合は、 \bar{y} から第 n 財を再配分してできる $\bar{z} \in \bar{\Omega}$ の集合である。これを用いて、次の命題が示せる。

命題 12.5. 上で与えられた仮定の下で、 $CS_0(\bar{x}, \bar{y}) > 0$ であることと、 $K(\bar{y})$ の中に \bar{x} を強パレート改善するような \bar{z} が存在することは同値である。また、 $CS_0(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ であることと、 $K(\bar{y})$ の中に全員が $x_i \sim_i z_i$ となるような \bar{z} が存在することは同値である。

証明. まず、 $\bar{z} \in K(\bar{y})$ であるとき、 y_i と z_i は第 n 座標だけが異なることに注意する。支払意思額の定義に移動先側の第 n 座標は関係していないので、第 i 消費者の支払意思額を WI_i と書くと、

$$WI_i(x_i, y_i) = WI_i(x_i, z_i)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} CS_i(x_i, z_i) &= WI_i(x_i, z_i) - (x_{in} - z_{in}) \\ &= WI_i(x_i, y_i) - (x_{in} - y_{in}) - (y_{in} - z_{in}) \\ &= CS_i(x_i, y_i) - (y_{in} - z_{in}) \end{aligned}$$

が得られる。これを合計すると、

$$CS_0(\bar{x}, \bar{z}) = CS_0(\bar{x}, \bar{y}) - \sum_{i=1}^N (y_{in} - z_{in}) = CS_0(\bar{x}, \bar{y})$$

となる。特に、 $CS_0(\bar{x}, \bar{y}) > 0$ と $CS_0(\bar{x}, \bar{z}) > 0$ は同値であり、また $CS_0(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ と $CS_0(\bar{x}, \bar{z}) = 0$ も同値である。

ここで、もし $K(\bar{y})$ の中に \bar{x} を強パレート改善する \bar{z} があれば、その \bar{z} については $CS_i(x_i, z_i) > 0$ がどの i に対しても成り立つため、 $CS_0(\bar{x}, \bar{z}) > 0$ が得られる。故に、この場合は $CS_0(\bar{x}, \bar{y}) > 0$ である。逆に $CS_0(\bar{x}, \bar{y}) > 0$ である場合、 $\tilde{z}_i = \tilde{y}_i$ として、 z_{in} をうまく定めて

$$\sum_{i=1}^N z_{in} = \sum_{i=1}^N y_{in}, \quad CS_i(x_i, y_i) - (y_{in} - z_{in}) > 0 \text{ for all } i \in \{1, \dots, N\}$$

が成り立つようにできる。このとき、 $z_{in} > y_{in} - CS_i(x_i, y_i)$ が常に成り立つが、基準財余剰が有効に定義されているという仮定から $y_i - CS_i(x_i, y_i)e_n \in \Omega_i$ であり、したがっ

て $z_i \in \Omega_i + L_n \subset \Omega_i$ が確認できるので、 $\bar{z} \in K(\bar{y})$ である。そして \bar{z} は \bar{x} を強パレート改善する。

次に、 $K(\bar{y})$ の中に $x_i \sim_i z_i$ が全員について成り立つような \bar{z} が存在すれば、 $CS_0(\bar{x}, \bar{z}) = 0$ なので、 $CS_0(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ である。逆に、 $CS_0(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ であれば、上と同様に $\tilde{z}_i = \tilde{y}_i$ とし、 $z_{in} = y_{in} - CS_i(x_i, y_i)$ とすれば、 $CS_i(x_i, z_i) = 0$ がすべての i について成り立つ。この場合も基準財余剰が有効に定義されているという仮定から $z_i \in \Omega_i$ であり、したがって $\bar{z} \in K(\bar{y})$ かつ $x_i \sim_i z_i$ が全員に成り立つ。以上で証明が完成した。 ■

以上の結果より、基準財余剰の合計値を特徴づける順序である \succeq_K は、第 n 財の操作によって事後的にパレートの意味で改善状態に変更できるかどうかを示すものであることがわかった。一般に、 \bar{y} を強パレート改善する $\bar{x}' \in K(\bar{x})$ が存在するとき、 \bar{x} は \bar{y} をカルドア改善と呼ばれる。したがって命題 12.5 は、 \succeq_K がこのカルドア改善と関係する社会の順序を与えることを意味している。この定理が準線形効用の仮定を使用せず導出されたことの意義は大きい。つまり、余剰の和を計算することは、定理 12.1 の仮定が成り立っていようといまいと、常に意味があることなのである。

とはいえ、我々の目標は「平均的な」消費者の分析で経済を分析できるための条件を探ることであったから、この順序をそのまま研究するのは現在の目的にそぐわない。ここでは別の順序を構成しよう。まず、集計された消費者の消費集合としては $\Omega = \sum_{i=1}^N \Omega_i$ を用いる。ここで、 $x \in \Omega$ に対して

$$S(x) = \left\{ \bar{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \bar{\Omega} \mid \sum_{i=1}^N x_i = x \right\}$$

と定義しよう。つまり $S(x)$ は、集計後の消費計画が x になるような消費計画プロファイルの集合である。これを用いて、 Ω 上の二項関係 \succsim_0 を

$$x \succsim_0 y \Leftrightarrow \forall \bar{y} \in S(y), \exists \bar{x} \in S(x), \forall i \in \{1, \dots, N\}, x_i \succsim_i y_i$$

として定義する。つまり、 $x \succsim_0 y$ となることは、合計消費ベクトル y をどのように消費者間で分けたとしても、合計消費ベクトル x をうまく分ければ全員が損しないように分け合うことが可能であることを意味する。

いま、 $\bar{x} \succeq_K \bar{y}$ であるときを考えよう。このとき、 $CS_i(y_i, z_i) \geq 0$ が全員について成り立つような $z \in K(\bar{x})$ が存在するが、このとき $\sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N z_i$ である。さらに、命題 12.1 と命題 12.2 から $z_i \succsim_i y_i$ であり、よって $x = \sum_{i=1}^N x_i$ かつ $y = \sum_{i=1}^N y_i$ とすれば、 $x \succsim_0 y$ である。つまり、 \succeq_K の意味で順序が付く消費計画プロファイル \bar{x}, \bar{y} に対して、その合計消費量 x, y は必ず $x \succsim_0 y$ を満たすという意味で、この集計した二項関係はカルドア型の改善と強い関係を持っている。

もし全員の選好関係 \succsim_i が無差別曲線平行性を満たしているならば、定理 12.1 から $CS_0(\bar{x}, \bar{y})$ はベンサム和と見なせる。このとき、 $x \succsim_0 y$ は、 y をどのように分けたとしても、その効用和よりも大きな効用和を持つ x の分け方が存在することを意味する。したがって、 $\bar{x}^* \in \bar{\Omega}$ を一つ固定し、 x に対して

$$\bar{u}(x) = \sup_{\bar{x} \in S(x)} CS_0(\bar{x}^*, \bar{x})$$

とすれば、いくつかの追加的仮定の下で \bar{u} は \succsim_0 を表現する。よって、準線形効用の世界では \succsim_0 はたしかに集計した選好と言えるようなものになっている。

問題は、人々が準線形効用を持つとは限らない場合に \succsim_0 がよい性質を持っているかどうかである。推移性については、次に見るように、さほど難しくない。

命題 12.6. $x \succsim_0 y$ かつ $y \succsim_0 z$ ならば、 $x \succsim_0 z$ である。

証明. $\bar{z} \in S(z)$ を任意に取る。 $y \succsim_0 z$ であるから、 $\bar{y} \in S(y)$ をうまく取れば、 $y_i \succsim_i z_i$ がすべての $i \in \{1, \dots, N\}$ に対して成り立つようにできる。ところが一方で $x \succsim_0 y$ なので、この \bar{y} に対してある $\bar{x} \in S(x)$ が存在して、 $x_i \succsim_i y_i$ がすべての $i \in \{1, \dots, N\}$ に対して成り立つ。 \succsim_i は推移的であるから $x_i \succsim_i z_i$ であり、よって $x \succsim_0 z$ である。以上で証明が完成した。 ■

よって、 \succsim_0 の推移性は定義から無条件で保証できることがわかった。しかし、完備性についてはこのようにはいかない。 x と y の分け方次第によって x がよくなったり y がよくなったりといった問題が起こることは「シトフスキー・パラドックス」の名で呼ばれる現象をはじめとして古くから多くの実例が知られている。このような問題が起こる場合、この二つに \succsim_0 は順序をつけることができない。

この \succsim_0 の完備性は、需要関数の意外な性質と結びついている。本節の最後にそれを説明しよう。まず、 $B_i \subset \mathbb{R}_{++}^n \times \mathbb{R}$ は非空であり、 f^{\succsim_i} は B_i 上で一価関数として定義されてワルラス法則を満たすと仮定する*6。そして与えられた $M > 0$ に対して

$$W_N(p, M) = \left\{ (m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{R}_{++}^N \mid \forall i \in \{1, \dots, N\}, (p, m_i) \in B_i, \text{ and } \sum_{i=1}^N m_i = M \right\}$$

とし、

$$B_0 = \{(p, M) \in \mathbb{R}_{++}^n \times \mathbb{R} \mid W_N(p, M) \neq \emptyset\}$$

