第一章

問題１：ド・モルガンの法則以外はいずれも簡単であるため省略し、4. の片方だけ示す。これは $x \in X$ について

$$\begin{aligned} x \in (\cup_\lambda A_\lambda)^c &\Leftrightarrow x \notin \cup_\lambda A_\lambda \\ &\Leftrightarrow \forall\lambda, x \notin A_\lambda \\ &\Leftrightarrow \forall\lambda, x \in A_\lambda^c \\ &\Leftrightarrow x \in \cap_\lambda A_\lambda^c \end{aligned}$$

という形で示すことができる。

問題２：例についてだけ示しておく。2 に関しては、$f(x) = x^2$ を考えて、$M_1 = \mathbb{R}_+$、$M_2 = -\mathbb{R}_+$ とすれば、$f(M_1 \cap M_2) = \{0\}$ であるが $f(M_1) \cap f(M_2) = \mathbb{R}_+$ である。3 も同じ f を用い、ただし値域を $\mathbb{R}_+$ とする。$M = \mathbb{R}_{++}$ とすると $M^c = -\mathbb{R}_+$ であり、したがって $f(M^c) = \mathbb{R}_+ \neq \{0\} = f(M)^c$ となる。

問題３：$y \in f(f^{-1}(N))$ ならば、ある $x \in f^{-1}(N)$ について $f(x) = y$ であるから、$y \in N$ となる。一方、$f(x) \equiv 0$ に対して $N = \mathbb{R}$ とすれば、$f(f^{-1}(N)) = \{0\} \neq \mathbb{R} = N$ となる。

問題４：まず (i) と (ii) の同値性を示す。$x \in M$ であれば $f(x) \in f(M)$ であるから、$x \in f^{-1}(f(M))$ となる。逆に $x \in f^{-1}(f(M))$ であるとすれば $f(x) \in f(M)$ であり、よってある $z \in M$ に対して $f(z) = f(x)$ であるが、f は単射なので $z = x$ であり、よって $x \in M$ を得る。故に (i) は (ii) を含意する。逆に (i) が成り立たないとすると、$x_1 \neq x_2$ かつ $f(x_1) = f(x_2)$ となる x_1, x_2 が存在するため、$M = \{x_1\}$ とすれば $x_2 \in f^{-1}(f(M)) \setminus M$ である。よって (i) の否定は (ii) の否定を含意し、したがってこのふたつは同値である。

次に (i) から (iii) を示す。$y \in f(M_1 \cap M_2)$ とすれば、ある $x \in M_1 \cap M_2$ について $y = f(x)$ となるため、$y \in f(M_1)$ かつ $y \in f(M_2)$ である。逆に $y \in f(M_1) \cap f(M_2)$ であるとき、ある $x_1 \in M_1$ と $x_2 \in M_2$ について $f(x_1) = f(x_2) = y$ であるが、f は単射なので $x_1 = x_2$ とならねばならず、したがって $x_1 \in M_1 \cap M_2$ であるため、$y \in f(M_1 \cap M_2)$ を得る。これで示された。特に (iii) のふたつの集合が共通部分を持たない場合、(iv) が得られる。

したがって、(iv) から (i) が示せれば (i),(iii),(iv) は互いに同値であるため、これを目

標とする。証明は対偶法による。仮に (i) が成り立たないとすれば、x_1, x_2 をうまく取ると $x_1 \neq x_2$ かつ $f(x_1) = f(x_2)$ となる。そこで $M_1 = \{x_1\}, M_2 = \{x_2\}$ とすれば、$f(M_1 \cap M_2) = \emptyset$ であるが $f(M_1) \cap f(M_2) = \{f(x_1)\}$ である。以上でこの部分の証明が完成した。

最後に、(i) と (v) の同値性を示す。まず (i) を仮定し、$M_1 \subset M_2$ とする。$y \in f(M_2 \setminus M_1)$ とすれば、$y = f(x)$ となる $x \in M_2 \setminus M_1$ が存在する。f は単射なので、$y = f(z)$ となる $z \in M_1$ は存在せず、よって $y \in f(M_2) \setminus f(M_1)$ である。逆に $y \in f(M_2) \setminus f(M_1)$ であるとすれば、$y = f(x)$ となる $x \in M_2$ は存在するが、$y = f(z)$ となる $z \in M_1$ は存在しない。これは $x \notin M_1$ を意味し、よって $y \in f(M_2 \setminus M_1)$ である。これで (v) が示された。逆に (i) の否定を仮定すると、ある x_1, x_2 について $x_1 \neq x_2$ かつ $f(x_1) = f(x_2)$ である。ここで $M_1 = \{x_1\}, M_2 = \{x_1, x_2\}$ とすれば、$M_1 \subset M_2$ であるが、$f(M_2) \setminus f(M_1) = \emptyset \neq \{f(x_2)\} = f(M_2 \setminus M_1)$ となって (v) の否定が示される。以上ですべての証明が終わった。

