# 第 6.5 章　限界代替率

第 2 章で議論した効用最大化モデルでは、消費者は自分の好みを効用関数という形でしっかり理解しているという前提で議論されていた。これに対して、我々が購買活動を行う場合、たいていはそこまで自分の好みを深く認識しないという批判は、当然に考慮されなければならないものである。そこで、局所的に、いま自分が持っている消費計画の近くでだけ好みがわかる状況を想定するならば、どのような理論が構築できるであろうか。この考え方から、自然と我々は**限界代替率**と呼ばれる概念に行き着くことになる。

限界代替率は、現代的なミクロ経済学の教科書では効用関数が特定の追加的仮定を満たすときにだけ現れ、消費者理論にとっては限定的な役割しか果たさない。しかし、上記で述べたように、限界代替率は本来、効用関数とは独立な概念である。それは、効用最大化という形とは異なるもう一つの消費者理論の定式化と関わっており、そして効用最大化よりもそちらの方が歴史は古いとすら言える。

本章ではこの限界代替率の理論について、主に $n=2$ の場合に限定して議論を行う。ただし、細矢 (2025) の第 7 章にて扱われた微分方程式の基礎理論は、ここですべて使用することにする。本章を通じて、消費集合 $\Omega$ は $\mathbb{R}^n_+$ か $\mathbb{R}^n_{++}$ のいずれかを考える。

## 6.1　定義

まずは $n=2$ かつ $\Omega=\mathbb{R}^2_{++}$ の場合を考えよう。消費ベクトル $x\in\Omega$ を所持している消費者がなんらかの取引機会に直面した場合、彼がどのようにその取引を判定するかを考えてみよう。取引を記述するために**交換比率** (exchange ratio) の概念を導入する。いま、考えている取引の交換比率が $a$ であるとすれば、彼は第一財を $t$ 個諦めることによって $at$ 個の第二財を手に入れることができる。あるいは、第一財を $t$ 個得るために $at$ 個の第二財を手放さなければならない。

この消費者が考える「適正な」交換比率を $\sigma(x)$ と書くことにする。いま、交換比率 $a$ の取引が持ちかけられたとすると、$a<\sigma(x)$ ならばこの消費者は第二財を少し手放して第一財を手に入れようとするだろうし、逆に $a>\sigma(x)$ ならばこの消費者は第一財を少し諦めて第二財を得ようとするであろう。この「適正な」交換比率は手持ちの消費ベクトル $x$

が変わると変化する点に注意を要する。たとえばパンをたくさん持っているがワインはほとんど持っていない消費者がある取引機会においてパンを少し手放してワインを得たとすると、ワインの希少性は減り、逆にパンは少し手持ちが少なくなるので、この消費者はワインを追加で得る重要度が減り、逆にパンを得る重要度は増えると考えられる。したがって適正な交換比率は手持ちの消費ベクトルによって値が変化する関数 $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}_{++}$ として捉える必要がある。この関数を消費者の**限界代替率** (marginal rate of substitution) と呼ぶ。

限界代替率を用いた消費者行動の分析は二つありうるが、ここでは第一の考え方として、この消費者が取引を停止する条件を求めてみよう[*1]。消費者の手持ちの所得が $m$ であり、価格 $p$ の下での取引が可能であるとき、$p \cdot x = m$ であるような点 $x$ から第一財を $t$ 個増やすために $x_2$ を売り払う状況を考えよう。このとき、到達する新しい消費ベクトルを $(x_1 + t, x_2 - at)$ とするならば、

$$p_1(x_1 + t) + p_2(x_2 - at) = m$$

でなければならない。しかし

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

であるから、差し引きすることで

$$p_1 t - a p_2 t = 0$$

が得られる。これを整理すると、

$$a = \frac{p_1}{p_2}$$

となる。したがってこの取引に関する交換比率は $a = \frac{p_1}{p_2}$ で与えられる。これが $\sigma(x)$ と一致していない限り、消費者は取引を続けようとするだろう。よって、取引を停止するときの手持ちの消費ベクトルの集合は以下のように表される。

$$f^\sigma(p, m) = \{x \in \Omega | p \cdot x = m,\ \sigma(x) = p_1/p_2\}.$$

この集合値関数を $\sigma$ に対応する**需要関数**と称する。注意して欲しいのは、第 2 章の需要関数とは異なり、この関数がなんらかの弱順序の最大点で表されるということは仮定されていないということである。実際、後に我々はこの関数が第 2 章の意味での「需要関数」になるための条件を議論するが、その条件が成り立っていない場合には、たとえこの関数が一価であったとしても、それは「需要候補」でしかなく、「需要関数」ではないのである。

[*1] 6.5 節でもう一つの分析について述べる。

## 6.2　連続微分可能な効用関数の限界代替率

引き続き $n=2$ かつ $\Omega=\mathbb{R}^2_{++}$ とする。いま、効用関数 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ が与えられており、連続微分可能かつ準凹で、さらに $\nabla u(x)\gg 0$ がすべての $x\in\Omega$ について成り立つとしよう。以降、この章を通じて、$\frac{\partial u}{\partial x_i}$ のことを $u_i$ と略記することにする。この関数を $x\in\Omega$ の付近で一次のテイラー展開をすると、

$$u(y)\approx u(x)+u_1(x)(y_1-x_1)+u_2(x)(y_2-x_2)$$

と書くことができる。この右辺を $v(y)$ と書くことにしよう。これを整理すると、

$$\begin{aligned} v(y)=v(x) &\Leftrightarrow u_1(x)(y_1-x_1)+u_2(x)(y_2-x_2)=0\\ &\Leftrightarrow u_1(x)(y_1-x_1)=u_2(x)(x_2-y_2)\\ &\Leftrightarrow \frac{u_1(x)}{u_2(x)}=\frac{x_2-y_2}{y_1-x_1}\end{aligned}$$

となる。この右辺の分数 $\frac{x_2-y_2}{y_1-x_1}$ は $v$ の値が変わらない「交換比率」であると考えられるため、上の式はこの消費者が点 $x$ を所持しているときに適正だと感じる交換比率を計算する式となっている。つまり、

$$\sigma(x)=\frac{u_1(x)}{u_2(x)} \tag{1}$$

が、この場合の限界代替率の定義である。

いま、$x\in f^\sigma(p,m)$ であるための条件を書くと、

$$p\cdot x=m,\ \frac{p_1}{p_2}=\sigma(x)=\frac{u_1(x)}{u_2(x)}$$

となる。ところが第 2 章の定理 2.1 より、この条件は $x\in f^u(p,m)$ と同値である。したがって我々はただちに以下の結果を得る。

**定理 6.1.** $n=2$ とし、$\Omega=\mathbb{R}^2_{++}$ とする。$u:\Omega\to\mathbb{R}$ が連続微分可能かつ準凹で、かつ $\nabla u(x)\gg 0$ をすべての点で満たしたとすると、(1) で与えられた限界代替率 $\sigma$ に関して、

$$f^\sigma=f^u$$

が成り立つ。

## 6.3　限界代替率に付随する効用関数

前節では、効用関数 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ を与えて、そこから限界代替率 $\sigma:\Omega\to\mathbb{R}$ を構成した。ところが実は逆に、限界代替率から効用関数を構成することもできる。次の定理はこの理

論において最も重要な役割を果たすものである。

**定理 6.2.** $n = 2$ とし、$\Omega = \mathbb{R}^2_{++}$ とする。このとき、任意の連続微分可能な関数 $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}_{++}$ に対して、関係 (1) を満たすような連続微分可能で強く増加的な関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ が存在する。また、$\sigma$ が $k$ 階連続微分可能ならば $u$ も $k$ 階連続微分可能に取れる。

**証明.** まず、$x \in \Omega$ をパラメータとする次の微分方程式

$$\dot{c}(z) = -\sigma(z, c(z)),\ c(x_1) = x_2 \tag{2}$$

を考え、これの解関数を $c(z; x)$ と書くことにする。なお、定理 7.5 や定理 7.6 では初期時刻 $x_1$ をパラメータとする議論は行っていなかったが、以下の関数

$$\tau(z, d, x_1) = -\sigma(z + x_1, d)$$

を用いて、

$$\dot{d}(z) = \tau(z, d(z), x_1),\ d(0) = x_2$$

という微分方程式を考えれば、この解 $d(z)$ と元の問題の解 $c(z)$ は関係 $c(z) = d(z - x_1)$ で互いに結びついており、下の微分方程式には定理 7.5 も 7.6 も適用可能である。したがって、解関数 $c(z; x)$ の性質は定理 7.5 や定理 7.6 で示したものがすべて使用可能である。