と定義する。これらの記号の下で、以下の命題が成り立つ。

命題 12.7. \succsim_0 は完備で、かつ B_0 は非空であるとする。このとき、 $(p, M) \in B_0$ であれば、どんな $(m_1, \dots, m_N) \in W_N(p, M)$ に対しても $\sum_{i=1}^N f^{\succsim_i}(p, m_i)$ の値は不変である。

*6 ここでは $\Omega \subset \mathbb{R}_+^n$ を仮定していないので、 $m > 0$ も仮定しない。

証明. いま $(m_1, \dots, m_N), (w_1, \dots, w_N) \in W_N(p, M)$ とし、

$$x_i = f^{\tilde{\succ}^i}(p, m_i), y_i = f^{\tilde{\succ}^i}(p, w_i), x = \sum_{i=1}^N x_i, y = \sum_{i=1}^N y_i$$

と定義する。 $x \neq y$ であると仮定する。 $\tilde{\succ}_0$ は完備であるから、一般性を失うことなく $x \tilde{\succ}_0 y$ であるとしてよい。すると $\tilde{\succ}_0$ の定義から、 $\bar{z} \in S(x)$ が存在して、 $z_i \tilde{\succ}_i y_i$ がすべての i について成り立つ。 $\bar{y} = (y_1, \dots, y_N) \notin S(x)$ であるから、 $\bar{y} \neq \bar{z}$ である。ここで、

$$\sum_{i=1}^N p \cdot z_i = p \cdot x = \sum_{i=1}^N p \cdot x_i = \sum_{i=1}^N m_i = M = \sum_{i=1}^N w_i = \sum_{i=1}^N p \cdot y_i$$

となるため、 i をうまく選べば

$$p \cdot z_i \leq p \cdot y_i, z_i \neq y_i$$

となるものを取れる。このとき、 $y_i = f^{\tilde{\succ}^i}(p, w_i)$ かつ $p \cdot z_i \leq w_i$ であるから、 $y_i \succ_i z_i$ となるが、これは \bar{z} の取り方に矛盾する。したがってこれはあり得ず、 $x = y$ でなければならない。以上で証明が完成した。 ■

つまり、集計された消費計画の選好関係 $\tilde{\succ}_0$ が完備であるためには、**総需要は総所得のみに依存し、所得分布から独立**でなければならない。この性質が非常に重要な役割を果たす。実際、いくつかの仮定の下で、この性質は $\tilde{\succ}_0$ の完備性にとって単なる必要条件では無く、必要十分条件になる。次節以降で、それをより詳しく見ていこう。

12.6 間接選好関係と補償変分

命題 12.7 から、 $\tilde{\succ}_0$ の完備性には人々の需要関数に一定の共通した性質が必要であることが必要であることが推察できる。それをより深く議論するためには、需要関数と選好関係を組み合わせて議論する枠組みが必要となる。具体的には、第 4 章で少しだけ議論した間接効用関数のさらなる一般化を議論したい。このために、いったん議論を複数人の集計の問題から、ふたたび一人だけの消費者の問題に戻すことにする。

いま、消費集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とその上の弱順序 $\tilde{\succ}$ が与えられており、 $B \subset \mathbb{R}_{++}^n \times \mathbb{R}$ の各点 $(p, m) \in B$ において需要関数の値 $f^{\tilde{\succ}}(p, m)$ が一価の形で定義されているとする。ここで、 B 上の二項関係 $\tilde{\succ}^*$ を

$$(p, m) \tilde{\succ}^* (q, w) \Leftrightarrow f^{\tilde{\succ}}(p, m) \tilde{\succ} f^{\tilde{\succ}}(q, w) \quad (11)$$

として定義する。この関係 $\tilde{\succ}^*$ が B 上の弱順序になることは容易に確認できる。 $\tilde{\succ}^*$ をこの消費者の**間接選好関係** (indirect preference relation) と呼ぶことにしよう。明らかに、 u が $\tilde{\succ}$ を表現しているとすれば、間接効用関数 $v = u \circ f^{\tilde{\succ}}$ は $\tilde{\succ}^*$ を表現する。

後に我々は、分析に使用する価格の範囲をあらかじめ縮めて、そこでの \succ^* 性質を見る必要がある。そこで、増澤 (2025) に従って以下の用語法を定義しよう。価格の集合 $P \subset \mathbb{R}_{++}^n$ が**既約**であるとは、任意の $p \in P$ に対して、 p の正の定数倍の要素で P に含まれるものは自身以外には存在しないことを言う。

以降、 (p, m) といちいち書くのが煩雑なので、 $B \subset \mathbb{R}_{++}^n \times \mathbb{R}$ の要素を b 等の記号で書くことにする。 $b \in B$ を成分ごとに書くときは $b = (p_b, m_b)$ などの記法を用いる。定義から、 B の要素の最後の座標は所得であり、財空間で議論したときの第 n 財と似た役割が期待できる。そこで $CS(x, y)$ と同様の定義により

$$CV(b, c) = \sup\{a \in \mathbb{R} \mid (p_c, m_c - a) \succ^* (p_b, m_b)\}$$

を定義する。 $CV(b, c)$ は b と c についての所得に関する**補償変分** (compensating variation) と呼ばれる。

見ての通り、 $CV(b, c)$ の定義は $CS(x, y)$ の定義と非常に類似しており、その結果として、ほとんど同じ結果が成り立つ。以下それを一通り示すのだが、まずは基準財余剰のときに用いた「有効に定義される」という用語に該当する言い方を用意しよう。補償変分が**代替可能性**を満たすとは、任意の $b, c \in B$ に対して

$$c - CV(b, c)e_{n+1} \in B, b \sim^* c - CV(b, c)e_{n+1} \quad (12)$$

が成り立つことを言う。

前と同様に記号と用語を用意しておこう。 $L_{n+1} = \{ae_{n+1} \mid a \geq 0\}$ として、 $B = B + L_{n+1}$ を仮定する。このとき、 \succ^* が**無差別曲線平行性**を満たすとは、任意の $b, c \in B$ と $a \geq 0$ に対して $b \sim^* c$ と $b + ae_{n+1} \sim^* c + ae_{n+1}$ が同値になることを言う。また、 \succ^* が**所得に関して強く単調**であるとは、 $m > w$ かつ $(p, m), (p, w) \in B$ ならば必ず $(p, m) \succ^* (p, w)$ となることを言う。これらを元にして、次の定理を示せる。

定理 12.3. $B \subset \mathbb{R}_{++}^n \times \mathbb{R}$ は条件 $B = B + L_{n+1}$ を満たすとし、 B 上の弱順序 \succ^* は所得に関して強く単調で、かつ補償変分は代替可能性を満たすとする。このとき、以下の 7 条件は同値である。

- 1) \succ^* は準線形間接効用 $v(p, m) = v(p) + m$ で表現される。
- 2) \succ^* は無差別曲線平行性を満たす。
- 3) 補償変分 $CV(b, c)$ は加法性条件

$$CV(b, d) = CV(b, c) + CV(c, d) \quad (13)$$

を満たす。

4) ある実数値関数 $\psi : B \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して、

$$CV(b, c) = \psi(c) - \psi(b) \quad (14)$$

を満たす。

5) 補償変分は反対称性条件*⁷

$$CV(b, c) = -CV(c, b) \quad (15)$$

を満たす。

6) すべての $b^* \in B$ に対して、関数 $v(b) = CV(b^*, b)$ は \succ^* を表現する。

7) ある $b^* \in B$ に対して、関数 $v(b) = CV(b^*, b)$ は \succ^* を表現する。

証明. この定理の主張は定理 12.1 と同じであり、かつ定理 12.1 の Ω についての条件と \succ についての条件を今回の B と \succ^* が満たしている。そして定理 12.1 の CS と今回の定理の CV は形式的に同じ定義であるため、それぞれ記号を置き換えることで、定理 12.1 からただちにこの定理が従う。 ■

12.7 代表的消費者の存在条件

以上の議論を元に、いよいよ消費者の集計が可能になるための条件を示そう。消費者は N 人で、各人が消費集合 Ω_i を持っているとし、 $\Omega = \sum_{i=1}^N \Omega_i$ とする。12.5 節と同様、

$$S(x) = \left\{ \bar{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \bar{\Omega} \mid \sum_{i=1}^N x_i = x \right\}$$

として、

$$x \succ_0 y \Leftrightarrow \forall \bar{y} \in S(y), \exists \bar{x} \in S(x), \forall i \in \{1, \dots, N\}, x_i \succ_i y_i \quad (16)$$

として推移的な二項関係 \succ_0 を定義する。

また、 $B_i \subset \mathbb{R}_{++}^n \times \mathbb{R}$ は非空で、 f^{\succ_i} は B_i 上で一価関数として定義されてワルラス法則を満たすとする。ここで

$$W_N(p, M) = \left\{ m \in \mathbb{R}_{++}^N \mid \forall i \in \{1, \dots, N\}, (p, m_i) \in B_i, \text{ and } \sum_{i=1}^N m_i = M \right\}$$

とし、

$$B_0 = \{(p, M) \in \mathbb{R}_{++}^n \times \mathbb{R} \mid W_N(p, M) \neq \emptyset\}$$