問題５：$g \circ f$ が全射なので g は全射であり、$h \circ g$ が単射なので g は単射である。よって g は全単射。そこで $h = h \circ g \circ g^{-1}$ や $f = g^{-1} \circ g \circ f$ も全単射である。

問題６：逆半順序 $\geqq$ を

$$\geqq = \{(x, y) | y \leqq x\}$$

と定義し、これに Zorn の補題を適用すればよい。

問題７、８、９：選択公理を明示的に扱っていないため、これらを論ずるのは本来あまり意味はない。ここでは選択公理を仮定していると仮定して議論する。議論の前提を明示するため、最初に選択公理の話から始めておこう。

まず選択公理とは、$(A_\lambda)_{\lambda \in I}$ が非空集合の族であり、添字集合 I は有限か無限かもわからない任意の集合であるとき、I 上で定義された関数 $f : I \to \cup_{\lambda \in I} A_\lambda$ で、$f(\lambda) \in A_\lambda$ を満たすものが必ず存在することを言う。特にこのような f の集合を $\prod_{\lambda \in I} A_\lambda$ と表し、集合族 (A_λ) の**直積**と言うことにすると、選択公理は「非空集合の任意個の直積は非空である」と表現される。

この選択公理はもう一つの主張とよく並立して議論される。いま、A が任意の非空集合であるとき、$\mathscr{A} = 2^A \setminus \{\emptyset\}$ とする。このとき、関数 $c : \mathscr{A} \to A$ で、$c(B) \in B$ をすべての非空な $B \subset A$ に対して満たすもの（以下、選択関数と呼ぶ）が存在する、というのが「もうひとつの選択公理」である。このふたつの「選択公理」が同値であることを

示すと、まず「もうひとつの選択公理」を仮定した場合、$A = \cup_{\lambda \in I} A_\lambda$ に対して選択関数 $c : \mathscr{A} \to A$ を取ってくる。この場合 $A_\lambda \subset A$ であるため、$c(A_\lambda) \in A_\lambda$ であるから、$f(\lambda) = c(A_\lambda)$ と定義すればこれが「選択公理」の要件を満たす。逆に「選択公理」の方を仮定し、$I = \mathscr{A}$ として $A_\lambda = \lambda$ と定義すれば、$f \in \prod_{\lambda \in I} A_\lambda$ が存在することになる。このとき、$c(\lambda) = f(\lambda)$ と定義すれば、$f(\lambda) \in A_\lambda = \lambda$ であることにより、c が「もうひとつの選択公理」の要件を満たす。こうして、このふたつは同値であることが示された。

次に、選択公理がツェルメロの整列公理から導かれることを示そう。念のために主張を述べる。非空集合 X 上の二項関係 $\geq \subset X^2$ が**整列順序**であるとは、それが全順序であり、かつ任意の X の部分集合 A に対してこの順序の最小元 $a^* \in A$ が存在することを言う。ツェルメロの整列公理は、任意の非空集合上に整列順序が存在するという主張である。$\geq$ をその順序としたとき、$c(A)$ をこの $\geq$ に関する A の最小元とすれば、これが選択関数となる。よって整列公理は選択公理を含意する。

一方で、定理 1.1 はブルバキ=ヴィットの定理と呼ばれている。この定理の証明には選択公理を利用していないが、それを利用した定理 1.2 の証明では選択公理を利用する。この点が教科書では非常にあいまいに書かれているため、明確に書き直そう。いま、X は半順序集合とし、対応する順序を $\geq$ とする。Y を X 上の鎖の全体からなる集合とする。背理法の仮定により、Y には極大元がひとつも存在しないと仮定しよう。このとき、鎖 C に対して

$$C^* = \{x \in X \setminus C | \forall y \in C,\ y \geq x \text{ or } x \geq y\}$$