特に、任意の $x \in \Omega$ に対して、$z \mapsto c(z; x)$ の定義域を $I_x$ と書くとき、これは定理 7.5 から開区間であり、また $\dot{c}(z; x) < 0$ からこの関数は $z$ について減少的であることがわかる。ここで、任意に与えた $y \in \Omega$ に対して、$(z^*, c(z^*; x))$ が $y$ の定数倍になるような $z^* \in I_x$ が必ずただひとつだけ存在することを示そう。この条件は $z^* y_2 = c(z^*; x) y_1$ と書き直せることに注意する。

最初に $x_1 y_2 \le x_2 y_1$ であるときを考える。もし $z y_2 > x_2 y_1$ となる $z \in I_x$ が存在すれば、

$$c(z; x) y_1 < c(x_1; x) y_1 = x_2 y_1 < z y_2$$

となるため、中間値の定理からある $z^* \in I_x$ について $c(z^*; x) y_1 = z^* y_2$ となる。$z y_2 > x_2 y_1$ となる $z \in I_x$ が存在しなければ、$1/N < x_1 y_2 \le x_2 y_1 < N$ となる $N$ を取り、

$$C = \{(v_1, v_2) \in \Omega | 1/N \le v_1 y_2 \le N, 1/N \le v_2 y_1 \le N\}$$

と定義すると、これはコンパクトである。したがって補題 7.2 から、ある $z^+ \in I_x$ が存在して、$x_1 < z^+$ であり、かつ $z^+ < z$ となる任意の $z \in I_x$ に対して $(z, c(z; x)) \notin C$ と

ならなければならない。一方、仮定から $z \in I_x$ ならば $zy_2 \le x_2y_1 < N$ である。よって $z > z^+$ となる $z \in I_x$ をひとつ取れば

$$1/N < x_1y_2 < zy_2 \le x_2y_1 < N,\ c(z;x)y_1 \le c(x_1;x)y_1 = x_2y_1 < N$$

であるから、$c(z;x)y_1 < 1/N < x_1y_2 < zy_2$ でなければならない。よってふたたび中間値の定理から、$c(z^*;x)y_1 = z^*y_2$ となる $z^* \in I_x$ が存在しなければならない。$x_1 > x_2$ であるときも同様にして $z^*$ の存在を示せる。また、$z^*$ の一意性は、$c(z;x)$ が $z$ について減少的であることから明らかである。

特に、与えられた $v \in \Omega$ に対しての上の $z^*$ を $u_v(x)$ と書くことにしよう。$u_v(x)$ は

$$v_1c(z;x) - v_2z = 0$$

の解であるが、定理 7.6 から左辺は連続微分可能であり、また

$$\frac{d}{dz}[v_1c(z;x) - v_2z] = -v_1\sigma(z, c(z;x)) - v_2 < 0$$

であるため、陰関数定理が適用可能である。したがって $u_v$ は連続微分可能である。また、$\sigma$ が $k$ 階連続微分可能ならば $u_v$ も $k$ 階連続微分可能である。

次に、$x, y \in \Omega$ とし、ただし $c(z;x) = c(z;y)$ となる $z$ がひとつでもあるとする。このとき、定理 7.2 からただちに、$c(\cdot;x) \equiv c(\cdot;y)$ となることがわかる。特に、$u_v(x) = u_v(y)$ である。逆に、$u_v(x) = u_v(y)$ であると仮定しよう。ここで、$z = u_v(x)$ とすると、$(z, c(z;x))$ と $(z, c(z;y))$ は共に $v$ の定数倍であり、したがって $c(z;x) = c(z;y)$ であるから、$c(\cdot;x) \equiv c(\cdot;y)$ となる。したがって $u_v(x) = u_v(y)$ であることと、$c(\cdot;x) \equiv c(\cdot;y)$ となることは同値である。

特に、$y \gneq x$ とすると、$z > x_1$ ならば $c(z;x) < x_2$ であるため、$c(z;x) = y_2$ となる $z$ は存在し得ない。したがって、$c(z;x) = c(z;y)$ となる $z$ も存在することはあり得ない。ここで仮に $u(y) \le u(x)$ であったと仮定しよう。各 $z \in I_x$ に対して、$(w, c(w;y))$ が $(z, c(z;x))$ の定数倍である $w$ がただ一つ存在するので、それを $w(z)$ と書く。この $w(z)$ は次の方程式

$$wc(z;x) = zc(w;y)$$

の解であるため、陰関数定理から連続微分可能である。$z = u(x)$ のときには、$v_2z = v_1c(z;x)$ であるため、$v_2w(z) = v_1c(w(z);y)$ でなければならず、これは $w(z) = u(y)$ を意味する。一方、上で考察したことから $y \gg (w, c(w;y))$ となることはあり得ないため、$w(x_1) > x_1$ である。したがって

$$w(x_1) > x_1,\ w(u(x)) = u(y) \le u(x)$$

を得たので、中間値の定理から、$w(z) = z$ を満たす $z \in I_x$ が存在しなければならないが、これは $c(z;x) = c(z;y)$ を意味し、先ほどの推論と矛盾してしまう。よってこれはあり得ない。以上から、我々は $u$ が強く増加的であるという結論を得る。

定義から、明らかに $u_v(tv) = t$ である。ここで $y = (u_x(tv), c(u_x(tv); tv))$ とすれば、$y = (u_x(tv)/x_1)x$ と書ける。ところが一方で $y_1 = u_x(tv)$ であり、よって $y_2 = c(y_1; y) = c(y_1; tv)$ であるため、$u_v(y) = u_v(tv)$ である。ここから、

$$t = u_v(tv) = u_v((u_x(tv)/x_1)x)$$

が得られる。これを $t$ について微分すると、連鎖律から

$$1 = (\nabla u_v((u_x(tv)/x_1)x) \cdot x)(\nabla u_x(tv) \cdot v)/x_1$$

となる。特に $t$ として $t^* = u_v(x)/v_1$ を取れば、上と同様の議論で $u_x(t^*v) = x_1$ が示せるため、

$$\nabla u_v(x) \neq 0$$

を得る。よって $u_v$ は非退化である。

最後に、すでに述べた結果から

$$u_v(x) = u_v(z, c(z; x))$$

である。これの両辺を $z = x_1$ の点で $z$ について微分すれば、

$$0 = \frac{\partial u_v}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial u_v}{\partial x_2}(x)\sigma(x)$$

が得られる。したがって、

$$\sigma(x) = \frac{\frac{\partial u_v}{\partial x_1}(x)}{\frac{\partial u_v}{\partial x_2}(x)}$$

となり、(1) 式が確かめられた。以上で証明が完成した。 ■

以上より、限界代替率関数 $\sigma$ から始めたモデルは、効用関数 $u$ で始めるモデルに還元することができる。しかし、実は重要な注意が一つあって、上で発見した $u$ に対して、$f^\sigma = f^u$ となるかどうかは未知数なのである。$u$ が準凹であれば定理 6.1 から $f^\sigma = f^u$ となるため、これは $u$ が準凹にならない場合がありうるということを示している。

なぜ $u$ が準凹でないとうまくいかないかを見るために、いま $u$ が準凹でなかったとしよう。すると、ある $x, y \in \Omega$ と $t \in ]0, 1[$ に対して、

$$u((1-t)x + ty) < \min\{u(x), u(y)\}$$

が成り立つ。$z = (1-t)x + ty$ として、$p = (\sigma(z), 1), m = p \cdot z$ と定義しよう。定義から明らかに $z \in f^{\sigma}(p, m)$ である。一方、

$$p \cdot z = (1-t)p \cdot x + tp \cdot y$$

であるから、$p \cdot x \leq m$ か $p \cdot y \leq m$ のどちらかが必ず成り立つ。そして $u(x) > u(z)$ かつ $u(y) > u(z)$ であるため、どちらの場合でも $z \notin f^u(p, m)$ とならなければならない。このように、$f^{\sigma} = f^u$ となるためには $u$ の準凹性は不可欠なのである。