と定義する。

*⁷ 右辺の数値 $-CV(c, b)$ は等価変分として知られる量である。

これらの記号の下に代表的消費者の存在の特徴付けを行うのだが、あまりにも仮定が多いため、定理の前に独立して仮定を明示することにする。

仮定 12.1. 以下の仮定が成り立つ。

- (I) N 人の消費者が存在し、それぞれ消費集合 $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ とその上の連続な弱順序 \succsim_i を持つ。
- (II) $P \subset \mathbb{R}_{++}^n$ は個人とは独立に定まった価格の開錐であり、 $B_i \subset P \times \mathbb{R}$ もやはり錐で、かつ任意の $p \in P$ について $(p, m_i) \in B_i$ となる m_i が少なくとも一つは存在する。さらに、 \succsim_i^* は \succsim_i から (11) 式によって導かれた B_i 上の間接選好関係である。
- (III) $B_i = B_i + L_{n+1}$ が成り立ち、 $f_i \equiv f_i^{\succsim_i}$ は B_i 上で連続な一価関数として定義されてワルラス法則を満たす*⁸。
- (IV) 補償変分 CV_i は代替可能性を満たす。
- (V) P は C^1 弧状連結*⁹である。
- (VI) 次のどちらかが成り立つ。
 - (VI-1) 任意の $x \in \Omega$ に対して、 $x = \sum_{i=1}^N f_i(p, m_i)$ となる $(p, M) \in B_0$ と $m \in W_N(p, M)$ が存在する。
 - (VI-2) 任意の $(p, M) \in B_0$ と $p \cdot x \leq M$ を満たす $x \in \Omega$ 、そして $\bar{x} \in S(x)$ に対して、 $p \cdot x_i \leq m_i$ を満たす $m \in W_N(p, M)$ が存在する。

定理 12.4. 仮定 12.1 の下で、以下の条件は同値である。

1) \succsim_0 の需要関数

$$f^{\succsim_0}(p, M) = \{x \in \Omega \mid p \cdot x \leq M, \text{ and } p \cdot y \leq M \Rightarrow y \not\prec_0 x\}$$

についての B_0 の像の上で \succsim_0 と一致するような Ω 上の弱順序 \succsim^+ で、 $f^{\succsim_0} = f^{\succsim^+}$ となるものが存在する。

2) 任意の $(p, M) \in B_0$ と $m \in W_N(p, M)$ に対して、

$$f_0(p, M) \equiv \sum_{i=1}^N f_i^{\succsim_i}(p, m_i)$$

と定義すれば、 f_0 は所得分布ベクトル m の取り方から独立に定まる。

*⁸ f_i の定義域が B_i だと仮定しているわけではないことに注意。ただし、後に注意するように、 f_0 が全射ならばたいいていの場合に B_i は f_i の定義域全体とならざるを得なくなる。

*⁹ P が C^1 弧状連結であるとは、任意の二点 $p_1, p_2 \in P$ に対して、ある C^1 関数 $c : [0, 1] \rightarrow P$ で $c(0) = p_1, c(1) = p_2$ となるものが存在することを言う。凸集合は明らかにこの条件を満たすが、それ以外にも多くの場合に成り立つ。

3) 連続関数 $F : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ と $G_i : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ が存在して、

$$f_i(p, m) = G_i(p) + F(p)m \quad (17)$$

がすべての $i \in \{1, \dots, N\}$ に対して成り立つ。

4) 連続微分可能な関数 $\beta : P \rightarrow \mathbb{R}$ と $\alpha_i : P \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して、

$$v_i(p, m) = \alpha_i(p) + \beta(p)m \quad (18)$$

が \succsim_i^* を表現する^{*10}。

5) i から独立に選ばれたある既約価格集合 P^* が存在して、 P^* が張る錐は P と一致し、かつ各 \succsim_i^* の $B_i \cap (P^* \times \mathbb{R})$ への制限は無差別曲線平行性を満たす。

6) 与えられた $b = (p, M), c = (q, W) \in B_0$ について $m \in W_N(p, M)$ と $w \in W_N(p, W)$ を取って $b_i = (p, m_i), c_i = (p, w_i)$ とするとき、補償変分についての不等式

$$\sum_{i=1}^N CV_i(b_i, c_i) \geq 0$$

が成り立つならば、ある $\bar{\varepsilon} \in \bar{\Omega}$ が存在して、

$$z_i \succsim_i f_i(p, m_i), \sum_{i=1}^N z_i = \sum_{i=1}^N f_i(c_i)$$

が成り立つ。

さらに、これらのうちひとつでも成り立つとき、 B_0 上で $f \succsim^0 = f_0$ となる^{*11}。

証明. いくつかのステップに分ける。

ステップ 1. 仮定 12.1 の (I)-(III) が成り立つならば、間接選好関係 \succsim_i^* は所得に関して強く単調である。

ステップ 1 の証明. $p \in P$ とし、 $m_1 > m_2$ かつ $(p, m_1), (p, m_2) \in B_i$ とする。このとき、ワルラス法則から

$$p \cdot f_i(p, m_1) = m_1 > m_2 = p \cdot f_i(p, m_2)$$

となるから、 $f_i(p, m_1) \succ_i f_i(p, m_2)$ が成り立つ。したがって $(p, m_1) \succ_i^* (p, m_2)$ である。以上でステップ 1 の証明が完成した。 ■

ステップ 2. 仮定 12.1 の (I)-(III) が成り立つならば、2) と 3) は同値である。

^{*10} この (18) 式はゴーマン極形式 (Gorman polar form) と呼ばれる形の間接効用関数である。

^{*11} この最後の結果より、(VI-1) が成り立つならば 1) の \succsim^+ は \succsim_0 と完全に一致する。

ステップ 2 の証明. 2) を仮定する。ここで、 $p \in P$ をひとつ固定し、さらに $(p, m_i) \in B_i$ となる m_i の中で最小でないものを一つ取り、 m_i^* とする。そして $J_i = \{w_i \in \mathbb{R} \mid (p, m_i^* + w_i) \in B_i\}$ とする。 J_i は半直線であり、0 を内部に含む。2) より、 $(p, M) \in B_0$ ならば $m \in W_N(p, M)$ に対して

$$f_0(p, M) = \sum_{i=1}^N f_i(p, m_i)$$

が成り立つ。したがって特に $M^* = \sum_{i=1}^N m_i^*$ かつ $w_i = m_i - m_i^*$ として、

$$f_i(p, m_i^* + w_i) = f_0(p, M^* + w_i) - \sum_{j \neq i} f_j(p, m_j^*)$$

が得られる。そこで、 $J = \sum_{i=1}^N J_i$ として、

$$X_p(W) = f_0(p, M^* + W) - \sum_{i=1}^N f_i(p, m_i^*)$$

と定義すると、上の式から

$$f_i(p, m_i^* + w_i) = X_p(w_i) + f_i(p, m_i^*)$$

が得られる。ここから容易に X_p の加法性、つまり

$$X_p(w_1 + \dots + w_N) = X_p(w_1) + \dots + X_p(w_N)$$

を確認できる。そこで、

$$Z_p(W) = \int_0^W X_p(t) dt$$

と定義する。与えられた $i \neq j$ となる $i, j \in \{1, \dots, N\}$ について、上の式の w_i, w_j 以外の w_k を 0 にセットすることで、

$$\begin{aligned} Z_p(w_i + w_j) - Z_p(w_j) &= \int_{w_i}^{w_i + w_j} X_p(t) dt \\ &= \int_0^{w_j} X_p(w_i + t) dt \\ &= \int_0^{w_j} [X_p(w_i) + X_p(t)] dt \\ &= X_p(w_i)w_j + Z_p(w_j) \end{aligned}$$

を得る。 w_i と w_j の役割を入れ替えると

$$Z_p(w_i + w_j) - Z_p(w_i) = X_p(w_j)w_i + Z_p(w_i)$$

が得られる。これらを引き算して整理することで、 $w_i \neq 0 \neq w_j$ ならば

$$\frac{X_p(w_i)}{w_i} = \frac{X_p(w_j)}{w_j}$$

が確認できた。特に、 J_i が最も広くなる i を取れば、この結果はすべての $w \in J_j$ について成り立つことがわかり、したがってその値を $F(p) \in \mathbb{R}$ とし、 $G_i(p) = f_i(p, m_i^*) - F(p)m_i^*$ とすれば、

$$f_i(p, m_i) = F(p)m_i + G_i(p)$$

が得られる。これで (17) 式が示せたので、3) が成り立つ。

逆に 3) を仮定すれば、 $(p, M) \in B_0$ かつ $m \in W_N(p, M)$ のとき、

$$\sum_{i=1}^N f_i(p, m_i) = F(p)M + \sum_{i=1}^N G_i(p)$$

であり、右辺は m の取り方に依存しないため、2) が成り立つ。以上でステップ 2 の証明が完成した。 ■

次のステップのために、支出関数の定義を確認しておこう。 $x \in \Omega_i$ のとき、 $p \in P$ に対して

$$E_i^x(p) = \inf\{p \cdot y \mid y \succeq_i x\}$$

と定義する。

ステップ 3. 仮定 12.1 の (I)-(IV) の下で、任意の $b \in B_i$ と $x = f_i(b)$ 、 $p \in P$ に対して $(p, E_i^x(p)) \in B_i$ かつ $(p, E_i^x(p)) \sim_i^* b$ となる。