と定義する。仮定から C^* は常に非空である。選択公理を用いて選択関数 $c : \mathscr{X} \to X$ を取り、

$$f(C) = C \cup c(C^*)$$

と定義すると、$f(C)$ は C を厳密に含む鎖となる。しかしこれは定理 1.1 に矛盾するため、あり得ない。以上でハウスドルフの極大定理が導出された。

ツォルンの補題(定理 1.3)がハウスドルフの極大定理から導かれることについては特に問題はない。まとめると、現時点で我々は

$$\text{整列公理} \Rightarrow \text{選択公理} \Rightarrow \text{極大定理} \Rightarrow \text{ツォルンの補題}$$

というところまでは証明いていることになる。

以上を前提にして問題 7 を見よう。(1) については、C を $\mathscr{E}$ 上の鎖としよう。$\cup C = E^*$ としたとき、E^* の任意の有限部分集合 A を取る。$a \in A$ に対して、a を含む $E_a \in C$ を取ると、C が鎖であることから、その中で最大の集合 E_{a^*} を取ることができる。このと

き $A \subset E_{a^*}$ であるから、$A \in \mathscr{E}$ である。以上から E^* の任意の有限部分集合は $\mathscr{E}$ に含まれるため、$E^* \in \mathscr{E}$ である。明らかに E^* は C の上界である。よってツォルンの補題が適用できて、$\mathscr{E}$ には極大元が存在する。次に (2) については、まず X を半順序集合とし、対応する順序を $\geq$ とする。このとき、X の鎖 C をすべて集めてできた集合を $\mathscr{E}$ と置こう。$C \in \mathscr{E}$ であるとき、明らかに C の任意の有限部分集合は鎖であり、よって $\mathscr{E}$ に属する。逆に、C の任意の有限部分集合 E が鎖であるとき、$x, y \in C$ を任意に取れば、$E = \{x, y\}$ は鎖であり、よって $x \geq y$ と $y \geq x$ のいずれかが必ず成り立つ。これは C 自体が鎖であることを意味する。故に $\mathscr{E}$ はたしかに (1) の条件を満たすため、極大元が存在することになるが、これはハウスドルフの極大定理を意味する。以上をまとめると、我々は以下の結果を得た。

$$\text{極大定理} \Rightarrow \text{ツォルンの補題} \Rightarrow \text{問題7 (1)} \Rightarrow \text{極大定理}$$

したがって、ハウスドルフの極大定理、ツォルンの補題、問題７ (1) は同値である。

今度は問題８を見てみよう。X に集合として含まれる A_0 と、その上の整列順序 $\geq_0$ のペア $E_0 = (A_0, \geq_0)$ の全体を $\mathscr{E}$ とする。ここで、$\mathscr{E}$ 上の二項関係 $\geq^*$ を、$E_1 \geq^* E_2$ であることが、次の３条件を満たすことと同値であるように作る。１）$A_2 \subset A_1$ である。２）A_2 上で $\geq_1$ と $\geq_2$ は一致する。３）$y \in A_2$ かつ $x \in A_1 \setminus A_2$ ならば $x \geq_1 y$ である。$\geq^*$ について反射性、反対称性、推移性を示すことは容易であるから、$\geq^*$ は $\mathscr{E}$ 上の半順序である。

次に、C を $\mathscr{E}$ 上の鎖であるとすれば、$A_0 = \cup_{E=(A,\geq)\in C} A$ と定義し、$x \geq_0 y$ を、ある $E_1 \in C$ に対して $x \geq_1 y$ となることと定義する。このとき、$x \in A_0$ ならば $x \geq_0 x$ であることは明らかである。$x, y \in A_0$ について $x \geq_0 y$ かつ $y \geq_0 x$ であるとき、ある $E_1, E_2 \in C$ に対して $x \geq_1 y$ かつ $y \geq_2 x$ となるが、C は鎖であるから $E_1 \geq^* E_2$ か $E_2 \geq^* E_1$ のいずれかが成り立ち、よって $x \geq_i y, y \geq_i x$ が $i = 1$ か $i = 2$ のどちらかで成り立つ。これは $x = y$ を意味する。今度は $x \geq_0 y, y \geq_0 z$ であるとすれば、同様に $x \geq_1 y, y \geq_2 z$ となる $E_1, E_2 \in C$ を取れば、$i = 1$ か $i = 2$ のいずれかについて $x \geq_i y, y \geq_i z$ であり、推移性から $x \geq_i z$ を得る。これは $x \geq_0 z$ を意味する。最後に、$x, y \in E_0$ であるとき、$x \in E_1, y \in E_2$ となる $E_1, E_2 \in C$ を取れば、C が鎖であることから、$E_1 \subset E_2$ か $E_2 \subset E_1$ のいずれかが成り立つ。したがって $i = 1$ か $i = 2$ のいずれかについて $x, y \in E_i$ となるが、$\geq_i$ は完備であるから、$x \geq_0 y$ か $y \geq_0 x$ のどちらかが成り立たなければならない。以上で、$\geq_0$ は全順序であることがわかった。