## 6.4　弱弱公理と準凹性

前節で述べたように、$u$ から始まるモデルが $\sigma$ から始まるモデルと整合的であるためには、準凹性が必要であった。しかし一方で、$\sigma$ から始まるモデルが準凹な $u$ に対応しているような前提条件を我々は置いていない。そして、準凹な $u$ から (1) 式で定義されるような $\sigma$ は、なんらかの追加条件が課せられているはずである。その条件を特定してみよう。

いま、$x \in f^{\sigma}(p, m)$ であるとしよう。このとき、$p \cdot x = m$ であり、かつ $p$ はベクトル $(\sigma(x), 1)$ の定数倍である。ここで、$p \cdot y \leq m$ かつ $u(y) > u(x)$ となる $y$ が存在するとまずいことになるのであった。これを禁止する条件として、次のような条件を考えよう。仮に $p \cdot y \leq m$ であるときには、$y \in f^{\sigma}(q, w)$ となる $(q, w)$ に対して、$q \cdot x \geq w$ である。これは第 9 章で後に扱う**弱弱公理** (weak weak axiom) と本質的に類似した条件である。

これを整理すると、

$$p \cdot y \leq p \cdot x \Rightarrow q \cdot x \geq q \cdot y$$

となる。特に $p = (\sigma(x), 1)$ と $q = (\sigma(y), 1)$ にこれを適用すると、$\sigma$ についての条件

$$\sigma(x)y_1 + y_2 \leq \sigma(x)x_1 + x_2 \Rightarrow \sigma(y)x_1 + x_2 \geq \sigma(y)y_1 + y_2 \tag{3}$$

を得る。この関係 (3) を、$\sigma$ についての**弱弱公理** (weak weak axiom) と呼ぼう。

次の定理がこの条件を理解するのに本質的に重要である。

**定理 6.3.** $n = 2$ とし、$\Omega = \mathbb{R}^2_{++}$ として、$\sigma : \Omega \to \mathbb{R}_{++}$ は連続微分可能であるとする。このとき、以下の 4 条件は同値である。

(i) $\sigma$ は弱弱公理を満たす。

(ii) 次の関数

$$a(x) \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}(x)\sigma(x) \tag{4}$$

に対して、$a(x) \leq 0$ がすべての点で成り立つ。

(iii) $f^{\sigma} = f^{\succsim}$ となる $\Omega$ 上の弱順序 $\succsim$ が存在する。

(iv) $f^\sigma = f^u$ となる連続微分可能、強く増加的、準凹、非退化な関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ が存在する。

さらに $\sigma$ が $k$ 階連続微分可能ならば、(iv) の $u$ は $k$ 階連続微分可能に取れる。

**証明.** (iv) が (iii) を意味するのは明らかである。

(iii) を仮定し、$x, y \in \Omega$ に対して

$$\sigma(x)y_1 + y_2 \le \sigma(x)x_1 + x_2$$
$$\sigma(y)x_1 + x_2 < \sigma(y)y_1 + y_2$$

であるとしよう。$p = (\sigma(x), 1),\ q = (\sigma(y), 1)$ とし、$m = p \cdot x,\ w = q \cdot y$ とする。このとき、$x \in f^\sigma(p, m) = f^{\succsim}(p, m)$ かつ $p \cdot y \le m$ であるため、$x \succsim y$ となる。一方、$y \in f^\sigma(q, w) = f^{\succsim}(q, w)$ かつ $q \cdot x < w$ であるため、$y \succsim x$ であるが、一方で $q \cdot x < w$ であることから $x \notin f^\sigma(q, w) = f^{\succsim}(q, w)$ となるため、$y \succ x$ である。ところがこれは上で示したことと矛盾するため、あり得ない。故に $\sigma$ は弱弱公理を満たし、(i) が示される。

今度は (ii) を仮定して (iv) を示そう。ひとつ補題が必要である。

**補題 6.1.** $\Omega = \mathbb{R}^2_{++}$ とし、$u : \Omega \to \mathbb{R}$ は強く増加的かつ連続であるとする。このとき、任意の $x \in \Omega$ に対し、$x_1$ を含む開区間 $I$ 上で定義された関数 $c : I \to \mathbb{R}_{++}$ で、以下の条件

$$u(y) = u(x) \Leftrightarrow y_1 \in I,\ y_2 = c(y_1)$$

を満たすものがただ一つ存在する。そして、$u$ が準凹であることは関数 $c(y_1)$ が常に凸であることと同値であり、また $u$ が狭義準凹であることは関数 $c(y_1)$ が常に狭義凸であることと同値である。*2。

この補題の証明は補論において行う。この関数 $c(y_1)$ のことを、点 $x$ を通る**無差別曲線** (indifference curve) と呼ぶ。

さて、定理 6.2 から、関係 (1) をすべての点で満たす連続微分可能、強く増加的で非退化な実数値関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ が存在する。いま $x \in \Omega$ を任意に取り、ここを通る無差別曲線 $c(y_1)$ を取る。このとき、この関数 $c(y_1)$ は $x_1$ を含むある開区間 $I$ 上で定義され、

$$u(y_1, c(y_1)) = u(x_1, x_2),\ c(x_1) = x_2$$

を満たす。陰関数定理からこの $c$ は連続微分可能であり、連鎖律から

$$c'(y_1) = -\frac{u_1(y_1, c(y_1))}{u_2(y_1, c(y_1))} = -\sigma(y_1, c(y_1))$$

*2 実のところ、$u$ が連続微分可能で $\nabla u(x) \gg 0$ ならば、(1) を満たす $\sigma$ について定理 6.2 の方程式 (2) の解 $c(z; x)$ が $c(z)$ と一致する。

を得る。$\sigma$ は連続微分可能なので $c$ は二階連続微分可能であり、

$$\begin{aligned} c''(y_1) =& -\frac{\partial\sigma}{\partial x_1}(y_1, c(y_1)) - \frac{\partial\sigma}{\partial x_2}(y_1, c(y_1))c'(y_1) \\ =& -\frac{\partial\sigma}{\partial x_1}(y_1, c(y_1)) + \frac{\partial\sigma}{\partial x_2}(y_1, c(y_1))\sigma(y_1, c(y_1)) \\ =& -a(y_1, c(y_1)) \end{aligned} \tag{5}$$

を得る。したがって (ii) より、$c(y_1)$ は凸関数であり、よって $u$ は準凹である。定理 6.1 から $f^\sigma = f^u$ であり、故に (iv) が示された。また同時に、$\sigma$ が $k$ 階連続微分可能であれば、定理 6.2 からこの $u$ は $k$ 階連続微分可能に取れるため、最後の主張も示されたことになる。

以上から、(iv) は (iii) を含意し、(iii) は (i) を含意し、(ii) は (iv) を含意することが示されたので、あとは (i) が (ii) を含意することを示せば証明が終わる。まず、$x \in \Omega$ を任意に取り、$v = (-1, \sigma(x))$ とする。そして $x(t) = x + tv$ として、$p = (\sigma(x), 1)$ とし、$p(t) = (\sigma(x(t)), 1)$ とする。このとき、

$$p \cdot x(t) = p \cdot x + tp \cdot v = p \cdot x$$

であり、したがって弱弱公理 (3) を適用することで、

$$p(t) \cdot x \geq p(t) \cdot x(t)$$

を得る。これを加えることで、任意の $t > 0$ について、$x(t) \in \Omega$ である限り

$$(x(t) - x) \cdot (p(t) - p) \leq 0$$

であるという関係を得るが、これを $t^2$ で割って $t \downarrow 0$ とすれば、

$$\begin{aligned} 0 \geq& \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t^2}(x(t) - x) \cdot (p(t) - p) \\ =& \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} v \cdot (p(t) - p) \\ =& \lim_{t\downarrow 0} -\frac{1}{t}(\sigma(x(t)) - \sigma(x)) \\ =& \frac{\partial\sigma}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial\sigma}{\partial x_2}(x)\sigma(x) \\ =& a(x) \end{aligned}$$

となって、確かに (ii) が示された。以上で証明が完成した。■

以上によって、弱弱公理 (3) こそが $f^\sigma$ が需要関数であることの必要十分条件であることが判明した。ただし、$f^\sigma$ が一価関数であるかどうかが判然としないため、前章までの