ステップ 3 の証明. まず $m > 0$ を十分大きく取って $(p, m) \in B_i$ となるようにし、 $c = (p, m)$ とする。 CV_i の代替可能性から、

$$c - CV_i(b, c)e_{n+1} \in B_i, \quad b \sim_i^* c - CV_i(b, c)e_{n+1}$$

が得られる。ここから、 $w = m - CV_i(b, c)$ に対して $(p, w) \in B_i$ であり、かつ

$$x \sim_i f_i(p, w)$$

であることがわかる。 $p \cdot f_i(p, w) = w$ であり、 $p \cdot y < w$ ならば

$$x \sim_i f_i(p, w) \succ_i y$$

なので、 $E^x(p) = w$ を得る。以上で証明が完成した。 ■

ステップ 4. 仮定 12.1 の (I)-(V) が成り立つならば、3) と 4) は同値である。

ステップ4の証明. 3) を仮定する。 $b \succ_i^* c$ となる $b, c \in B_i$ を取って $x_i = f_i(b), y_i = f_i(c)$ とすると、すべての $p \in P$ について $E_i^{x_i}(p) > E_i^{y_i}(p)$ である。そこで、

$$\beta_i[b, c](p) = \frac{1}{E_i^{x_i}(p) - E_i^{y_i}(p)},$$

$$\gamma_i[b, c](p) = -E_i^{y_i}(p)\beta_i[b, c](p)$$

と定義する。最初に、この関数 β が i や b, c の取り方を変えても正の定数倍にしか変化しないことを示そう。シェパードの補題によってこの関数は連続微分可能であり*12、故に3) から

$$\begin{aligned} \nabla \log \beta_i[b, c](p) &= \frac{-1}{E_i^{x_i}(p) - E_i^{y_i}(p)} (f_i(p, E_i^{x_i}(p)) - f_i(p, E_i^{y_i}(p))) \\ &= \frac{F(p)E_i^{y_i}(p) + G_i(p) - F(p)E_i^{x_i}(p) - G_i(p)}{E_i^{x_i}(p) - E_i^{y_i}(p)} \\ &= -F(p) \end{aligned}$$

となる。 P は C^1 弧状連結なので、 $p^* \in P$ をひとつ取れば、任意の $p \in P$ に対して $p(0) = p^*, p(1) = p$ となる C^1 曲線 $p: [0, 1] \rightarrow P$ が存在する。すると上の結果から

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} [\log \beta_j[d, e](p(t)) - \log \beta_i[b, c](p(t))] dt = 0$$

となるため、

$$\log \beta_j[d, e](p) - \log \beta_i[b, c](p) \equiv A$$

となる p に依存しない定数 A が存在する。この定数 A に対して e^A のことを $A_{ij}[b, c, d, e]$ と書くことにし、さらに $i = j$ のときには $A_i[b, c, d, e]$ と書くことにする。上で示した結果より、我々は次の等式

$$A_{ij}[b, c, d, e] = \frac{E_i^{f_i(b)}(p) - E_i^{f_i(c)}(p)}{E_j^{f_j(d)}(p) - E_j^{f_j(e)}(p)} = \frac{\beta_j[d, e](p)}{\beta_i[b, c](p)}$$

がすべての $p \in P$ に対して成り立つという結果を得た。

次に、

$$v_i[b, c](p, m) = \gamma_i[b, c](p) + \beta_i[b, c](p)m = \frac{m - E_i^{y_i}(p)}{E_i^{x_i}(p) - E_i^{y_i}(p)}$$

と定義する。このときに、 $b \succ_i^* c$ かつ $d \succ_i^* e$ であれば、 $v_i[b, c]$ と $v_i[d, e]$ が B_i 上で同一の順序を表すことを示そう。 $z_i = f_i(d), w_i = f_i(e)$ とする。 $c \sim_i^* e$ ならば、 $y_i \sim w_i$ なの

*12 このシェパードの補題は定理 12.6 による。この定理 12.6 を適用可能にするためだけに仮定 12.1 では P が開錐であると仮定されている。

で、 $E_i^{y_i}(p) = E_i^{w_i}(p)$ であり、したがって

$$\begin{aligned} v_i[d, e](p, m) &= \frac{m - E_i^{y_i}(p)}{E_i^{z_i}(p) - E_i^{w_i}(p)} = \frac{E_i^{x_i}(p) - E_i^{y_i}(p)}{E_i^{z_i}(p) - E_i^{w_i}(p)} \times \frac{m - E_i^{y_i}(p)}{E_i^{x_i}(p) - E_i^{y_i}(p)} \\ &= \frac{E_i^{x_i}(p) - E_i^{y_i}(p)}{E_i^{z_i}(p) - E_i^{w_i}(p)} v_i[b, c](p, m) = A_i[b, c, d, e] v_i[b, c](p, m) \end{aligned}$$

となって主張は正しい。したがって $c \succ_i^* e$ か $e \succ_i^* c$ のどちらかの場合だけを扱えばよい。議論は対称なので、 $c \succ_i^* e$ を仮定する。このとき、 $v_i[d, e](p, m)$ と $v_i[c, e](p, m)$ は同じ順序を表すため、 $v_i[b, c](p, m)$ と $v_i[c, e](p, m)$ が同じ順序を表すことを示せばよい。実際に計算すると、

$$\begin{aligned} v_i[c, e](p, m) &= \frac{-E^{w_i}(p) + m}{E^{y_i}(p) - E^{w_i}(p)} \\ &= \frac{E^{x_i}(p) - E^{y_i}(p)}{E^{y_i}(p) - E^{w_i}(p)} \times \frac{-E^{y_i}(p) + m + (E^{y_i}(p) - E^{w_i}(p))}{E^{x_i}(p) - E^{y_i}(p)} \\ &= A_i[b, c, c, e] v_i[b, c](p, m) + 1 \end{aligned}$$

となり、これは $v_i[b, c](p, m)$ の正アフィン変換なので、たしかに主張は正しい。

今度は、 $v_i[b, c]$ が \succ_i^* を表現していることを示そう。まず $d \succ_i^* e$ であれば、 $E_i^{f_i(d)}(p_d) = m_d$ かつ $E_i^{f_i(e)}(p_e) = m_e$ なので、

$$v_i[d, e](d) = 1 > 0 = v_i[d, e](e)$$

となる。すでに述べたように $v_i[b, c]$ と $v_i[d, e]$ は同じ順序を表すので、 $v_i[b, c](d) > v_i[b, c](e)$ が得られる。次に、 $d \sim_i^* e$ とする。このとき、 $f = (p_d, m_d + 1)$ とすれば $f \succ_i^* d$ となるので、 $v_i[f, d](d) = v_i[f, d](e) = 0$ であり、したがって $v_i[b, c](d) = v_i[b, c](e)$ が得られる。故に、たしかに $v_i[b, c]$ は \succ_i^* を表現する間接効用関数である。

最後に、 $p^* \in P$ をひとつ取り、 m^* を、 $(p^*, m^*) \in B_i$ がすべての i について成り立つように十分大きく取る。ここで $b = (p^*, m^* + 1)$, $c = (p^*, m^*)$ として、 $\beta(p) = \beta_1[b, c](p)$ と定義し、

$$\alpha_i(p) = \gamma_i[b, c](p) A_{i1}[b, c, b, c]$$

とする。このとき、

$$\begin{aligned} v_i(p, m) &= \alpha_i(p) + \beta(p)m \\ &= [\gamma_i[b, c](p) + \beta_i[b, c](p)m] A_{i1}[b, c, b, c] = A_{i1}[b, c, b, c] v_i[b, c](p, m) \end{aligned}$$

となり、したがってたしかに v_i は \succ_i^* を表現する。よって 4) が成り立つ。

逆に 4) を仮定する。ここで、 $b \in B_i$ を任意に取り、 $x = f_i(b)$ とする。 $p \in P$ を任意にとると、ステップ 1 から \succ_i^* は所得に関して強く単調であり、したがって $\beta(p) > 0$ が成り

立つ。一方、ステップ 3 から $(p, E^x(p)) \sim_i^* b$ となる。特に、 $p \cdot x \geq E^x(p)$ であるから、

$$H_i(p) = \beta(p)(p \cdot x) + \alpha_i(p)$$

と定義すると、

$$H_i(p) \geq \beta(p)E^x(p) + \alpha_i(p) = \beta(p_b)m_b + \alpha_i(p_b) = \beta(p_b)(p_b \cdot x) + \alpha_i(p_b) = H_i(p_b)$$

となり、 H_i は $p = p_b$ において最小値を取ることがわかる。 β と α_i は連続微分可能なので、 H_i もそうであり、よって $\nabla H_i(p_b) = 0$ である。ここからただちに、

$$m_b \nabla \beta(p_b) + \nabla \alpha_i(p_b) + \beta(p_b)x = 0$$

を得るが、一方で $\beta(p_b) > 0$ なので

$$f_i(p_b, m_b) = \frac{-1}{\beta(p_b)} [m_b \nabla \beta(p_b) + \nabla \alpha_i(p_b)]$$

を得る。したがって

$$F(p) = \frac{-1}{\beta(p)} \nabla \beta(p), \quad G_i(p) = \frac{-1}{\beta(p)} \nabla \alpha_i(p)$$