次に、A を A_0 の任意の非空部分集合とする。$x \in A$ をひとつ取り、$x \in A_1$ となる $E_1 \in C$ を取れば、$A \cap A_1$ は A_1 の部分集合であるため、$\geq_1$ に関する最小元 $x^* \in A \cap A_1$

が存在する。いま、$y \in A$ を任意に取り、$y \in A_2$ となる $E_2 \in C$ を取ろう。$y \notin A_1$ である場合、$E_1 \geq^* E_2$ ではないため、C が鎖であることから、$E_2 \geq^* E_1$ である。すると $\geq^*$ の三番目の条件から $y \geq_2 x$ となるため、$y \geq_0 x$ である。一方、$y \in A_1$ ならば $y \geq_1 x$ であるため、やはり $y \geq_0 x$ である。以上から、x は $\geq_0$ の下でも A の最小元であることが判明した。したがって $\geq_0$ は整列順序であり、$E_0 = (A_0, \geq_0) \in \mathscr{E}$ となる。明らかにこの E_0 が C の上界である。

以上から、ツォルンの補題によって $\mathscr{E}$ には極大集合 $E_0 = (A_0, \geq_0)$ が存在する。対応する順序を $\geq_0$ と書こう。$A_0 \neq X$ であるとき、$x \in X \setminus A_0$ をひとつ取って、$A_1 = A_0 \cup \{x\}$ とし、

$$y \geq_1 z \Leftrightarrow [y = x \text{ or } y, z \in A_0,\ y \geq_0 z]$$

として $\geq_1$ を定義する。この順序 $\geq_1$ が A_1 上の整列順序であることを確認することは極めて容易である。明らかに $E_1 = (A_1, \geq_1) \geq^* E_0$ となるが、これは E_0 の極大性に矛盾する。以上から、$A_0 = X$ であり、したがって $\geq_0$ は X 上の整列順序であることが判明した。以上で、問題８の証明が終わった。ここで使った性質はツォルンの補題であり、これらを上の議論とつなぎ合わせることで、問題９の解答も得ることができる。

問題１０：完備半順序集合の定義があいまいなので、一応補足しておく。いま、X の非空部分集合 A に対して、上界集合 $U_A = \{x \in X | \forall y \in A, x \geq y\}$ および下界集合 $L_A = \{x \in X | \forall y \in A, y \geq x\}$ を定義する。このとき、U_A の最小元を $\vee A$ と、L_A の最大元を $\wedge A$ としたとき、X のどんな非空部分集合 A に対しても元 $\wedge A, \vee A \in X$ が必ず存在するとき、X を**完備束** (complete lattice) と言う。今回はこの完備束 X 上の関数 f が順序を保存する場合の不動点集合の性質を調べる問題である。

さて、$x^* = \wedge X$ とすれば x^* は X の最小元であるため、$f(x^*) \geq x^*$ である。そこで、$Y = \{x \in X | f(x) \geq x\}$ と定義すると、Y は X の非空部分集合である。ここで $y^* = \vee Y$ とすれば、$x \in Y$ に対して $y^* \geq x$ なので、$f(y^*) \geq f(x)$ であり、よって $f(y^*) \geq x$ である。以上から $f(y^*) \in U_A$ が判明したので、y^* の最小性から $f(y^*) \geq y^*$ を得る。すると定理の仮定から $f(f(y^*)) \geq f(y^*)$ となるが、これは $f(y^*) \in Y$ を意味するため、$y^* \in U_Y$ であることにより、$y^* \geq f(y^*)$ となる。以上で $f(y^*) = y^*$ が示せた。ここからただちに f の不動点集合 Z は非空であることがわかり、また $y^* = \vee Y \in Z$ もわかる。同様に、$Y' = \{x \in X | x \geq f(x)\}$ とすれば、対称的なロジックにより $y^+ = \wedge Y' \in Z$ が示される。