結果ともう少し精密にするために、もうひとつ公理を導入しておく。それは、$x,y\in\Omega$ について、$x\neq y$ であるときには必ず

$$\sigma(x)y_1+y_2\le\sigma(x)x_1+x_2\Rightarrow\sigma(y)x_1+x_2>\sigma(y)y_1+y_2 \tag{6}$$

が成り立つ、というものである。この性質は**弱公理** (weak axiom) と呼ぶことにする。

**定理 6.4.** $n=2$ とし、$\Omega=\mathbb{R}^2_{++}$ として、$\sigma:\Omega\to\mathbb{R}_{++}$ は連続微分可能であるとする。このとき、以下の４条件は同値である。

(I) $\sigma$ は弱公理を満たす。
(II) $f^\sigma$ は一価で、顕示選好の弱公理を満たす。
(III) $f^\sigma$ は一価で、かつ $f^\sigma=f^{\succsim}$ となる弱順序が存在する。
(IV) $f^\sigma=f^u$ となる連続微分可能、強く増加的、狭義準凹、非退化な関数 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ が存在する。

また、$\sigma$ が $k$ 階連続微分可能ならば、(IV) の $u$ は $k$ 階連続微分可能に取れる。特に、(4) 式で定義した関数 $a(x)$ が常に負であるならば、$\sigma$ は弱公理を満たす。

**証明.** まず、(IV) を仮定すれば (III) がただちに得られる。次に (III) を仮定しよう。このとき、$x,y\in\Omega$ とし、$x\neq y$ で、$x=f^\sigma(p,m)$ かつ $y=f^\sigma(q,w)$ であり、かつ $p\cdot y\le m$ とする。すると $x\succ y$ でなければならない。もし $q\cdot x\le w$ ならば $y\succ x$ であるが、これはあり得ないため、$q\cdot x>w$ が得られる。よって $f^\sigma$ は顕示選好の弱公理を満たし、(II) が得られる。

次に (II) を仮定しよう。$x,y\in\Omega$ かつ $x\neq y$ とし、

$$\sigma(x)y_1+y_2\le\sigma(x)x_1+x_2$$

とする。ここで $p=(\sigma(x),q)$ として $m=p\cdot x$ とすると、$x=f^\sigma(p,m)$ かつ $p\cdot y\le m$ である。一方、$q=(\sigma(y),1)$ とし、$w=q\cdot y$ とすると、$y=f^\sigma(q,w)$ であるため、顕示選好の弱公理から $q\cdot x>w$ とならなければならないが、これは

$$\sigma(y)x_1+x_2>\sigma(y)y_1+y_2$$

を意味する。したがってたしかに $\sigma$ は弱公理を満たし、(I) が得られる。

今度は (I) を仮定しよう。まず $f^\sigma$ が一価であることを示す。仮に $x,y\in f^\sigma(p,m)$ かつ $x\neq y$ であるとしよう。$p=(\sigma(x),1)$ と仮定しても一般性を失わないが、このとき $f^\sigma$ の定義から $p=(\sigma(y),1)$ でもある。したがって $\sigma(x)=\sigma(y)$ であるが、一方で $p\cdot x=p\cdot y$ であり、よって

$$\sigma(x)x_1+x_2=\sigma(x)y_1+y_2,\ \sigma(y)x_1+x_2=\sigma(y)y_1+y_2$$

となって弱公理に矛盾してしまう。よってこれはあり得ず、たしかに $f^\sigma$ は一価関数である。

一方、明らかに弱公理は弱弱公理より強いから、定理 6.3 により、$f^\sigma = f^u$ となる連続微分可能、強く増加的、非退化で準凹な関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ が存在する。ここで、$x \neq y$ を満たす $x, y \in \Omega$ と $t \in ]0, 1[$ を取り、$z = (1-t)x + ty$ とする。$p = (\sigma(z), 1)$ として、$m = p \cdot z$ とする。このとき $z = f^\sigma(p, m)$ であるが、一方で

$$p \cdot z = (1-t)p \cdot x + tp \cdot y$$

であるから、$p \cdot x \le m$ あるいは $p \cdot y \le m$ のどちらかが成り立つ。前者が成り立てば、$x \neq f^\sigma(p, m)$ なので、$u(x) < u(z)$ となる。後者が成り立つ場合も同様に $y \neq f^\sigma(p, m)$ なので、$u(y) < u(z)$ となる。よって

$$u(z) > \min\{u(x), u(y)\}$$

が得られたので、たしかに $u$ は狭義準凹である。以上から、(I), (II), (III), (IV) はすべて互いに同値である。また、$\sigma$ が $k$ 階連続微分可能ならば、いまの議論で用いた $u$ は $k$ 階連続微分可能であることもわかる。

最後に、$a(x) < 0$ が常に成り立つとしよう。このとき、定理 6.3 の (ii) が成り立つから、$f^\sigma = f^u$ となるような連続微分可能、強く増加的、準凹、かつ非退化な $u$ が存在する。さらに (5) 式から、$u$ の無差別曲線 $c(y_1)$ は狭義凸でなければならず、したがって $u$ は狭義準凹であり、(IV) が成り立つ。以上で証明が完成した。 ■

以下の系は、第 5 章をよく読んだ読者ならば簡単に理解できるであろう。

**系 6.1.** $n = 2$ とし、$\Omega = \mathbb{R}^2_{++}$ で、$\sigma : \Omega \to \mathbb{R}_{++}$ は連続微分可能で弱公理を満たすとする。このとき、$f^\sigma$ が $(p, m) \in \mathbb{R}^2_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ のまわりで連続微分可能であることと、(4) 式で定義された $a(x)$ が $x^* = f^\sigma(p, m)$ の点で $a(x^*) < 0$ を満たすことは同値である。

**証明.** まず、$a(x^*) < 0$ とする。ここで

$$F(x, p, m) = \begin{pmatrix} \sigma(x) - \frac{p_1}{p_2} \\ p \cdot x - m \end{pmatrix}$$

と定義すると、定理 2.1 から $x = f^\sigma(q, w)$ であることと $F(x, q, w) = 0$ は同値である。

そこで $p_1 = p_2\sigma(x^*)$ であることを利用すると

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^*, p, m) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x^*, p, m) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x^*, p, m) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x^*, p, m) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}(x^*) \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} \\
&= p_2 \frac{\partial \sigma}{\partial x_1}(x^*) - p_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}(x^*) \\
&= p_2 \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x_1}(x^*) - \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}(x^*)\sigma(x^*) \right] = p_2 a(x^*) < 0
\end{aligned}$$

となる。したがって $F$ には陰関数定理が適用可能で、ここから $f^\sigma$ が $(p, m)$ のまわりで連続微分可能であるという帰結を得る。

逆に $f^\sigma$ が $(p, m)$ のまわりで連続微分可能であるとしよう。このとき、$g(x) = (\sigma(x), 1)$ と定義すると、これは $f^\sigma$ の逆需要関数である。ここから第 5 章の定理 5.2 の証明と同様に、$f^\sigma$ のスルツキー項 $s_{11} = \frac{\partial f^\sigma}{\partial p_1} + \frac{\partial f^\sigma}{\partial m} f^\sigma$ を用いて

$$\frac{1}{s_{11}(g(x^*), g(x^*) \cdot x^*)} = a(x^*)$$

が得られる[*3]。したがって $a(x^*) \neq 0$ であるが、定理 6.3 から $a(x^*) \leq 0$ であったため、$a(x^*) < 0$ を得る。以上で証明が完成した。 ■

最後に、小さいが大切な注意をしておきたい。我々は定理 6.1 から、定理 6.3 や定理 6.4 にある $f^\sigma = f^u$ という結果を導出した。しかし、$f^\sigma$ の定義域についてはなにも触れていない。つまり、$(p, m) \in \mathbb{R}^2_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ の取り方によっては、$f^\sigma(p, m) = \emptyset$ となることがあり得る。ただし、定理 6.1 の証明を読み直せばわかるように、$f^\sigma(p, m) = f^u(p, m)$ となることの根拠は定理 2.1 であり、これは必要十分条件で書かれている。ここから容易にわかるように、本章の定理において $f^\sigma = f^u$ とは、$f^\sigma(p, m)$ が空集合であるときには $f^u(p, m)$ も空集合である、という主張も含んでいる。つまり、$f^\sigma$ が空でない点の集合は $f^u$ が空でない点の集合と完全に一致し、そこまで含めてこれらふたつの関数は一致するのである。