と定義すれば (17) 式を得るため、3) が成り立つ。以上でステップ 4 の証明が完成した。 ■

ステップ 5. 仮定 12.1 の (I)-(IV) が成り立つならば、4) と 5) は同値である。

ステップ 5 の証明. 4) を仮定する。いま、需要関数は正 0 次同次であるから、 $f_i(ap, am) = f_i(p, m)$ であり、したがって $v_i(ap, am) = v_i(p, m)$ である。これを (18) 式に代入すれば、

$$\alpha_i(ap) + \beta(ap)(am) = \alpha_i(p) + \beta(p)m$$

が導かれる。そこで特に、

$$\gamma_i(p) = \alpha_i(p/\|p\|), \quad \delta(p) = \|p\|^{-1} \beta(p/\|p\|)$$

と定義しよう。このとき、与えられた $(p, m) \in B_i$ に対して $(q, w) = \|p\|^{-1}(p, m)$ とすると、

$$v_i(p, m) = v_i(q, w) = \alpha_i(q) + \beta(q)w = \gamma_i(p) + \delta(p)m$$

が得られる。したがって最初から $\alpha_i = \gamma_i, \beta = \delta$ を仮定することで、 α_i は正 0 次同次、 β は正 -1 次同次であるとしてよい。さらに、 \succsim_i^* は所得に関して強く単調であるから、 $\beta(p) > 0$ が常に成り立つ。そこで $p^* \in P$ をひとつ固定し、

$$P^* = \{p \in P \mid \beta(p) = \beta(p^*)\}$$

とすると、 P^* は既約価格集合であり、かつ P^* が生成する錐は P と一致する。そして、

$$w_i(p, m) = \frac{\alpha_i(p)}{\beta(p^*)} + m$$

と定義すると、 w_i は準線形で、 \succsim_i^* の $B_i \cap (P^* \times \mathbb{R})$ 上への制限を表現している。したがって定理 12.3 から、すべての i についてこの制限された順序は無差別曲線平行性を満たし、5) が成り立つ。

逆に 5) を仮定する。このとき、ある既約価格集合 P^* が存在して、 P は P^* から生成される錐であり、かつ準線形効用

$$w_i(p, m) = \gamma_i(p) + m$$

は \succsim_i^* の $B_i \cap (P^* \times \mathbb{R})$ 上への制限を表現している。一方、 $p \in P$ が与えられたとき、 $\beta(p)p \in P^*$ となる $\beta(p) > 0$ が一意的に定まるので、

$$v_i(p, m) = \gamma_i(\beta(p)p) + \beta(p)m$$

とすれば、

$$\begin{aligned} b \succsim_i^* c &\Leftrightarrow \beta(p_b)b \succsim_i^* \beta(p_c)c \Leftrightarrow w_i(\beta(p_b)b) \geq w_i(\beta(p_c)c) \\ &\Leftrightarrow \gamma_i(\beta(p_b)p_b) + \beta(p_b)m_b \geq \gamma_i(\beta(p_c)p_c) + \beta(p_c)m_c \Leftrightarrow v_i(b) \geq v_i(c) \end{aligned}$$

となって、 v_i は \succsim_i^* を表現する。そこで

$$\alpha_i(p) = \gamma_i(\beta(p)p)$$

と定義しておこう。これで (18) 式が得られた。ここで、 $p^* \in P$ と $m_1 > m_2$ かつ $(p^*, m_1), (p^*, m_2) \in B_i$ となる m_1, m_2 を取り、 $b = (p^*, m_1)$ 、 $c = (p^*, m_2)$ とする。ステップ 1 より $b \succ_i^* c$ なので、 $x = f_i(b)$ 、 $y = f_i(c)$ とすれば、 $x \succ_i y$ である。このとき、任意の $p \in P$ に対して、ステップ 3 から $f_i(p, E_i^x(p)) \sim_i x$ かつ $f_i(p, E_i^y(p)) \sim_i y$ であり、したがって

$$\begin{pmatrix} v_i(b) \\ v_i(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i(p, E_i^x(p)) \\ v_i(p, E_i^y(p)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & E_i^x(p) \\ 1 & E_i^y(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i(p) \\ \beta(p) \end{pmatrix}$$

を得る。 $E_i^x(p) \neq E_i^y(p)$ なので、上の方程式は一意的に解けて、

$$\begin{pmatrix} \alpha_i(p) \\ \beta(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & E_i^x(p) \\ 1 & E_i^y(p) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_i(b) \\ v_i(c) \end{pmatrix}$$

となるが、右辺は p について連続微分可能であるから、左辺も連続微分可能である。これで 4) が示せた。以上でステップ 5 の証明が完成した。 ■

ステップ 6. 仮定 12.1 の (I)-(IV) が成り立つならば、2) と 6) は同値である。

ステップ 6 の証明. 2) を仮定する。 $b, c \in B_0$ とし、 $m \in W_N(b), w \in W_N(c)$ に対して $b_i = (p_b, m_i), c_i = (p_c, w_i)$ として、

$$\sum_{i=1}^N CV_i(b_i, c_i) \geq 0$$

が成り立つとする。ここで、 $i \in \{2, \dots, N\}$ に対して $d_i = c_i - CV_i(b_i, c_i)e_{n+1}$ とすると、代替可能性の仮定から $d_i \in B_i$ かつ $b_i \sim_i^* d_i$ である。さらに

$$d_1 = c_1 - CV_1(b_1, c_1)e_{n+1} + \sum_{i=1}^N CV_i(b_i, c_i)e_{n+1}$$

とすれば、代替可能性とステップ 1 から、 $d_1 \succsim_1^* b_1$ である。そこで、 $z_i = f_i(d_i)$ と定義する。間接選好関係 \succsim_i^* の定義から、すべての i について $z_i \succsim_i f_i(b_i)$ である。一方で 2) から $\sum_i z_i = \sum_i f_i(c_i)$ であり、よって 6) が成り立つ。

逆に 6) を仮定する。 $(p, M) \in B_0$ をひとつ取り、 $m, w \in W_N(p, M)$ と仮定する。そして

$$x_i = f_i(p, m_i), y_i = f_i(p, w_i)$$

と定義し、 $x = \sum_{i=1}^N x_i, y = \sum_{i=1}^N y_i$ とする。このとき、

$$\sum_{i=1}^N CV_i((p, m_i), (p, w_i)) = \sum_{i=1}^N (w_i - m_i) = 0$$

であるから、6) から、 $\sum_{i=1}^N z_i = y$ かつ $z_i \succsim_i x_i$ となる $\bar{z} \in \bar{\Omega}$ が存在する。すると

$$p \cdot y = \sum_{i=1}^N p \cdot z_i = \sum_{i=1}^N w_i = \sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N p \cdot x_i = p \cdot x$$

が導かれる。もし $x \neq y$ ならば、 $z_i \neq x_i$ となる i が存在するが、そのような i に対しても $p \cdot z_i > p \cdot x_i$ となるため、上の式に矛盾が生ずる。よって $x = y$ でなければならず、2) が成り立つ。以上でステップ 6 の証明が完成した。 ■

ステップ 7. 仮定 12.1 の (I)-(III) が成り立てば、1) は 2) を含意する。さらに、 B_0 上で $f^{\succsim_0} = f_0$ となる。

ステップ 7 の証明. 1) を仮定する。 \succsim^+ を、 $f^{\succsim_0}(B_0)$ 上で \succsim_0 と等しい Ω 上の弱順序で、 $f^{\succsim^+} = f^{\succsim_0}$ を満たすものとする。ここで、 $(p, M) \in B_0$ をひとつ取り、 $m \in W_N(p, M)$ を取って、 $x_i = f_i(p, m_i), x = \sum_{i=1}^N x_i$ とする。いま、 $y \neq x, p \cdot y \leq M$ かつ $y \succsim_0 x$

であると仮定しよう。このとき、 \succsim_0 の定義から、 $y_i \succsim_i x_i$ をすべての i に対して満たす $\bar{y} \in S(y)$ が存在する。 x_i の定義から、 $y_i \neq x_i$ ならば $p \cdot y_i > m_i$ である。一方、

$$\sum_{i=1}^N p \cdot y_i = p \cdot y \leq M$$

であるから、 $y_i = x_i$ がすべての i について成り立つことになるが、これは $y \neq x$ の仮定に矛盾する。したがって、 $p \cdot y \leq M$ かつ $y \neq x$ ならば $y \not\prec_0 x$ であることが示された。特に、 $x \in f^{\sim 0}(p, M) = f^{\sim +}(p, M)$ となる。ここで $w \in W_N(p, M)$ として $y_i = f_i(p, w_i)$ かつ $y = \sum_{i=1}^N y_i$ とすると、同様に $y \in f^{\sim 0}(p, M) = f^{\sim +}(p, M)$ であることが示される。もし $y \neq x$ であるとすれば、 $p \cdot y = p \cdot x = M$ であることから $y \sim^+ x$ を得るが、 x, y は共に $f^{\sim 0}(B_0)$ に含まれているため、 $x \sim_0 y$ となって矛盾が生ずる。よってこれはあり得ず、2) が成り立つ。合わせて、 $f_0 = f^{\sim 0}$ が成り立つことも示された。以上でステップ 7 の証明が完成した。 ■

ステップ 8. 仮定 12.1 の (I)-(VI) が成り立つならば、2) は 1) を含意する。

ステップ 8 の証明. 2) を仮定する。すでに示したように、仮定 12.1 の (I)-(V) の下では 2) から 6) までの同値性がすでに示されているため、特に 5) で存在が保証された既約価格集合 P^* が取れる。そこで $b_i, c_i \in B_i \cap (P^* \times \mathbb{R})$ をどう取っても、定理 12.3 から

$$\sum_{i=1}^N CV_i(b_i, c_i) = - \sum_{i=1}^N CV_i(c_i, b_i) \quad (19)$$

が成立する。ここで、 \succsim_0 の $f_0(B_0)$ 上への制限を \succsim'_0 と書くことにしよう。最初に、 \succsim'_0 が完備であることを示す。