次に $z_1 = \wedge Z, z_2 = \vee Z$ としよう。上と同様に、$z \in Z$ ならば $z_2 \geq z \geq z_1$ なので、$f(z_2) \geq f(z) \geq f(z_1)$ であるが、$f(z) = z$ なので、$f(z_1) \in L_Z, f(z_2) \in U_Z$ が示される。

z_1 は L_Z の最大元なので $z_1 \geq f(z_1)$ を得るが、これは $z_1 \in Y'$ を意味するため、$z_1 \geq y^+$ となる。一方で $y^+ \in Z$ なので $y^+ \geq z_1$ となり、よって $y^+ = z_1$ であるため、$z_1 \in Z$ となる。同様に $z_2 = y^* \in Z$ となる。以上で証明が完成した。

問題１１：フィルターの鎖に対して、それらすべての合併を取ればそれがフィルターとなっていることを確かめることができ、それが鎖の上界になる。後は Zorn の補題を適用すればよい。

問題１２：A が有限であれば B の個数は A の個数以下である。

問題１３：まず、$m+n$ が一定の場合、m を 1 減らして n を 1 増やせば $f(m,n)$ は 1 増えることに注意する。したがって後は $a = m+n$ の値に関して f が狭義単調であることを示せば単射性が示せる。このためには、上の性質から $f(1, a-2) < f(a-1, 1)$ であることを示せばよいが、直接計算すれば $f(1, a-2) = f(a-1, 1) - 1$ であるから、正しい。

全射性については、$1 = f(1,1)$ であることに注意してやれば、後は帰納法で示すことができる。

問題１４：A が空であるときは自明であるから、以下では $a^* \in A$ と仮定する。

$A \subset B$ で B が可算とする。$g : B \to A$ を、$a \in A$ ならば $g(a) = a$ で、$a \notin A$ なら $g(a) = a^*$ と定義すれば、g は全射である。よって A は可算。

問題１５：A は無限集合とする。このとき、$a \in A$ とすれば $\{a\}$ は大きさ 1 の A の部分集合である。これを A_1 と書く。以下、大きさ $n-1$ の A の部分集合 A_{n-1} があったと仮定して大きさ n の A の部分集合 A_n の存在を示す。そのためには、$A \setminus A_{n-1}$ が非空であるから、$a \in A \setminus A_{n-1}$ を適当に取りだして $A_n = \{a\} \cup A_{n-1}$ と置けばよい。こうして得られた A_n すべてに対して $B = \cup_n A_n$ と置けば、B の大きさはあらゆる自然数 n よりも大きくなければならないが、一方で B は可算集合の可算個の合併であるから可算である。

問題１６：まず、有理数は可算であるから、その有限回の直積も可算である。$\mathbb{Q}^{n+1}$ から有理係数の n 次以下の多項式への写像、

$$f(a_0, ..., a_n) = a_0 x^n + ... + a_n$$

を考えれば、f は全射である。ここから有理係数の n 次以下の多項式の全体 $Q[x](n)$ は可算であることがわかる。したがって有理係数の多項式の全体 $Q[x] = \cup_n Q[x](n)$ も可算である。

問題１７：A が可算とすれば直積 A^n は可算である。

$$f(a_1, ..., a_n) = \{a_1, ..., a_n\}$$

とすればこれは A^n から A の n 個以下の要素しか持たない部分集合の全体 A_n への全射である。よって A_n は可算であり、故に $\cup_n A_n$ も可算である。

問題１８：X が無限集合である場合、X の可算無限部分集合 Y を取り、Hint に従って $Y = Y_1 \cup Y_2$ となる可算無限集合 Y_1, Y_2 を取る。全単射 $f : Y \to Y_1$ を取って、

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \notin Y, \\ f(x) & \text{if } x \in Y \end{cases}$$

と定義すれば、F は X から $(X \setminus Y) \cup Y_1$ への全単射である。

逆に、X が有限集合である場合、X から X の真部分集合 Y へのどんな全射写像も鳩ノ巣原理によって単射にならないため、これで証明が完成した。