## 6.5　改善過程の安定性

以上の定理から、$\sigma$ を用いた理論は弱公理の下で普通の効用関数を用いる理論に置き換えが可能であることがわかった。したがって、限界代替率を考察することで得られる理論

---

[*3] いま、$n = 2$ なので $g$ のアントネッリ行列は $1 \times 1$ 行列であり、計算するとこれが $a(x)$ と一致することがわかる。

上の広がりはそこまでないように見えるかもしれない。しかしながら、限界代替率を用いたモデルは、効用関数を用いたモデルとは**消費者が知っていることについての仮定**が異なるのである。効用関数を用いたモデルでは、消費者は自身の効用関数を知っていると解釈されたので、それを最大化しさえすれば取引停止点にたどり着けた。しかし、限界代替率モデルでは、消費者は手持ちが $x$ であるときに $\sigma(x)$ を知ることはできると仮定されているが、それ以上はなにも仮定されていない。ということは、$f^\sigma(p,m)$ の点を消費者が見つけることができるという保証はどこにもないことになる。

これを解決するために与えられる新たな考え方が**改善過程** (improving process) である。改善過程は、以下の微分方程式

$$\dot{x}(t)=h(x(t);p,m) \tag{7}$$

で与えられる。ただし、関数 $h(x;p,t)$ は $x$ について局所リプシッツであり、さらに以下の条件を満足しなければならない。第一に、$p\cdot x=m$ であるならば、

$$p_1h_1(x;p,m)+p_2h_2(x;p,m)=0 \tag{8}$$

でなければならない。第二に、$p\cdot x\le m$ かつ $x\notin f^\sigma(p,m)$ ならば、

$$\sigma(x)h_1(x;p,m)+h_2(x;p,m)>0 \tag{9}$$

でなければならない。第三に、$x\in f^\sigma(p,m)$ ならば

$$h(x;p,m)=0 \tag{10}$$

でなければならない。

なぜこれを改善過程と呼ぶかを理解するために、以下の補題を導入しよう。

**補題 6.2.** $n=2$ で $\Omega=\mathbb{R}^2_{++}$ とし、$\sigma:\Omega\to\mathbb{R}_{++}$ は連続微分可能とする。また、$u:\Omega\to\mathbb{R}$ は関係 (1) を満たす連続微分可能な関数とする。$(p,m)\in\mathbb{R}^2_{++}\times\mathbb{R}_{++}$ を任意に取り、$x(t)$ は区間 $I$ 上で定義された改善過程 (7) の解で、ある $t_0\in I$ において $p\cdot x(t_0)=m$ であるとする。このとき、以下の主張が成り立つ。

1) $p\cdot x(t)=m$ が常に成り立つ。
2) $x(t)\notin f^\sigma(p,m)$ であれば $\frac{d}{dt}u(x(t))>0$ である。
3) $x(T)\in f^\sigma(p,m)$ ならば、任意の $t\in I$ について $x(t)=x(T)$ である。

**証明.** 記号の節約のために、予算制約を満たす消費計画の集合を

$$\Delta(p,m)=\{x\in\Omega|p\cdot x\le m\}$$

として与えておこう。そして、$x_0=x(t_0)$ とする。ここで、ある $t^+\in I$ において $p\cdot x(t^+)\ne m$ となるとしよう。議論は対称的なので、$t^+>t_0$ とする。$t^*=\max\{t\in$

$[t_0, t^+] | p \cdot x(t) = m\}$ とすると、$t_0 \le t^* < t^+$ かつ $p \cdot x(t^*) = m$ である。ここで $z = x(t^*)$ として、一つ座標を落とした微分方程式

$$\dot{y}_1(t) = h_1(y_1(t), (m - p_1 y_1(t))/p_2; p, m),\ y_1(t^*) = z_1$$

を考えると、この方程式は定理 7.2 の条件を満たすため、$t_0$ を含むある開区間上で定義された解 $y_1(t)$ が存在する。ここで $y_2(t) = (m - p_1 y_1(t))/p_2$ と定義すると、

$$p_1 y_1(t) + p_2 y_2(t) = m$$

となるが、一方で (8) 式から

$$\dot{y}_2(t) = -\frac{p_1 \dot{y}_1(t)}{p_2} = -\frac{p_1 h_1(y(t); p, m)}{p_2} = h_2(y(t); p, m)$$

となるため、この $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ は改善過程 (7) の解である。定理 7.2 から解は一意であるため、$t^*$ の十分近くでは $y(t) = x(t)$ とならねばならないが、これは十分 $t^*$ に近い $t > t^*$ について $p \cdot x(t) = m$ となることを意味し、矛盾である。よって、このような $t^+$ は存在せず、1) が成り立つ。

次に、$x(t) \notin f^\sigma(p, m)$ のとき、(9) より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} u(x(t)) &= \nabla u(x(t)) \cdot h(x(t); p, m)\\ &= u_2(x(t))[\sigma(x(t)) \cdot h_1(x(t); p, m) + h_2(x(t); p, m)] > 0\end{aligned}$$

となるため、確かに 2) が成り立つ。

最後に、$x(T) \in f^\sigma(p, m)$ である場合、(10) から、$y(t) \equiv x(T)$ は $y(T) = x(T)$ を満たす (7) の解であり、解の一意性命題から $y(t)$ と $x(t)$ は定義域の共通部分で一致する。しかし $y(t)$ の定義域は $\mathbb{R}$ 全体であるから、3) が成り立つ。以上で証明が完成した。 ■

この補題から、微分方程式 (7) は、$f^\sigma(p, m)$ に到達していない消費者が自分の状況を改善するために、予算制約を等号で満たす範囲で取引を続ける様子を描写したものであることがうかがえる。このために、この方程式は「改善過程」と呼ばれるのである。

特に、$u$ が準凹で、また $f^\sigma(p, m)$ が一点集合 $\{x^*\}$ であるときを考えよう。ここで

$$L(x) = u(x^*) - u(x)$$

とすると、この $L(x)$ はいわゆる**狭義のリアプノフ関数** (strict Lyapunov function) の条件を満たしていることがわかる。したがって $x^*$ は (7) の定常状態として局所漸近安定である。しかし、実は $n = 2$ のときにはもっとシャープな結果を導くことができる。

以降の議論のために用語をひとつ追加しよう。改善過程 (7) が**安定的** (stable) であるとは、$f^\sigma(p, m) \neq \emptyset$ であるような任意の $(p, m) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ と、$p \cdot x_0 = m$ を満たす任

意の点 $x_0 \in \Omega \setminus f^\sigma(p,m)$ に対して、改善過程の $x(0) = x_0$ を満たす延長不能解 $x(t)$ は $\mathbb{R}_+$ 全体で定義され、しかもこれは $t \to \infty$ のときに $f^\sigma(p,m)$ の中のどこかへと収束することを言う。

このとき、以下の定理が成り立つ。

**定理 6.5.** $n = 2$ とし、$\Omega = \mathbb{R}^2_{++}$ とする。$\sigma : \Omega \to \mathbb{R}_{++}$ は連続微分可能であると仮定し、さらに $f^\sigma$ は一価関数であるとする。このとき、条件 (8), (9), (10) を満たすどんな $h$ についても改善過程 (7) が安定的であることと、$\sigma$ が弱弱公理を満たすことは同値である。

**証明.** まず、定理 6.2 で存在が保証された関数 $u$ を取る。もし $\sigma$ が弱弱公理を満たしていなければ、$a(x) > 0$ となる点 $x \in \Omega$ が少なくとも一カ所は存在しなければならない。このとき、$x$ を通る無差別曲線 $c(y_1)$ を取ると、

$$c''(x_1) = -a(x) < 0$$

である。そこで $p = (\sigma(x), 1)$ とし、$m = p \cdot x$ とする。$c'(x_1) = -\sigma(x)$ であるため、十分小さな $\varepsilon > 0$ が存在して、$0 < h < \varepsilon$ である限り、

$$c'(x_1 + h) < -\sigma(x)$$

である。したがって $y_1 = x_1 + h, y_2 = x_2 - h\sigma(x)$ とすると、$p \cdot y = m$ かつ $u(y) > u(x)$ とならなければならない。このような $y$ を一つ取って、改善過程の解 $x(t)$ で $x(0) = y$ を満たすものを取ってこよう。このとき、$u(y) > u(x)$ であるため、$x(t)$ は絶対に $x$ に収束せず、したがってこの場合には改善過程は絶対に安定的にならない。