いま、 $x, y \in f_0(B_0)$ を任意に取る。仮定から、 $x = f_0(p, M), y = f_0(q, W)$ となる $(p, M), (q, W) \in B_0$ と、 $m \in W_N(p, M), w \in W_N(q, W)$ が取れる。必要ならば p, q を取り替えて、 $p, q \in P^*$ を仮定してよい。いま、

$$\sum_{i=1}^N CV_i((p, m_i), (q, w_i)) \geq 0$$

であるとしよう。 $\bar{x} \in S(x)$ を任意に取る。このとき、

$$p \cdot x = \sum_{i=1}^N p \cdot x_i = \sum_{i=1}^N p \cdot f_i(p, p \cdot x_i)$$

となるため、 $m_i^* = p \cdot x_i$ とすれば $f_i(p, m_i^*) \succsim_i x_i$ がすべての i に対して成り立つ。一方で $\sum_{i=1}^N m_i^* = \sum_{i=1}^N m_i$ であるが、定理 12.3 より CV_i は $B_i \cap (P^* \times \mathbb{R})$ 上で加法的な

ので、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N CV_i((p, m_i^*), (q, w_i)) &= \sum_{i=1}^N CV_i((p, m_i^*), (p, m_i)) + \sum_{i=1}^N CV_i((p, m_i), (q, w_i)) \\ &= \sum_{i=1}^N (m_i - m_i^*) + \sum_{i=1}^N CV_i((p, m_i), (q, w_i)) \geq 0 \end{aligned}$$

が導かれる。したがって6) から、 $y_i \succsim_i x_i$ をすべての i について満たす $\bar{y} \in S(y)$ が存在することになるが、これは $y \succsim'_0 x$ を意味する。逆に

$$\sum_{i=1}^N CV_i((p, m_i), (q, w_i)) < 0$$

であれば、(19) 式から

$$\sum_{i=1}^N CV_i((q, w_i), (p, m_i)) > 0$$

が成り立つので、同じ推論から $x \succsim'_0 y$ が得られる。したがって \succsim'_0 は完備であることが示された。

もし (VI-1) が成り立つならば $f_0(B_0) = \Omega$ となるため、 $\succsim'_0 = \succsim_0$ であり、したがって $\succsim^+ = \succsim_0$ として主張が成り立つ。

次に、もし (VI-2) が成り立つならば、 B_0 上で $f^{\succsim_0} = f_0$ であることを示そう。 $(p, M) \in B_0$ を任意に取り、 $x = f_0(p, M)$ とする。 $p \cdot y \leq M$ となる $y \in \Omega$ と $\bar{y} \in S(y)$ を任意に取れば、(VI-2) より、 $p \cdot y_i \leq m_i$ となる $m \in W_N(p, M)$ が存在するが、このとき $f_i(p, m_i) \succsim_i y_i$ であり、 $\sum_{i=1}^N f_i(p, m_i) = x$ なので、 $x \succsim_0 y$ が示される。したがって $x \in f^{\succsim_0}(p, M)$ である。もし $y \neq x$ かつ $y \in f^{\succsim_0}(p, M)$ となる $y \in \Omega$ が存在した場合、 $x \succsim_0 y$ であるから、 $y \succsim_0 x$ でもあることになる。そこで $m \in W_N(p, M)$ を取り、 $x_i = f_i(p, m_i)$ とすると、 $y_i \succsim_i x_i$ となる $\bar{y} \in S(y)$ が存在することになるが、すでにステップ7で示したのと同様の手順で矛盾が生ずる。したがってこれはあり得ず、 $f^{\succsim_0}(p, M)$ は一価であり、よって $f^{\succsim_0} = f_0$ でなければならない。 \succsim'_0 は $f_0(B_0)$ 上では \succsim_0 と同じ順序を示すため、これは $f^{\succsim_0} = f^{\succsim'_0}$ を意味する。そこで

$$\succsim^+ = \succsim'_0 \cup \{(x, y) \in \Omega^2 | y \notin f_0(B_0)\}$$

と定義すれば、 \succsim^+ は Ω 上の弱順序であり、 $f_0(B_0)$ 上では \succsim_0 と完全に一致し、かつ $(p, M) \in B_0$ であれば必ず $f^{\succsim^+}(p, M) = f^{\succsim_0}(p, M)$ である。以上でステップ8の証明が完成した。 ■

以上から、どの2条件も同値であることがわかったため、定理が成り立つ。以上で証明が完成した。

\succsim_i が準線形効用を持つ場合、ラグランジュ未定乗数法の原理から

$$F(p) = (1/p_n)e_n$$

という形がただちに導かれる。これはたしかに定理 12.4 の 3) を意味する。しかし、 $F(p)$ の他の形を認めないという意味で、この仮定は強すぎる。たとえば任意の $p \in \mathbb{R}_{++}^n$ に対して $f_i(p, m)$ が原点を通る共通の直線であれば、 $F(p) = f_i(p, 1)$ として $f_i(p, m) = F(p)m$ となるために定理 12.4 の 3) が成り立ち、したがって \succsim_0 は弱順序となる。このように、準線形とは関係のない仮定で自然と定理 12.4 の条件を満たすものを得ることは普通に可能なのである。

注意事項として、定理 12.4 の 1) は、 \succsim_0 自体の完備性を意味しているわけではない。(VI-1) が成り立つならば $\succsim_0 = \succsim^+$ となるため、 \succsim_0 自身が完備である。しかし、(VI-2) しかり成り立たない場合はそうではない。実のところ、定理 12.4 の 2) から 6) までの結果はすべて需要関数の値にのみ関係した結果であるから、需要関数の値域の外とは関係がない。これに関して、需要関数の定義域が本来ならば B_i より大きな集合であって、しかしそれを B_i という小さい集合に制限した場合でも、仮定 12.1 の (I) から (V) までと抵触するような内容は特に存在せず、したがって 2) から 6) までの同値性はすべて成り立つ。ところが要件 (VI-1) があると、 P は十分大きく取っていなければならないことになり、実質的に B_i を制限することは難しくなる。一方で (VI-1) を仮定しない場合、 B_i は本来の f_i の定義域より狭くてもかまわない。たとえば、「補償変分が代替可能性を満たす範囲に B_i を絞る」といった操作は (VI-1) に抵触する可能性が高いため、 \succsim_0 の完備性を導出できない。しかし総需要関数 f_0 の値域上での完備性で十分だということであれば、そのような操作をする余地は十分あり得る。

12.8 補論：双対性の確認

この節を通じて、必ずしも \mathbb{R}_+^n に含まれるとは限らない Ω の上で双対性の議論を使用する場面があった。ここでは基本的な部分に絞ってそれらの結果を再導出しよう。

必要な記号を再確認しておく。 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とし、 \succsim は Ω 上の弱順序とする。そして $(p, m) \in \mathbb{R}_{++}^n \times \mathbb{R}$ のとき、需要関数 f^\succsim を

$$f^\succsim(p, m) = \{x \in \Omega \mid p \cdot x \leq m, \text{ and } p \cdot y \leq m \Rightarrow y \not\succeq x\}$$

と定義する。一方、支出関数 E^x と補償需要関数 h^x を

$$E^x(p) = \inf\{p \cdot y \mid y \succsim x\},$$

$$h^{\sim}(p, x) = \{y \in \Omega \mid y \succ x \text{ and } p \cdot y = E^x(p)\}$$

と定義しておく。

本章の結果の後半においては $CV(b, c)$ が代替可能性を満たすことが仮定されているが、12.3 節ではそうではない。双対原理は、 CV の代替可能性が仮定されるとだいぶ簡単に証明することができるが、それだけでは足りない。したがって我々も、双対性の結果は CV が代替可能性を満たすときとそうとは限らないときで、別個に示さなければならない。次の定理 12.5 は一般の場合、定理 12.6 は CV が代替可能性を満たす場合の結果である。ただし共通する部分が多いので、補題を用意する。

補題 12.1. \succsim は連続であり、 f^{\sim} は $\mathbb{R}_{++}^n \times \mathbb{R}$ の部分集合上で定義されたワルラス法則を満たす一価関数であるとする。このとき、以下が成り立つ。

- (i) もし $x = f^{\sim}(p^*, m^*)$ であるならば、 $m^* = E^x(p^*)$ となる。
- (ii) E^x と $q \mapsto f^{\sim}(q, E^x(q))$ の双方が p の近くで定義されて連続であるならば、 E^x は p の近くで連続微分可能で、シェパードの補題

$$\nabla E^x(p) = f^{\sim}(p, E^x(p))$$

が成り立つ。

- (iii) ある p に対して $(p, E^x(p))$ と $(p, E^y(p))$ の双方で f^{\sim} が定義され、さらに $x \sim f^{\sim}(p, E^x(p))$ と $y \sim f^{\sim}(p, E^y(p))$ が成り立つとすれば、

$$x \succsim y \Leftrightarrow E^x(p) \geq E^y(p)$$

が成り立つ。

証明. まず、 f^{\sim} が (p^*, m^*) において定義されるとし、 $x = f^{\sim}(p^*, m^*)$ とする。このとき、 $p^* \cdot x = m^*$ であり、かつ $p^* \cdot y < m^*$ ならば $x \succ y$ なので、 $E^x(p^*) = m^*$ である。よって (i) が成り立つ。

次に、 E^x と $q \mapsto f^{\sim}(q, E^x(q))$ の双方が p の近くで定義されて連続であるとする。ここで p に十分近い任意の q について $z = f^{\sim}(q, E^x(q))$, $q(h) = q + he_i$, $z(h) = f^{\sim}(q(h), E^x(q(h)))$ と定義すると、十分 $|h| > 0$ が小さければ必ず $z(h)$ は定義できる。また、定義から任意の $\varepsilon > 0$ に対して $y \succ x$ かつ $q(h) \cdot y \leq E^x(q(h)) + \varepsilon$ となる $y \in \Omega$ が存在するが、これは $f^{\sim}(q(h), E^x(q(h)) + \varepsilon) \succ y \succ x$ を意味し、よって \succsim の連続性から $z(h) \succ x$ が得られる。同じことを $h = 0$ のときに行えば $z \succ x$ も得られるため、

$$\begin{aligned} E^x(q(h)) - E^x(q) &= [q \cdot z(h) - E^x(q)] + h z_i(h) \geq h z_i(h), \\ E^x(q(h)) - E^x(q) &= [E^x(q(h)) - q(h) \cdot z] + h z_i \leq h z_i \end{aligned}$$

という計算結果を得る。故に

$$\begin{cases} z_i(h) \leq \frac{E^x(q(h)) - E^x(q)}{h} \leq z_i & \text{if } h > 0, \\ z_i(h) \geq \frac{E^x(q(h)) - E^x(q)}{h} \geq z_i & \text{if } h < 0 \end{cases}$$

が示されたが、ここからただちに

$$\frac{\partial E^x}{\partial p_i}(q) = z_i = f_i^{\sim}(q, E^x(q))$$

を得る。この式が任意の i と p の近くの任意の q について成り立つため、特に E^x は p において連続微分可能であり、故に (ii) が成り立つ。

最後に、 $(p, E^x(p))$ と $(p, E^y(p))$ の双方において f^{\sim} が定義され、 $x \sim f^{\sim}(p, E^x(p))$ 、 $y \sim f^{\sim}(p, E^y(p))$ であるとしよう。このとき、仮定から

$$x \succsim y \Leftrightarrow f^{\sim}(p, E^x(p)) \succsim f^{\sim}(p, E^y(p))$$

が成り立つが、一方でワルラス法則から

$$m \geq w \Leftrightarrow f^{\sim}(p, m) \succsim f^{\sim}(p, w)$$

であり、つなげることで結果を得る。以上で証明が完成した。 ■

定理 12.5. \succsim は連続であり、 f^{\sim} は $\mathbb{R}_{++}^n \times \mathbb{R}$ の部分集合上で定義されたワルラス法則を満たす一価関数であるとする。このとき、以下の結果が成り立つ。

- i) 任意の $p \in \mathbb{R}_{++}^n$ と $x \in \Omega$ に対して、 f^{\sim} が $(p, E^x(p))$ の近傍上で定義されて連続であるならば h^{\sim} も (p, x) で定義される。逆に $h^{\sim}(p, x)$ が定義されて一価で、かつ $h^{\sim}(p, x)$ が関数 $y \mapsto p \cdot y$ について極小点にならない場合も f^{\sim} は $(p, E^x(p))$ で定義される。いずれの場合にも

$$h^{\sim}(p, x) = f^{\sim}(p, E^x(p)) \tag{20}$$

が成り立つ。さらにこのとき

$$h^{\sim}(p, x) \sim x$$

となる。

- ii) $(p, E^x(p))$ と $(p, E^y(p))$ の双方の近傍上で f^{\sim} が定義されて連続ならば、

$$x \succsim y \Leftrightarrow E^x(p) \geq E^y(p)$$

が成り立つ。

- iii) f^{\sim} が (p^*, m^*) で定義されるなら、 $x = f^{\sim}(p^*, m^*)$ について $E^x(p^*) = m^*$ である。

iv) もし f^\sim が $(p, E^x(p))$ の近傍で定義されて連続であれば、

$$\nabla E^x(p) = f^\sim(p, E^x(p))$$

が成り立つ。

証明. まず、 f^\sim が $(p, E^x(p))$ で定義されている場合、当然 $E^x(p) \in \mathbb{R}$ である。 $h^\sim(p, x)$ が定義されている場合も $E^x(p) = p \cdot h^\sim(p, x) \in \mathbb{R}$ である。したがってどちらの場合にも $E^x(p) \in \mathbb{R}$ なので、その値を m とする。

f^\sim が (p, m) の近傍上で定義されているとする。ここで $x^{\pm\varepsilon} = f^\sim(p, m \pm \varepsilon)$ とすると、仮定より十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $x^{\pm\varepsilon}$ は定義される。ここで $E^x(p) < m + \varepsilon$ なので、 $p \cdot y \leq m + \varepsilon$ かつ $y \succ x$ となる $y \in \Omega$ が存在するが、 $x^{+\varepsilon} \succ y$ なので、推移性から $x^{+\varepsilon} \succ x$ を得る。一方で、 $x^{-\varepsilon} \succ x$ であれば $E^x(p) \leq m - \varepsilon$ となってしまって矛盾が生ずるため、 $x \succ x^{-\varepsilon}$ である。 f^\sim は (p, m) の近傍上で連続なので $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $x^{\pm\varepsilon} \rightarrow x^* \equiv f^\sim(p, m)$ となり、 \succ の連続性から

$$x^* \succ x \succ x^*$$

となって、 $x^* \sim x$ が示された。したがって $x^* \in h^\sim(p, x)$ である。いま $y \neq x^*$ かつ $y \in h^\sim(p, x)$ となる y が存在すれば、 $p \cdot y = m$ であるから、 $x^* \succ y$ であるが、一方で $h^\sim(p, x)$ の定義から $y \succ x \sim x^*$ であり、したがって $y \sim x^*$ となる。これは $y \in f^\sim(p, m)$ を意味するが、 f^\sim の一価性に矛盾する。故に $h^\sim(p, x) = x^*$ でなければならない。

逆に、 $x^* = h^\sim(p, x)$ が定義されて一価で、かつ x^* が関数 $y \mapsto p \cdot y$ について極小ではないと仮定しよう。定義からただちに $p \cdot x^* = E^x(p) = m$ であるが、一方で $x^* \succ x$ である。もし $x^* \succ x$ であるなら、 $U = \{y \in \Omega \mid y \succ x\}$ は x^* の開近傍である。 x^* は $y \mapsto p \cdot y$ について極小ではないから、 U 内に $p \cdot y < p \cdot x^*$ となる y が存在することになるが、 $y \succ x$ なので $E^x(p) \leq p \cdot y$ となって矛盾が生ずる。よって $x^* \sim x$ でなければならない。ここで $p \cdot y \leq m$ かつ $y \neq x^*$ ならば $h^\sim(p, x)$ が一価であることから $x \succ y$ でなければならない。よって $x^* \succ y$ となる。したがって $x^* = f^\sim(p, E^x(p))$ となる。故にどちらの仮定の下でも (20) 式が示されたが、 $x^* \sim x$ はこの場合どちらでも示されているので、i) が成り立つ。

ii) と iii) は補題 12.1 の (i) と (iii) からただちに導かれる。ここで、もし f^\sim が $(p, E^x(p))$ の近傍上で定義されて連続であるときには必ず E^x が p の近傍で連続であることが示されたならば、補題 12.1 の (ii) からただちに iv) の主張がすべて示せて証明が完成する。そこで、それを証明の目標としよう。まず、 $m = E^x(p)$ とする。 f^\sim は (p, m) の近くで連続であるから、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、 $\|q - p\| \leq \varepsilon$ かつ $|w - m| \leq \varepsilon$ である限り必ず $f^\sim(q, w)$ は定義されてその近くで連続であるようにできる。さらに $\delta > 0$

を十分小さく取り、 $\delta < \varepsilon$ で、かつ $\|q - p\| \leq \delta$ ならば $f^{\sim}(q, m + \varepsilon) \succ x \succ f^{\sim}(q, m - \varepsilon)$ となるようにする。 \succ の連続性から、 $f^{\sim}(q, w) \sim x$ となる $w \in [m - \varepsilon, m + \varepsilon]$ が一意的に存在し、i) よりその w が $E^x(q)$ と一致する。ここで $\|q - p\| < \delta$ であるとし、 (q^k) が q に収束しているが、 $w^k = E^x(q^k)$ が $w = E^x(q)$ に収束していないとする。必要ならば部分列を取って、ある $\varepsilon' > 0$ が存在して $|w^k - w| \geq \varepsilon'$ が成り立つようにできる。一方で $w^k \in [m - \varepsilon, m + \varepsilon]$ なので、やはり必要ならば部分列を取って $w^k \rightarrow w^*$ となる w^* が存在することを仮定してよい。このとき f^{\sim} の連続性から

$$f^{\sim}(q, w^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{\sim}(q^k, w^k)$$

となり、したがって \succ の連続性から

$$f^{\sim}(q, w) \sim x \sim f^{\sim}(q, w^*)$$

となるため、 $w = w^*$ となるが、一方で仮定から $|w - w^*| \geq \varepsilon'$ となって矛盾が生ずる。よって、 E^x は p の近くで定義されて連続である。以上で証明が完成した。 ■

定理 12.6. \succ は連続であり、 f^{\sim} は $\mathbb{R}_{++}^n \times \mathbb{R}$ の部分集合 B 上で定義された連続な一価関数で、ワルラス法則を満たすと仮定する。さらに、 $P \subset \mathbb{R}_{++}^n$ は開錐で、 B は $P \times \mathbb{R}$ に含まれる錐であり、任意の $p \in P$ に対して $\{m \mid (p, m) \in B\}$ は非空な半直線であると仮定する。これに加えて、補償変分 $CV(b, c)$ は B 上で代替可能性を満たすとす。このとき、以下の結果が成り立つ。