逆に、$\sigma$ が弱弱公理を満たしていたとしよう。定理 6.4 から、$\sigma$ が弱弱公理を満たし、かつ $f^\sigma$ が一価関数であれば、$\sigma$ は弱公理も満たす。よっていまの仮定では $\sigma$ は弱公理を満たしていることになる。ここで、ここで、$f^\sigma(p,m) \neq \emptyset$ となる $(p,m) \in \mathbb{R}^2_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ を任意に取り、$x^* = f^\sigma(p,m)$ であるとする。このとき、$p \cdot x = m$ かつ $x \neq x^*$ であるならば、

$$\sigma(x^*)x_1 + x_2 = \sigma(x^*)x_1^* + x_2^*$$

である。もし $x \neq x^*$ であれば、弱公理から

$$\sigma(x)x_1 + x_2 < \sigma(x)x_1^* + x_2^*$$

を得るので、これらを引き算することで

$$\sigma(x^*)(x_1 - x_1^*) = x_2^* - x_2 > \sigma(x)(x_1 - x_1^*)$$

がわかり、結局我々は

$$(\sigma(x) - \sigma(x^*))(x_1 - x_1^*) < 0$$

を得る。一方で (8) 式と (9) 式より、

$$\sigma(x^*)h_1(x;p,m) + h_2(x;p,m) = 0,$$
$$\sigma(x)h_1(x;p,m) + h_2(x;p,m) > 0$$

が得られるため、

$$\sigma(x^*)h_1(x;p,m) = -h_2(x;p,m) < \sigma(x)h_1(x;p,m)$$

が示される。以上から、

$$h_1(x;p,m)\begin{cases} > 0 & \text{if } x_1 < x_1^*, \\ < 0 & \text{if } x_1 > x_1^* \end{cases}$$

を得ることができる。さらに (8) より、

$$h_2(x;p,m)\begin{cases} < 0 & \text{if } x_2 > x_2^*, \\ > 0 & \text{if } x_2 < x_2^* \end{cases}$$

も得られる。したがって、$p \cdot x = m$ となる $x \neq x^*$ を取る限り、改善過程 (7) の延長不能解 $x(t)$ で $x(0) = x$ を満たすものは、値を次のコンパクト集合

$$C_x = \{(1-s)x + sx^* | s \in [0,1]\}$$

に持たなければならない。もし延長不能解 $x(t)$ の定義域 $I$ について $\sup I < +\infty$ であるとすれば、$I^* = [0, \sup I]$ としたとき、$I^* \times C_x$ はコンパクト集合であるため、補題 7.2 からある $t \in I$ について $(t, x(t)) \notin I^* \times C_x$ となることになるが、このようなことはあり得ないため矛盾が生ずる。したがって $\sup I = +\infty$ であり、よって $I$ は $\mathbb{R}_+$ を含まなければならない。ここで、

$$L(x) = u(x^*) - u(x)$$

と定義すると、$L(x^*) = 0$ で、$p \cdot x \le m$ かつ $x \neq x^*$ ならば $L(x) > 0$ で、さらに改善過程の解 $x(t)$ について、$x(t) \neq x^*$ ならば必ず

$$\frac{d}{dt}L(x(t)) < 0$$

となる。そこで、仮にある $x \in \Omega$ について、$p \cdot x = m$ であるが、$x(0) = x$ を満たす (7) の延長不能解 $x(t)$ が $\lim_{t\to\infty} x(t) \neq x^*$ となると仮定しよう。このとき、ある $\varepsilon > 0$ と単調数列 $(t^k)$ が存在して、$t^k \to \infty$ でありながら、$\|x(t^k) - x^*\| \ge \varepsilon$ を常に満たす。$x^k = x(t^k)$ とすると、すでに述べたとおり、これはコンパクト集合 $C_x$ 上の点列である。次に $M = \inf_{t\ge 0} L(x(t))$ としよう。$M > 0$ であると仮定すると、

$$D = \{x \in C_x | L(x) \ge M\},\ K = \min\{\nabla u(x) \cdot h(x;p,m) | x \in D\}$$

とすると、$K>0$ であり、$\frac{d}{dt}L(x(t)) \leq -K$ がすべての $t \geq 0$ について成り立つ。これは $L(x(t)) \to -\infty$ を意味するが、$L(x)$ は非負値関数なので矛盾が生ずる。よって $M=0$ でなければならない。$L(x(t))$ は $t$ について減少的なので、$L(x^k) \to 0$ でなければならない。ここで部分列を取って $x^k \to x^+$ となる点 $x^+ \in C_x$ の存在を仮定してよい。このとき、$\|x^+ - x^*\| \geq \varepsilon$ であるが、一方で $L$ の連続性から $L(x^+)=0$ であり、よって $x^+ = x^*$ である。これは矛盾であるから、$\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$ でなければならないことがわかる。よって、改善過程 (7) はたしかに安定的である。以上で証明が完成した。 ■

したがって、通常のモデル（$u$ に連続微分可能性と増加性、狭義準凹性を認める立場）で議論することを念頭に置く限り、$\sigma$ で議論したモデルの帰結は効用最大化モデルと同じ結果をもたらす。一方で、効用関数で議論できないモデルを構築すると、改善過程の結果として正しい取引停止点を見つけることができない可能性を考慮しなければならない。これが、限界代替率を用いた分析が教える結論である。

## 6.6　拡張の可能性

ここまでの結果は $n=2$ かつ $\Omega = \mathbb{R}^n_{++}$ という仮定の下に得られた。$n \geq 3$ の場合や、$\Omega = \mathbb{R}^n_+$ の場合に拡張するとしたら何が起こるかについて、ここで簡単に触れておきたい。

まず、$n \geq 3$ として、$\Omega = \mathbb{R}^n_{++}$ の場合の話を議論しておこう。この場合、財が複数あるので、限界代替率は第 $i$ 財と第 $j$ 財の間で計られることになる。これを $\sigma_{ij}(x)$ と書く。解釈から明らかに、$\sigma_{ii}(x)=1$ でなければならない。また、限界代替率は互いに整合的でなければならないという仮定を置く。つまり、

$$\sigma_{ik}(x) = \sigma_{ij}(x)\sigma_{jk}(x) \tag{11}$$

と仮定する。これは以下のように説明される。いま第 $i$ 財がパン、第 $j$ 財がワイン、第 $k$ 財がりんごであるとする。このとき、パンとワインを交換する適正な比率が $1:10$、パンとりんごを交換する適正な比率が $1:2$ である個人は、りんごとワインを $1:5$ で交換するのが適正だと考えるであろうというのが、この (11) の意味である。ここで、「パンとワインを $1:10$ で交換してからりんごとワインを $1:5$ で交換するのと、単にパンとりんごを $1:2$ で交換するのは等価である」という考え方をするのは**間違っている**という点に注意が必要である。なぜなら、それを実行した場合、最終結果の前にパンとワインの交換がいったん起こってしまうので、手持ちの消費ベクトル $x$ が変わってしまう。すると限界代替率も変わってしまうはずである。(11) は手持ちが変わったときの仮定についてはなにも述べていないので、そのような解釈はできない。あくまで、仮想的に現状から取引する

際に、この消費者が考える適正な交換比率の間での整合性があるという条件が (11) なのである。

この条件 (11) の下で、まず

$$1 = \sigma_{ii}(x) = \sigma_{ij}(x)\sigma_{ji}(x)$$

であるから、

$$\sigma_{ji}(x) = \frac{1}{\sigma_{ij}(x)}$$

を得る。そこで $g_i(x) = \sigma_{in}(x)$ と定義すると、

$$\sigma_{ij}(x) = \sigma_{in}(x)\sigma_{nj}(x) = \frac{\sigma_{in}(x)}{\sigma_{jn}(x)} = \frac{g_i(x)}{g_j(x)}$$