- i) もし x が f^{\sim} の値域に含まれるならば、 $E^x(p)$ は任意の $p \in P$ に対して定義されて実数値かつ連続であり、さらに $(p, E^x(p)) \in B$ と $f^{\sim}(p, E^x(p)) \sim x$ が成り立つ。さらに $h^{\sim}(p, x)$ も定義されて一価で、(20) 式が成り立つ。
- ii) x, y が f^{\sim} の値域に含まれているならば、

$$x \succ y \Leftrightarrow E^x(p) \geq E^y(p)$$

が成り立つ。

- iii) f^{\sim} が (p^*, m^*) で定義されれば、 $x = f^{\sim}(p^*, m^*)$ について $E^x(p^*) = m^*$ である。

- iv) 任意の $p \in P$ に対して次のシェパードの補題

$$\nabla E^x(p) = f^{\sim}(p, E^x(p))$$

が成り立つ。

証明. $x = f^{\sim}(p^*, m^*)$ を仮定する。 $b^* = (p^*, m^*)$ として、任意の $p \in P$ に対して $b \equiv (p, m) \in B$ となる $m \in \mathbb{R}$ を取れば、代替可能性の仮定から

$$b - CV(b^*, b)e_{n+1} \in B, b - CV(b^*, b)e_{n+1} \sim x$$

を得る。これは $m - CV(b^*, b) = E^x(p)$ を意味する。したがって、 $E^x(p) \in \mathbb{R}$ と $(p, E^x(p)) \in B$ 、そして $f^{\sim}(p, E^x(p)) \sim x$ が示された。

次に、 $p \in P$ をひとつ取り、 $\delta > 0$ を十分小さく取って、 $U = \{q \in \mathbb{R}^n \mid \|q - p\| < \delta\}$ が P に含まれるように取る。 $q, r \in U$ のとき、 $0 \leq t \leq 1$ に対して $q_t = (1-t)q + tr$ とすると、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $y \succsim x$ かつ $q_t \cdot y \leq E^x(q_t) + \varepsilon$ となる $y \in \Omega$ が存在するため、

$$E^x(q_t) + \varepsilon \geq (1-t)q \cdot y + tr \cdot y \geq (1-t)E^x(q) + tE^x(r)$$

となり、 $\varepsilon \downarrow 0$ とすることで E^x の U 上での凹性を得る。 U は開集合で、 E^x は U 上で実数値かつ凹関数なので、 U 上連続でなければならない。以上から、 E^x は連続関数であることがわかった。

最後に、 $x^* = f^{\sim}(p, E^x(p))$ としたとき、 $x^* \sim x$ であり、かつ $p \cdot x^* = E^x(p)$ である。したがって $x^* \in h^{\sim}(p, x)$ が成り立つ。次に、 $y \in h^{\sim}(p, x)$ かつ $y \neq x^*$ となる y が存在した場合、 $p \cdot y = p \cdot x^*$ かつ $y \succsim x^*$ なので、 $y \in f^{\sim}(p, m)$ であることになるが、 f^{\sim} の一価性の仮定に矛盾する。以上で i) の証明が完成した。

ii) と iii) は補題 12.1 の (i) と (iii) からただちに導出できる。iv) は、ここまでを示した結果と補題 12.1 の (ii) からただちに導出される。維持で証明が完成した。 ■

文献案内

増澤 [12] がこの方面の基礎文献である。この文献は、余剰と集計問題についての非常に精緻に書かれたテキストであり、学説史的な余剰分析についての知識から始まり、定理 12.1 から定理 12.4 までの結果とその現代的な証明、それらの結果を誰が導出したのかについての注釈、そして間違いやすい種々の問題に対する注意喚起が含まれている。本稿は増澤の原稿にある結果のうち、彼が「特殊理論」と分類したものの理論的側面に限定し、若干仮定を変えて結果を再導出したものである。

すでに述べたように、定理 12.1 のうち、1) で仮定された準線形効用の存在から余剰分析を始めるテキストは多いが、12.5 節で述べたように、基準財余剰の和は準線形効用を仮定しなくともなんらかの情報を持っている。著者が [11] で紙数の関係で書けなかったものはまさにこの問題であって、13.4 節を見ただけでは、なぜ準線形効用を仮定するのかかわからなかった。本稿によってこの問題が少しでも改善されていることを願う。

増澤 [12] において扱われている問題は広範であるため、関連研究も膨大な量になる。ここではほんの少しだけ紹介するにとどめよう。まず、現代的な文脈で消費者余剰を議論する際に最初に挙げられるのは Marshall [9] である。基準財余剰について最も知られたテキストは Samuelson [10] であろうが、本文で挙げた Henderson [6] の方が若干早い。

定理 12.4 の主張には非常に多くの文献に関わっている。(18) 式はゴーマン極形式という名で知られている。これに関連した最も著名な文献群が Gorman [3, 4, 5] であるが、仮定が明示されているとは言いがたく、論理も錯綜していて読みにくい。定理 12.4 の証明のうち 3) と 4) の同値性の部分の証明はこれらの文献で行われていたことを増澤 [12] が現代的に書き直した部分であり、仮定も少なく、読みやすくなっている。ここでは 4) の形の関数に微分可能性を課してよいということが重要になるが、これは Hurwicz and Uzawa [7] で導入されたシェパードの補題の証明が可能にしたことである。これに関係して、(18) 式の形の間接効用関数表現の正アフィン変換を除いた一意性なども議論できるのだが、本稿の論理の範囲内では必要がなかったので省略した。

積分可能性の文脈で広く知られた Antonelli [1] には、定理 12.4 の 2) と 3) の同値性についての言及がある。無差別曲線平行性は、本稿と増澤 [12] では定義が若干異なっているが、たいていの場合には同値になる。命題 12.4 も本来は同値性として得られるのだが、これは Aumann [2] および Kaneko [8] の証明を少し変形することで得られる。

本章を通じて、基準財余剰が有効に定義されること、および補償変分の代替可能性が非常に多くの役割を果たした。この種の仮定がないと、余剰分析は様々なところで例外処理を大量に要求され、大体の場合にはうまくいかない。しかしこの仮定は決して弱くはなく、特に準線形効用を持つ経済では普通の消費集合がこの性質を満たさない。これがこの理論の難しいところである。基準財余剰については、代替可能性を置くことによって Ω の形を実質的に制限するものの、おおむね定理 12.1 の形での定式化で問題は起こらない。一方で補償変分については議論の余地がある。増澤 [12] では $\Omega_i \subset \mathbb{R}_+^n$ であることを堅持し、かつ Ω_i が閉集合で、 f_i は B_i から Ω_i への関数として全射であることを仮定していた。しかしこの仮定は筆者にとっては強すぎたので、本章での定理 12.4 の仮定の中にこれらは入っていない。使用した仮定を明示する必要があったため、本稿では仮定 12.1 を導入し、定理 12.4 の証明の各ステップで使用する仮定を明示することにした。一方で増澤は $B_i = B_i + L_{n+1}$ を仮定していないため、本稿の定理 12.4 から直接増澤 [12] の定理 4.3.N を導出することはできない点に注意が必要である。

参考文献

- [1] Antonelli, G. B. (1886) *Sulla Teoria Matematica dell' Economia Politica*. Tipografia del Folchetto, Pisa. Translated by Chipman, J. S. and Kirman, A. P. (1971) "On the Mathematical Theory of Political Economy." In: Chipman, J. S., Hurwicz, L., Richter, M. K., Sonnenschein, H. F. (Eds.) *Preferences, Utility and Demand*, Harcourt Brace Jovanovich, New York. pp.333-364.
- [2] Aumann, R. J. (1960) "Linearity of Unrestrictedly Transferable Utilities." *Naval Research Logistics Quarterly* 7, pp.281-284.
- [3] Gorman, W, M. (1953) "Community Preference Fields." *Econometrica* 21, pp.63-80.
- [4] Gorman, W, M. (1959) "Separable Utility and Aggregation." *Econometrica* 27, pp.469-481.
- [5] Gorman, W, M. (1961) "On a Class of Preference Fields." *Metroeconomica* 13, pp.53-56.
- [6] Henderson, A. (1941) "Consumer's Surplus and the Compensating Variation." *Review of Economic Studies* 8, pp.117-121.
- [7] Hurwicz, L. and Uzawa, H. (1971) "On the Integrability of Demand Functions." In: Chipman, J. S., Hurwicz, L., Richter, M. K., Sonnenschein, H. F. (Eds.) *Preferences, Utility and Demand*. Harcourt Brace Jovanovich, New York, pp.114-148.
- [8] Kaneko, M. (1976) "Note on Transferable Utility." *International Journal of Game Theory* 5, pp.183-185.
- [9] Marshall, A. (1890) *Principles of Economics*. Macmillan, London.
- [10] Samuelson, P. A. (1947) *Foundations of Economic Analysis*. Harvard University Press, Cambridge.
- [11] 細矢祐誉 (2025) 『消費者行動の理論分析』丸善出版.
- [12] 増澤拓也 (2025) 「消費者余剰の一般理論と特殊理論—代表的消費者定理の証明—」

広島大学経済学会 Discussion Paper Series, No.2025-1.