となる。そして、$\sigma_{ij}(x) = \frac{p_i}{p_j}$ をすべての $i, j$ について満たすための必要十分条件は

$$\frac{g_i(x)}{g_j(x)} = \frac{p_i}{p_j}$$

で与えられる。したがって、

$$f^\sigma(p, m) = \{x \in \Omega | p \cdot x = m \text{ and } \exists \mu > 0,\ g(x) = \mu p\}$$

というのが、今回の取引停止点の集合である。

もし $g(x) = \lambda(x)\nabla u(x)$ となる連続微分可能で準凹な関数 $u$ と正値関数 $\lambda$ の組が存在すれば、定理 2.1 からただちに

$$f^\sigma = f^u$$

となることがわかる。しかし、そのための条件は弱弱公理だけでは足りない。なぜなら、このような $u$ と $\lambda$ が存在するためには、第５章で述べたように、$g$ のアントネッリ行列が対称でなければならないからである。この条件を今の $g$ に適用すると、

$$\frac{\partial \sigma_{in}}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_{in}}{\partial x_n}\sigma_{jn} = \frac{\partial \sigma_{jn}}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_{jn}}{\partial x_n}\sigma_{in}$$

が必要だということになる。第１０章で我々は、これと同値な条件として以下の公理を考えることになる。いま、関数 $x : [0, T] \to \Omega$ が**ヴィーユ曲線** (Ville's curve) であるとは、それが区分的に連続微分可能であり、かつ

$$g(x(t)) \cdot \dot{x}(t) > 0$$

を微分可能なすべての点で満たすことを言う。ヴィーユ曲線が存在しないとき、$\sigma = (\sigma_{ij})$ は**ヴィーユの公理** (Ville's axiom) を満たすと言う。Hurwicz and Richter (1979) は、こ

のヴィーユの公理がアントネッリ行列の対称性と同値であることを示した。これに関連して、「ヴィーユの公理と弱弱公理」のふたつが、連続微分可能で準凹な $u$ で $f^\sigma = f^u$ となるものが存在することの必要十分条件であることが知られている。

なお、ヴィーユ曲線が存在する場合には、改善過程の中に解軌道がヴィーユ曲線を含むものが存在することが示せる。したがって、定理 6.5 の方にもヴィーユの公理が必要である。さらに、安定性の条件は $n = 2$ の場合ほどクリアにならない。詳細は第１０章を見るか、Hosoya (2024b) を参照せよ。

以上の結果は $\Omega = \mathbb{R}^n_{++}$ で議論された。$\Omega = \mathbb{R}^n_+$ の場合には、ここまで簡単には議論できない。これは、主にふたつの理由による。まず、$n = 2$ であるとき、次の関数

$$u(x) = (x_1 + 1)(x_2 + 1)$$

に付随する限界代替率 $\sigma$ を計算しよう。簡単な計算により、

$$\sigma(x) = \frac{x_2 + 1}{x_1 + 1}$$

となることがわかる。特に $x = (0, 1)$ とすれば $\sigma(x) = 2$ となる。ここで、$p_1 = 3, p_2 = m = 1$ とすると、

$$\sigma(x) = 2 < 3 = \frac{p_1}{p_2}$$

となっている。現実の交換比率 $\frac{p_1}{p_2}$ よりも適正交換比率 $\sigma(x)$ の方が低いので、この消費者は第一財を売って第二財を買いたいという欲求を持っていることがわかる。しかし、彼の手持ちの第一財は 0 であるため、彼は第一財を売ることができない。

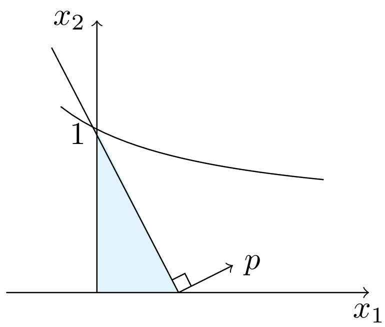


図 6.1　端点の状況

図 6.1 はこの状況を表している。対応する効用関数 $u$ の値を上昇させようとしても、負の消費が許されていないため、彼は効用を増加させることができない。そして、予算制約を満たす点の集合である青い三角形の中には、この点を通る無差別曲線の上に位置する点はひとつも存在しないのである。したがって $x$ は、交換比率と価格比が一致していないにもかかわらず、効用最大化点であり、取引はここで停止せざるを得ない。

この状況は、$x$ が $\mathbb{R}^n_{++}$ に位置していないことが原因で起こる。主にこの問題があったために、我々は当初 $\Omega$ として $\mathbb{R}^n_{++}$ だという仮定を置いたのであった。しかし、実は問題はこれだけではない。今度は次の関数を考えてみよう。

$$u(x) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}.$$

このとき、限界代替率は $\mathbb{R}^2_{++}$ 上では

$$\sigma(x) = \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$$

として定義される。一方で $x \notin \mathbb{R}^2_{++}$ のとき、$u$ がこの点で微分できないため、$\sigma$ は端点で定義できない。ただし実は拡張することができて、例えば $c > 0$ に対して $x = (c, 0)$ のところで $\sigma(x) = 0$ とすれば、これは $\sigma$ の連続的な拡張になる。そこで $p = (0, 1)$ とし、$m = 0$ としたとき、$x = (c, 0) \in f^\sigma(p, m)$ となるのだが、一方で $p \cdot 2x = m$ であり、$u(2x) = \sqrt{2}u(x) > u(x)$ なので、$x \notin f^u(p, m)$ となってしまうのである。

この問題は深刻である。端点に限界代替率を拡張させようとした場合、$\sigma(x) = 0$ や $\sigma(x) = +\infty$ といった例外を許容しなければならない場合は多い。しかし、そうなったときに、$f^\sigma$ と $f^u$ が一致しない場合があるのである。第 2 章の定理 2.1 では $x^*$ が $u$ の定義域の内部にあると仮定されていたのだが、ここで考えられている $u$ は $x = (c, 0)$ を定義域の内部に持っていないし、$x$ を定義域の内部に持つ連続微分可能な関数に局所的に拡張可能ですらない。そのために、このような問題が起こってしまうのである。

なお、$\Omega = \mathbb{R}^n_{++}$ の場合にはこの問題は起こらない。これは、$\sigma(x) = 0$ や $\sigma(x) = +\infty$ を許容しても同様である。実際、Hosoya (2024b) では $\sigma$ から導出される $g$ の値域が $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ であるとしか仮定していないので、$\sigma_{ij}(x) = 0$ となる可能性を排除していない。

最後に、本節では $\sigma$ に連続微分可能性を仮定したが、これを落とせるかどうかについて考えてみよう。残念ながら、$\sigma$ が連続性しか満たさない場合には、おなじ $\sigma$ に対して複数の (2) 式の解が求まってしまう場合がある。(2) 式は無差別曲線を求める微分方程式だから、これは同一の限界代替率に対して固定した点 $x$ を通る複数の無差別曲線が引けてしまうという可能性を意味している。これだと $\sigma$ から選好を定義することは難しい。また、$x$ の取り方に応じて整合的に無差別曲線を取ることはできるかもしれないが、その場合でも $u$ の候補は複数存在することにも注意しなければならない。これを突き詰めた結果構築されたのが、本書第 7 章で紹介されるマスコレルの反例である。一方で、(2) 式の解の一意性を保証するためだけであれば $\sigma$ が局所リプシッツであればよく、そして Hosoya (2024a) はその場合まで拡張した結果を示している。

## 6.7　補論：補題 6.1 の証明

ここでは補題 6.1 の証明を行う。

まず、$x \in \Omega$ を任意に取って固定し、$u(x) = u^*$ とする。ここで

$$I = \{y_1 > 0 | \exists y_2 > 0,\ u(y_1, y_2) = u^*\}$$

と定義すると、$I$ は少なくとも $x_1$ を含み、したがって非空である。また、$u$ は強く増加的であるから、任意の $y_1 \in I$ に対して、$u(y_1, y_2) = u^*$ となる $y_2$ はひとつしか存在し得ない。そこでそれを $c(y_1)$ と書くことにする。

最初に証明すべきは、$I$ が開区間であることである。いま、$x$ の定数倍でない $x^* \in \Omega$ を取ると、十分大きな $a > 0$ と十分小さな $b > 0$ を取れば、$ax^* \gg x \gg bx^*$ となるようにできる。すると、$u(ax^*) > u > u(bx^*)$ であるため、中間値の定理から $u(cx^*) = u^*$ となる $c > 0$ が存在する。これは $cx_1^* \in I$ を意味するが、$cx^* \neq x$ なので、$I$ は少なくともふたつ以上の点を含んでいる。

次に、$y_1, z_1 \in I$ かつ $y_1 < z_1$ であるとし、対応して $y_2 = c(y_1),\ z_2 = c(z_1)$ とする。$u$ は強く増加的であるから、$y_2 > z_2$ でなければならない。これは $c$ が減少的であることを意味する。次に、$y_1 < v_1 < z_1$ を満たすすべての $v_1$ に対して、$u$ が強く増加的であることにより、$u(v_1, z_2) < u^* < u(v_1, y_2)$ が成り立つ。したがって中間値の定理から、$u(v_1, v_2) = u^*$ となる $v_2$ が必ず存在する。これは $v_1 \in I$ を意味する。よって $I$ は区間である。

ここで、$I$ に最小数 $\bar{x}_1$ が存在したとする。このとき、対応して $\bar{x_2} = c(\bar{x}_1)$ とし、$\frac{y_2}{y_1} > \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}$ となる $(y_1, y_2) \in \Omega$ を取ると、上で $x$ と $x^*$ に行ったのと同様の議論から、$u(cy) = u^*$ となる $c > 0$ が存在する。このとき $\bar{x}_1$ は $I$ の最小数であったから $cy_1 \geq \bar{x}_1$ であるが、すると $y$ の取り方から $cy_2 > \bar{x}_2$ となって、$u$ が強く増加的であることと矛盾する。かくして、$I$ には最小数がないことがわかった。同様に $I$ には最大数もないので、$I$ は開区間である。

ここで、$u$ が準凹であるとしよう。このとき、$y_1, z_1 \in I$ とし、$y_2 = c(y_1), z_2 = c(z_1)$ とすると、$0 \leq t \leq 1$ である場合、

$$u((1-t)y + tz) \geq \min\{u(y), u(z)\} = u^*$$

である。したがって、

$$c((1-t)y_1 + tz_1) \leq (1-t)y_2 + tz_2 = (1-t)c(y_1) + tc(z_1)$$

となる。故に $c$ は凸関数である。もし $u$ が狭義準凹であるならば、$y_1 \neq z_1$ かつ $0 < t < 1$

とすると
$$u((1-t)y+tz) > \min\{u(y),u(z)\} = u^*$$
となるため、
$$c((1-t)y_1+tz_1) < (1-t)y_2+tz_2 = (1-t)c(z_1)+tc(z_1)$$
となり、よって $c$ は狭義凸である。

逆に、どんな $x \in \Omega$ に対しても、そこから構成した無差別曲線 $c$ が凸関数であるとしよう。$x, y \in \Omega$ を取る。一般性を失うことなく、$u(y) \geq u(x)$ であるとしよう。十分小さな $a > 0$ を取れば、$x \gg ay$ となるため、$u(x) > u(ay)$ である。したがって中間値の定理により、$a < b \leq 1$ となるある $b$ について $u(x) = u(by)$ が成り立つ。そこで $c$ を $x$ を通る無差別曲線として、ある $t \in [0,1]$ に対して $z = (1-t)x + tby$ とすると、$c$ の凸性から
$$c(z_1) \leq (1-t)c(x_1) + tc(by_1) = (1-t)x_2 + tby_2 = z_2$$
という結果を得る。これは $u(z) \geq u(x)$ を意味するため、
$$u((1-t)x+ty) \geq u((1-t)x+tby) = u(z) \geq u(x) = \min\{u(x),u(y)\}$$
となって、$u$ の準凹性が示される。次に $c$ が常に狭義凸であるとし、$x \neq y$ かつ $0 < t < 1$ としよう。$y$ が $x$ の定数倍ならば $y_1 > x_1$ かつ $y_2 > x_2$ であり、$u$ が強く増加的であることから、
$$u((1-t)x+ty) > u(x) = \min\{u(x),u(y)\}$$
となる。$y$ が $x$ の定数倍でない場合には、$u(x) = u(by)$ となる $b \leq 1$ について、$x_1 \neq by_1$ である。よって $c$ を $x$ を通る無差別曲線とすると、$z = (1-t)x + tby$ に対して
$$c(z_1) < (1-t)c(x_1) + tc(by_1) = (1-t)x_2 + tby_2 = z_2$$
となる。これは $u(z) > u(x)$ を意味するため、
$$u((1-t)x+ty) \geq u((1-t)x+tcy) = u(z) > u(x) = \min\{u(x),u(y)\}$$
を得る。したがってこの場合、$u$ は狭義準凹である。以上で証明が完成した。

## 文献案内

川俣 [10] によると、この限界代替率を用いた議論は、１８世紀のフランスにおける消費者行動の理論を研究したグループですでに扱われていたようである。それが効用最大化と結びつくことが指摘されたのはおそらく限界革命と言われる時代においてであり、直接的には Walras [9] の業績のひとつとして扱うことができると思われる。これに伴って、

Pareto [4] もこの問題を深く考えた書籍である。このパレートの業績は、後に Antonelli [1] によって先に解決した問題を扱ったに過ぎないとして Samuelson [6] 等で批判されたが、この批判の是非についての詳細は須田 [11] に詳しい。一方、Volterra [8] の批判を受けたパレートは [4] のフランス語版 ([5]) において積分可能性の条件がない消費者理論の構築を試みるが、うまくいったとは言いがたい。一方で、これら古典的な議論において準凹性の果たす役割はほとんど議論されていない。したがって、弱弱公理や弱公理はこれら古典的な文献には一切出てこない。

ヴィーユの公理は Ville [7] において提出された。Hurwicz and Richter (1979) は、この種の問題においてヴィーユの公理とフロベニウスの定理を結びつけた論文である。これらの現代的な取り扱い、および $\sigma$ から連続微分可能性を取って局所リプシッツ性で議論した論文に Hosoya [2] がある。

本章の中では細矢 [12] の第 7 章にある微分方程式の理論を無制限に使用した。他の微分方程式の参考文献としてはたとえばポントリャーギン [13] を挙げておく。ここにはリアプノフ関数の議論もより詳しく行われている。

# 参考文献


[1] Antonelli, G. B. (1886) *Sulla Teoria Matematica dell' Economia Politica.* Tipografia del Folchetto, Pisa. Translated by Chipman, J. S. and Kirman, A. P. (1971) "On the Mathematical Theory of Political Economy." In: Chipman, J. S., Hurwicz, L., Richter, M. K., Sonnenschein, H. F. (Eds.) *Preferences, Utility and Demand*, Harcourt Brace Jovanovich, New York. pp.333-364.

[2] Hosoya, Y. (2024b) "The Relationship between Consumer Theories with and without Utility Maximization." arXiv preprint 2404:10931.

[3] Hurwicz, L. and Richter, M. K. (1979) "An Integrability Condition with Applications to Utility Theory and Thermodynamics." Journal of Mathematical Economics 6, pp.7-14.

[4] Pareto, V. (1906) *Manuale di Economia Politica con una Introduzione alla Scienza Sociale.* Societa Editrice Libraria, Milano.

[5] Pareto, V. (1909) *Manuel d'Economie Politique.* Giard et E. Briere, Paris.

[6] Samuelson, P. A. (1950) "The Problem of Integrability in Utility Theory." Economica 17, pp.355-385.

[7] Ville, J. (1946) "Sur les Conditions d'Existence d'une Ophélimité Totale et d'un Indice du Niveau des Prix." Annales de l'Universìté de Lyon 8, Sec. A(3), pp.32-39.

[8] Volterra, V. (1906) "L'Economia Matematica ed il Nuovo Manuale del Prof. Pareto." Giornale degli Economisti 32, pp.296-301.

[9] Walras, L. (1874) *Eléments d' Economie Politique Pure, ou Theorie de la Richesse Sociale*, Lausanne.

[10] 川俣雅弘 (2018)「限界革命にかんする再考察」三田学会雑誌 111-3, pp.325-359.

[11] 須田伸一 (2007)「パレートと積分可能性問題」三田学会雑誌 99-4, pp.31-49.

[12] 細矢祐誉 (2025)『消費者行動の理論分析』丸善出版.

[13] レフ・ポントリャーギン (1968)『常微分方程式 新版』共立出版.